https://doi.org/10.15407/apmm2021.19.30-36

УДК 512.647

Н. Б. Ілаш✉

СПІВВІДНОШЕННЯ ДЛЯ РЯДІВ ПУАНКАРЕ АЛГЕБР ІНВАРІАНТІВ БІНАРНИХ ФОРМ

Знайдено рекурентні співвідношення для рядів Пуанкаре алгебр спільних інваріантів n лінійних форм, алгебр спільних коваріантів n лінійних форм, алгебр спільних інваріантів n квадратичних форм та алгебр спільних коваріантів n квадратичних форм.

***Ключові слова**: класична теорія інваріантів, інваріант, коваріант, ряд Пуанкаре, бінарна форма, алгебра інваріантів, многочлени Нараяна.*

Нехай $R = R_0 + R_1 + \cdots$ – скінченно породжена градуйована комплексна алгебра, $R_0 = \mathbb{C}$. Рядом Пуанкаре називають формальний степеневий ряд

$$P(R,z) = \sum_{j=0}^{\infty} \dim R_j z^j .$$

Зауважимо, що в літературі іноді зустрічаються терміни ряд Гільберта чи ряд Гільберта–Пуанкаре (див. [9], [15]). Ще Гільберту було відомо, що ряд Пуанкаре скінченно породженої алгебри R над полем $\mathbb{K} = R_0$ є розкладом у степеневий ряд деякої раціональної функції з радіусом збіжності, не меншим за 1 (див. [13, с. 29]). Цю раціональну функцію іноді теж називають рядом Пуанкаре.

Розглянемо комплексний векторний простір $V_d = \langle x^d, x^{d-1}y, \ldots, xy^{d-1}, y^d \rangle$ бінарних форм порядку d, на якому природно діє група $G = SL_2$. Продовжимо її дію на алгебри поліноміальних функцій $\mathbb{C}[V_d]$ та $\mathbb{C}[V_d \oplus \mathbb{C}^2]$. Алгебри інваріантів $I_d = \mathbb{C}[V_d]^G$ та $C_d = \mathbb{C}[V_d \oplus \mathbb{C}^2]^G$ у термінах класичної теорії інваріантів називають, відповідно, *алгеброю інваріантів та алгеброю коваріантів бінарної форми порядку* d. Відомо [8], що алгебри SL_2-інваріантів є скінченно породженими і градуйованими.

Розглянемо тепер векторний простір $V_{\mathbf{d}} = V_{d_1} \oplus V_{d_2} \oplus \ldots \oplus V_{d_n}$, $\mathbf{d} := (d_1, d_2, \ldots d_n)$, який визначають як пряму суму n просторів V_{d_i} бінарних форм порядку d_i $(i = 1 \ldots n)$, де природно діє група SL_2. Як і раніше, продовжимо дію цієї групи на алгебри поліноміальних функцій $\mathbb{C}[V_{\mathbf{d}}] = \mathbb{C}[V_{d_1} \oplus V_{d_2} \oplus \ldots \oplus V_{d_n}]$ та $\mathbb{C}[V_{\mathbf{d}} \oplus \mathbb{C}^2] = V_{d_1} \oplus V_{d_2} \oplus \ldots \oplus V_{d_n} \oplus \mathbb{C}^2$. Відповідні алгебри $I_{\mathbf{d}} = \mathbb{C}[V_{d_1} \oplus V_{d_2} \oplus \ldots \oplus V_{d_n}]^{SL_2}$ та $C_{\mathbf{d}} = \mathbb{C}[V_{d_1} \oplus V_{d_2} \oplus \ldots \oplus V_{d_n} \oplus \mathbb{C}^2]^{SL_2}$ SL_2-інваріантних функцій називають, відповідно, *алгеброю спільних інваріантів* та *алгеброю спільних коваріантів* n *бінарних форм.*

Якщо $d_1 = d_2 = \ldots = d_n = 1$, простір $V_{\mathbf{d}} := nV_1 = \underbrace{V_1 \oplus V_1 \oplus \ldots \oplus V_1}_{n}$ є прямою сумою n лінійних форм. Алгебри $I_1^{(n)} := \mathbb{C}[nV_1]^{SL_2}$ та $C_1^{(n)} := \mathbb{C}[nV_1 \oplus \mathbb{C}^2]^{SL_2}$ мовою класичної теорії інваріантів – це *алгебра спільних інваріантів* та *алгебра спільних коваріантів* n *лінійних форм,* відповідно.

✉ nadyailash@gmail.com

Аналогічно введемо поняття *алгебри* $I_2^{(n)} := \mathbb{C}[\underbrace{V_2 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_2}_{n}]$ *спільних інваріантів та алгебри* $C_2^{(n)} := \mathbb{C}[\underbrace{V_2 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_2}_{n} \oplus \mathbb{C}^2]$ *спільних коваріктів* n *квадратичних форм.*

Ряд Пуанкаре алгебри інваріантів бінарної d-форми I_d знайшов Т. Спрінгер [14, с. 342]. Простіше доведення результату Спрінгера навів Л. Бедратюк у праці [1]. Аналог формули Спрінгера ряду Пуанкаре для алгебри коваріантів бінарної d-форми обчислив Л. Бедратюк [5]. Ряди Пуанкаре алгебр спільних інваріантів та коваріантів двох бінарних форм обчислили незалежно Бріон [6] та Л. Бедратюк [3]. Знайдено [9] вираз для визначення рядів Пуанкаре алгебр скінченної кількості спільних інваріантів бінарних форм.

Ряди Пуанкаре алгебр спільних інваріантів та коваріантів лінійних та квадратичних форм знайшов Л. Бедратюк [4]. У працях [10] і [11] ряди Пуанкаре цих алгебр виражено через многочлени Нараяна:

$$P(I_1^{(n)}, z) = \frac{N_{n-2}(z^2)}{(1-z^2)^{2n-3}}; \tag{1}$$

$$P(C_1^{(n)}, z) = \frac{W_{n-1}(z^2) + nzN_{n-1}(z^2)}{(1-z^2)^{2n-1}}; \tag{2}$$

$$P(C_2^{(n)}, z) = \frac{W_{n-1}(z^2)}{(1-z)^{3n-1}(1+z)^{2n-1}}; \tag{3}$$

$$P(I_2^{(n)}, z) = \frac{W_{n-1}(z^2) - nzN_{n-1}(z^2)}{(1-z)^{3n-1}(1+z)^{2n-1}}, \tag{4}$$

де $N_n(z) = \sum_{k=1}^{n} N_{n,k} z^{k-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{k-1} z^{k-1}$ – многочлен Нараяна, а $W_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 z^k$ – многочлен Нараяна типу B.

Нижче знайдено рекурентні співвідношення для рядів Пуанкаре алгебр спільних інваріантів та коваріантів лінійних та квадратичних форм. Для цього використано рекурентні співвідношення для многочленів Нараяна.

1. **Допоміжні означення та результати**. Нагадаємо, що *многочленом Лежандра* [2, с. 125] називають розв'язок диференційного рівняння

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d}{dx}L_n(x)\right) + n(n+1)L_n(x) = 0.$$

Доведено, див., наприклад, працю [2, с. 151], що многочлен Лежандра має вигляд

$$L_n = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right].$$

Остання формула є формулою Родріга для многочлена Лежандра.

Відома також рекурентна формула для цього многочлена:

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x).$$

Многочлен Нараяна типу B можна виразити через многочлен Лежандра [7]:

$$W_n(z) = (1-z)^n L_n\left(\frac{1+z}{1-z}\right).$$

Це дає можливість встановити рекурентну формулу для многочлена Нараяна типу В.

Лема 1. Справедлива рекурентна формула для многочлена Нараяна типу В:

$$(n+1)W_{n+1}(z)=(2n+1)(1+z)W_n(z)-n(1-z)^2W_{n-1}(z).$$

Доведення. Перепишемо її для многочлена Лежандра

$$(n+1)L_{n+1}(x)=(2n+1)xL_n(x)-nL_{n-1}(x)$$

у вигляді

$$(n+1)L_{n+1}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=(2n+1)\frac{1+z}{1-z}L_n\left(\frac{1+z}{1-z}\right)-nL_{n-1}\left(\frac{1+z}{1-z}\right).$$

Формуємо потрібні вирази, домноживши на $(1-z)^{n+1}$:

$$(n+1)(1-z)^{n+1}L_{n+1}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=$$

$$=(2n+1)(1-z)^{n+1}\frac{1+z}{1-z}L_n\left(\frac{1+z}{1-z}\right)-n(1-z)^{n+1}L_{n-1}\left(\frac{1+z}{1-z}\right).$$

Після спрощення отримаємо:

$$(n+1)W_{n+1}(z)=(2n+1)(1+z)W_n(z)-n(1-z)^2W_{n-1}(z),$$

що доводить твердження леми.

У праці [12] встановлена рекурентна формула для многочленів Нараяна $N_n(z)$:

$$(n+1)N_n(z)=(2n-1)(1+z)N_{n-1}(z)-(n-2)(1-z)^2N_{n-2}. \tag{5}$$

У формулах (2), (4) ряди Пуанкаре $P(C_1^{(n)},z)$ і $P(I_2^{(n)},z)$ виражено через многочлени

$$R_n(z^2):=W_{n-1}(z^2)+nzN_{n-1}(z^2),$$

$$R_n^*(z^2):=W_{n-1}(z^2)-nzN_{n-1}(z^2).$$

З рекурентних формул для многочленів Нараяна можна отримати рекурентні формули для многочленів $R_n(z^2)$ і $R_n^*(z^2)$.

Лема 2. Справедливі такі формули:

$$(n-1)(n-2)R_n(z^2)=2(2n-5)(n-2)(1+z^2)R_{n-1}(z^2)-$$

$$-2(3(n-3)^2(1+z^4)+2(n-2)(n-4)z^2)R_{n-2}(z^2)+$$

$$+2(2n-7)(n-4)\left(1+z^2\right)\left(1-z^2\right)^2R_{n-3}(z^2)-$$

$$-(n-5)(n-4)\left(1-z^2\right)^4R_{n-4}(z^2),$$

$$(n-1)(n-2)R_n^*(z^2)=2(2n-5)(n-2)(1+z^2)R_{n-1}^*(z^2)-$$

$$-2(3(n-3)^2(1+z^4)+2(n-2)(n-4)z^2)R_{n-2}^*(z^2)+$$

$$+2(2n-7)(n-4)\left(1+z^2\right)\left(1-z^2\right)^2R_{n-3}^*(z^2)-$$

$$-(n-5)(n-4)\left(1-z^2\right)^4R_{n-4}^*(z^2).$$

Доведення. Застосуємо декілька разів рекурентні формули для рядів Нараяна обох типів, щоб виразити $R_n(z^2)$ через $N_{n-4}(z^2), W_{n-4}(z^2), N_{n-5}(z^2)$ та

$W_{n-5}(z^2)$. Отримаємо:

$$\begin{aligned}
(n-1)(n-2)R_n(z^2) &= (2n-3)(n-2)(1+z^2)W_{n-2}(z^2) - \\
&-(n-2)^2(1-z^2)^2 W_{n-3}(z^2) + \\
&+(n-1)(n-2)(2n-3)(1+z^2)zN_{n-2}(z^2) - \\
&-(n-1)(n-2)(n-3)(1-z^2)^2 zN_{n-3}(z^2) = \\
&= \Big((2n-3)(2n-5)(2n-7)(1+z^2)^3 - \\
&-((n-2)^2(n-4)(1-z^2)^4 - \\
&-(2n-3)(2n-5)(n-4)(1+z^2)^2(1-z^2)^2)W_{n-5}(z^2) + \\
&+\left(\frac{(2n-3)(2n-5)(2n-7)}{(n-1)(n-2)}(1+z^2)^3 - \left(\frac{(n-3)(2n-7)}{n-2} + \right.\right. \\
&\left.\left.+\frac{(n-4)(2n-3)}{n-1}\right)(1-z^2)^2(1+z^2)\right)(n-1)(n-2)nN_{n-4}(z^2) + \\
&+\Big((n-1)(n-3)(n-5)(1-z^2)^4 - \\
&-(2n-3)(2n-5)(n-5)(1+z^2)^2(1-z^2)^2\Big)nN_{n-5}(z^2).
\end{aligned}$$

Далі згрупуємо доданки, відповідно до коефіцієнтів, які потрібно отримати перед $R_{n-1}(z^2)$, $R_{n-2}(z^2)$, $R_{n-3}(z^2)$ та $R_{n-4}(z^2)$. Після нескладних обчислень дістанемо:

$$\begin{aligned}
(n-1)(n-2)R_n(z^2) &= \\
&= 2(2n-5)(n-2)(1+z^2)\left(W_{n-2}(z^2)+(n-1)zN_{n-2}(z^2)\right) - \\
&-((2n-5)(2n-7)(1+z^2)^2 + \\
&+(2n^2-12n+19)(1-z^2)^2)\times\left(W_{n-3}(z^2)+(n-2)zN_{n-3}(z^2)\right) + \\
&+2(2n-7)(n-4)\left(1+z^2\right)\left(1-z^2\right)^2\left(W_{n-4}(z^2)+(n-3)zN_{n-4}(z^2)\right) - \\
&-(n-5)(n-4)\left(1-z^2\right)^4\left(W_{n-5}(z^2)+(n-4)zN_{n-5}(z^2)\right) = \\
&= 2(2n-5)(n-2)(1+z^2)R_{n-1}(z^2) - 2(3(n-3)^2(1+z^4) + \\
&+2(n-2)(n-4)z^2)R_{n-2}(z^2) + \\
&+2(2n-7)(n-4)\left(1+z^2\right)\left(1-z^2\right)^2 R_{n-3}(z^2) - \\
&-(n-5)(n-4)\left(1-z^2\right)^4 R_{n-4}(z^2).
\end{aligned}$$

Доведення рекурентної форми для $R_n^*(z^2)$ повністю аналогічне.

2. **Рекурентні співвідношення для рядів Пуанкаре алгебр спільних інваріантів та коваріантів лінійних та квадратичних форм**. Скористаємось рекурентними формулами для многочленів Нараяна та многочленів $R_n(z^2)$ і $R_n^*(z^2)$, щоб побудувати рекурентні формули для рядів Пуанкаре алгебр $I_1^{(n)}$, $C_1^{(n)}$, $I_2^{(n)}$, $C_2^{(n)}$.

Теорема 1. Ряд Пуанкаре алгебри спільних інваріантів n лінійних форм виразимо рекурентно:

$$(n+1)(1-z^2)^2 P(I_1^{(n+2)}, z) =$$
$$= (2n-1)(1+z^2)P(I_1^{(n+1)}, z) - (n-2)P(I_1^{(n)}, z).$$

Доведення. Скористаємось рекурентною формулою (5) для многочленів Нараяна. Врахувавши, що згідно з формулою (1)

$$N_n(z^2) = (1-z^2)^{2n+1} P(I_1^{(n)}(n+2), z),$$

отримаємо:

$$(n+1)(1-z^2)^{2n+1} P(I_1^{(n+2)}, z) =$$
$$= (2n-1)(1+z^2)(1-z^2)^{2n-1} P(I_1^{(n+1)}, z) -$$
$$-(n-2)(1-z^2)^2(1-z^2)^{2n-3} P(I_1^{(n)}, z).$$

Домноживши обидві частини останньої рівності на $\dfrac{1}{(1-z)^{2n-1}}$, одержимо твердження теореми.

Теорема 2. Ряд Пуанкаре алгебри спільних коваріантів n лінійних форм виразимо рекурентно:

$$(n-1)(n-2)(1-z^2)^4 P(C_1^{(n)}, z) =$$
$$= 2(2n-5)(n-2)(1+z^2)(1-z^2)^2 P(C_1^{(n-1)}, z) -$$
$$-2(3(n-3)^2(1+z^4) + 2(n-2)(n-4)z^2)P(C_1^{(n-2)}, z) +$$
$$+2(2n-7)(n-4)(1+z^2)P(C_1^{(n-3)}, z) -$$
$$-(n-5)(n-4)P(C_1^{(n-4)}, z).$$

Доведення. Використаємо знайдену вище рекурентну формулу для многочлена $R_n(z)$:

$$(n-1)(n-2)(1-z^2)^4 P(C_1^{(n)}, z) =$$
$$= (n-1)(n-2)(1-z^2)^4 \frac{R_n(z^2)}{(1-z^2)^{2n-1}} =$$
$$= 2(2n-5)(n-2)(1+z^2)(1-z^2)^2 P(C_1^{(n-1)}, z) -$$
$$-2(3(n-3)^2(1+z^4) + 2(n-2)(n-4)z^2)P(C_1^{(n-2)}, z) +$$
$$+2(2n-7)(n-4)\left(1+z^2\right)P(C_1^{(n-3)}, z) -$$
$$-(n-5)(n-4)P(C_1^{(n-4)}, z).$$

Теорема 3. Ряд Пуанкаре алгебри спільних коваріантів n квадратичних форм виразимо рекурентно:

$$(n-1)(1-z^2)^2(1-z)^2 P(C_2^{(n)}, z) =$$
$$= (2n-3)(1+z^2)(1-z)P(C_2^{(n-1)}, z) - (n-2)P(C_2^{(n-2)}, z).$$

Доведення. Вище встановлено, що

$$W_{n-1}(z^2) = (1-z^2)^{2n-1}(1-z)^n P(C_2^{(n)}, z).$$

Підставивши вирази для $W_{n-1}(z^2), W_{n-2}(z^2)$ і $W_{n-3}(z^2)$ у рекурентну формулу для многочленів Нараяна типу B, після нескладних обчислень отримаємо твердження теореми 3.

Теорема 4. Ряд Пуанкаре алгебри спільних інваріантів n квадратичних форм виразимо рекурентно:

$$(n-1)(n-2)(1-z^2)^4(1-z)^4 P(I_2^{(n)}, z) =$$
$$= 2(2n-5)(n-2)(1+z^2)(1-z^2)^2(1-z)^3 P(I_2^{(n-1)}, z) -$$
$$-2(3(n-3)^2(1+z^4)+2(n-2)(n-4)z^2)(1-z)^2 P(I_2^{(n-2)}, z) +$$
$$+2(2n-7)(n-4)\left(1+z^2\right)(1-z)P(I_2^{(n-3)}, z) -$$
$$-(n-5)(n-4)P(I_2^{(n-4)}, z).$$

Доведення. Згідно з (4)

$$P(I_2^{(n)}, z) = \frac{R_n^*(z^2)}{(1-z)^{3n-1}(1+z)^{2n-1}}.$$

Виразивши звідси $R_n^*(z^2)$ і підставивши одержаний вираз у рекурентну формулу для $R_n^*(z^2)$, дістанемо рекурентну формулу для ряду Пуанкаре алгебри спільних інваріантів n квадратичних форм.

За рекурентними формулами для многочленів Нараяна обох типів можна досить легко дістати ще один вираз для ряду Пуанкаре $P(I_2^{(n)}, z)$.

Теорема 5. Ряд Пуанкаре алгебри спільних інваріантів n квадратичних форм можна обчислити за формулою

$$P(I_2^{(n)}, z) = \frac{W_{n-2}(z^2) - (n-2)zN_{n-2}(z^2)}{(1-z)^{3n-3}(1+z)^{2n-1}}.$$

1. *Бедратюк Л. П.* Ряди Пуанкаре алгебр інваріантів бінарної і тернарної форм // Наук. записки НАУКМА. Фіз.-матем. науки. – 2011. – 113. – С. 7–11.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – Москва: Наука, 1965. – 296 с.
3. *Bedratyuk L.* The Poincaré series of the algebras of simultaneous invariants and covariants of two binary forms // Linear and Multilinear Algebra. – 2010. – 58, No. 6. – P. 789–803. https://doi.org/10.1080/030810809031272621 0.1080/03081080903127262.
4. *Bedratyuk L.* Weitzenböck derivations and the classical invariant theory, I: Poincaré series // Serdica Math. J. – 2010. – 36, No. 2. – P. 99–120.
5. *Bedratyuk L.* The Poincaré series of the covariants of binary forms // International J. of Algebra. – 2010. – 4, No. 25. – P. 1201–1207.
6. *Brion M.* Invariants de plusieurs formes binaires // Bull. Soc. Math. Fr. – 1982. – 110. – P. 429–445.
7. *Gould H. W.* Combinatorial Identities: Table II: Advanced Techniques for Summing Finite Series. From the seven unpublished manuscripts of H. W. Gould Edited and Compiled by Jocelyn Quaintance. – 2010. – 5 – Access mode: http://www.math.wvu.edu/ gould/Vol.5.PDF.
8. *Hilbert D.* Über die Theorie der algebraischen Formen // Math. Ann. – 1890. – 36, No. 4. – S. 473–534.
9. *Cowie L. E., Herbig H.-C., Herden D., Seaton C.* The Hilbert series and a-invariant of circle invariants // J. of Pure and Appl. Algebra. – 2019. – 223, No. 1. – P. 395–421. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2018.03.017
10. *Ilash N.* The Poincaré series for the algebras of joint invariants and covariants of linear forms // C. R. Acad. Bulg. Sci. – 2015. – 68, No. 6. – P. 715–724.
11. *Ilash N. B.* Poincaré series for the algebras of joint invariants and covariants of n quadratic forms // Carpathian Math. Publ. – 2017. – 9, No. 1. – P. 57–62. https://doi.org/10.15330/cmp.9.1.57-62.

12. *Sulanke R. A.* The Narayana distribution. Special issue on lattice path combinatorics and applications // J. Statist. Plann. Inference. – 2002. – 101, No. 1–2. – P. 311–326. https://doi.org/10.1016/S0378-3758(01)00192-6
13. *Springer T.* Invariant theory // Lecture Notes in Math. – Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1977. – 585.– P. 1–110.
14. *Springer T. A.* On the invariant theory of SU_2 // Indag. Math. – 1980. – 42. – P. 339–345.
15. *Sturmfels B.* Algorithms in invariant theory. Texts and Monographs in Symbolic Computation. – Wien: Springer, 2008. – 198 p.

THE RELATIONS FOR POINCARÉ SERIES OF ALGEBRAS OF INVARIANTS OF BINARY FORMS

We find recurrence relations for the Poincaré series of the algebra of joint invariants of n linear forms, the algebra of joint covariants of n linear forms, the algebra of joint invariants of n quadratic forms, the algebra of joint covariants of n quadratic forms.

Key words: *classical invariant theory, invariant, covariant, Poincaré series, binary form, algebra of invariants, Narayana polynomials.*

Хмельницький політехн. фаховий коледж
Нац. ун-ту «Львівська політехніка», Хмельницький

Одержано
02.12.21