

## ЗГИН ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНОЇ ПЛАСТИНИ ЗА НЕСТАЦІОНАРНОГО НАГРІВАННЯ І ПОЧАТКОВОГО НАПРУЖЕННЯ

*Досліджено термopужну поведінку прямокутної ізотропної функціонально-градієнтної пластини, яка, перебуваючи початково в плоскому напруженому стані, нестационарно нагрівається середовищем через конвективний теплообмін. Для цього використано п'ятимодальну математичну модель зсувної теорії термopужності та двовимірні рівняння теплопровідності неоднорідних ізотропних пластин. Методами інтегральних перетворень Фур'є і Лапласа знайдено розв'язок нестационарної задачі теплопровідності та квазістатичної задачі термopужності для скінченної шарнірно опертої на краях пластини. Числові результати наведено для неоднорідного композиту кераміка–метал.*

**Ключові слова:** термopужність, температурне навантаження, теплообмін, неоднорідні пластини.

**Вступ.** Тонкостінні елементи конструкцій, виготовлені з неоднорідних композитних матеріалів, широко використовують у сучасній техніці. До неоднорідних, зокрема, належать композити шаруватої структури, а також функціонально-градієнтні матеріали, які володіють неперервною неоднорідністю, що дає можливість уникати небажаних міжшарових деформацій та напружень. Тому дослідження у цьому напрямку актуальні.

Елементи конструкцій неоднорідної структури досліджували [3, 4] багато вчених. Зокрема, побудовані [11, 15] точні розв'язки задач термopужності для функціонально-градієнтних пластин на основі тривимірних рівнянь. Розроблені [1, 5, 16] уточнені моделі на основі двовимірних рівнянь. Отримані [2, 7, 8, 10, 17] аналітичні розв'язки задач про згин неоднорідних і композитних пластин за дії термомеханічного навантаження. Використовували [14] рівняння взаємозв'язаної термopужності для аналізу впливу коефіцієнта зв'язаності на нелінійну поведінку пластин. Метод скінченних елементів для вивчення термopужних процесів у пластинах неоднорідної структури вжили в праці [14, 18]. Досліджували [6] температурну стійкість пластин з композитного матеріалу. Детальніший огляд різних моделей і методів вивчення неоднорідних тонкостінних конструкцій наведено в працях [4, 12, 13].

Мета статті – на основі рівнянь термopужності теорії тонких пластин з п'ятьма степенями свободи та двовимірних рівнянь теплопровідності дослідити термopужний стан функціонально-градієнтної ізотропної прямокутної пластини за нагріву її середовищем через теплообмін і дії сталого початкового плоского напруження.

**1. Формулювання задачі і основні рівняння.** Розглянемо прямокутну пластину з розмірами  $a \times b$  і сталою товщиною  $2h$ , яка виготовлена з неоднорідного в поперечному напрямку ізотропного матеріалу. Точки простору пластини належать до ортогональної системи координат  $x, y, z$  і займають область  $[0, a] \times [0, b] \times [-h, h]$ .

Припустимо, що пластина виготовлена із композиту метал–кераміка. Тоді ефективні матеріальні його властивості  $P_{ef}$  через властивості кераміки  $P_c$  і металу  $P_m$  можна записати так:  $P_{ef}(z) = P_c f_c + P_m f_m$ , де  $f_c$  і  $f_m$  – відносні частки, відповідно, кераміки і металу в композиті, розподіл яких по

---

✉ flyachok@ukr.net

товщині потрібно задати, причому  $f_c + f_m = 1$ . Зокрема, коли на поверхні  $z = h$  є чиста кераміка, а на поверхні  $z = -h$  – чистий метал, формула для ефективних властивостей матеріалу матиме вигляд

$$P_{ef}(z) = P_m + (P_c - P_m) \left( \frac{z}{2h} + \frac{1}{2} \right)^k, \quad (1)$$

де  $k$  – параметр неоднорідності, який характеризує зміну частки матеріалу вздовж товщини і може набувати значень  $k \geq 0$ . Змінюючи його, можна досягнути оптимального складу композиту. Очевидно, що зі зменшенням параметра  $k$  до нуля матеріал пластини набудатиме властивостей чистої кераміки, а зі збільшенням до нескінченності – чистого металу.

Нехай у початковий момент часу температура пластини дорівнює нулю. Починаючи з моменту  $\tau > 0$ , вона нагрівається середовищем, температура якого на поверхні  $z = +h$  дорівнює  $t_z^+(x, y, \tau) = t_c(x, y) t^+(\tau)$ , а на поверхні  $z = -h$  становить  $t_z^-(x, y, \tau) = 0$ . Між середовищем і поверхнями  $z = +h$  і  $z = -h$  відбувається конвективний теплообмін з коефіцієнтами тепловіддачі, відповідно,  $\alpha^+$  і  $\alpha^-$ . Для дослідження напружено-деформованого стану пластини застосуємо зсувну математичну модель першого порядку [1, 2], що складається зі системи рівнянь теплопровідності і термопружності, які в загальному випадку взаємозв'язані. Якщо знехтувати вплив деформації на зміну температурного поля, то ці системи стають незалежними. Температурне поле пластини  $t(x, y, z, \tau)$  визначаємо зі системи двовимірних рівнянь теплопровідності за лінійної залежності температури від поперечної координати [1]:

$$\begin{aligned} A^\lambda \Delta T_1 - \varepsilon_1^t T_1 + B^\lambda \Delta T_2 - \varepsilon_2^t T_2 - A^c \frac{\partial T_1}{\partial \tau} - B^c \frac{\partial T_2}{\partial \tau} &= -\alpha^+ t_z^+, \\ B^\lambda \Delta T_1 - \varepsilon_2^t T_1 + D^\lambda \Delta T_2 - \left( \frac{A^\lambda}{h^2} + \varepsilon_1^t \right) T_2 - B^c \frac{\partial T_1}{\partial \tau} - D^c \frac{\partial T_2}{\partial \tau} &= -\alpha^+ t_z^+, \end{aligned} \quad (2)$$

де

$$\begin{aligned} \{A^\lambda, B^\lambda, D^\lambda\} &= \int_{-h}^h \lambda(z) \{1, z/h, (z/h)^2\} dz; \\ \{A^c, B^c, D^c\} &= \int_{-h}^h c_v(z) \{1, z/h, (z/h)^2\} dz; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\Delta = (\partial_{11}^2 + \partial_{22}^2); \quad T_j = \frac{2j-1}{2h^j} \int_{-h}^h t z^{j-1} dz; \quad \varepsilon_j^t = \alpha^+ - (-1)^j \alpha^-, \quad (j = 1, 2); \quad c_v = \rho \rho;$$

$$\partial_1 = \partial/\partial x; \quad \partial_2 = \partial/\partial y;$$

$\lambda(z)$  – коефіцієнт теплопровідності;  $c(z)$  – питома теплоємність;  $\rho(z)$  – питома густина;  $\tau$  – змінна часу.

Для визначення напружено-деформованого стану пластини використаємо систему рівнянь термопружності, записану в узагальнених переміщеннях  $u_i, w, \gamma_i$  ( $i = 1, 2$ ) [1]:

$$\begin{aligned} A \left( \partial_{11}^2 + \frac{1-\nu}{2} \partial_{22}^2 \right) u_1 + A \frac{1+\nu}{2} \partial_{12}^2 u_2 + B \left( \partial_{11}^2 + \frac{1-\nu}{2} \partial_{22}^2 \right) \gamma_1 + \\ + B \frac{1+\nu}{2} \partial_{12}^2 \gamma_2 = A^t \partial_1 T_1 + B^t \partial_1 T_2 / h, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & A \frac{1+\nu}{2} \partial_{12}^2 u_1 + A \left( \partial_{22}^2 + \frac{1-\nu}{2} \partial_{11}^2 \right) u_2 + B \frac{1+\nu}{2} \partial_{12}^2 \gamma_1 + \\
 & \quad + B \left( \partial_{22}^2 + \frac{1-\nu}{2} \partial_{11}^2 \right) \gamma_2 = A^t \partial_2 T_1 + B^t \partial_2 T_2 / h, \\
 & \left[ \frac{1-\nu}{2} A k' (\partial_1^2 + \partial_2^2) + N_1^0 \partial_1^2 + N_2^0 \partial_2^2 \right] w + \frac{1-\nu}{2} A k' \partial_1 \gamma_1 + \frac{1-\nu}{2} A k' \partial_2 \gamma_2 = 0, \\
 & B \left( \partial_{11}^2 + \frac{1-\nu}{2} \partial_{22}^2 \right) u_1 + B \frac{1+\nu}{2} \partial_{12}^2 u_2 - \frac{1-\nu}{2} A k' \partial_1 w + \\
 & \quad + \left[ D \left( \partial_{11}^2 + \frac{1-\nu}{2} \partial_{22}^2 \right) - \frac{1-\nu}{2} k' A \right] \gamma_1 + \\
 & \quad + D \frac{1+\nu}{2} \partial_{12}^2 \gamma_2 = B^t \partial_1 T_1 + D^t \partial_1 T_2 / h, \\
 & B \frac{1+\nu}{2} \partial_{12}^2 u_1 + B \left( \partial_{22}^2 + \frac{1-\nu}{2} \partial_{11}^2 \right) u_2 - \frac{1-\nu}{2} k' A \partial_2 w + D \frac{1+\nu}{2} \partial_{12}^2 \gamma_1 + \\
 & \quad + \left[ D \left( \partial_{22}^2 + \frac{1-\nu}{2} \partial_{11}^2 \right) - \frac{1-\nu}{2} k' A \right] \gamma_2 = B^t \partial_2 T_1 + D^t \partial_2 T_2 / h. \quad (4)
 \end{aligned}$$

де

$$\{A, B, D\} = \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-h}^h E(z) \{1, z, z^2\} dz; \quad \{A^t, B^t, D^t\} = \frac{1}{1-\nu} \int_{-h}^h E(z) \alpha_t(z) \{1, z, z^2\} dz;$$

$u_1, u_2, w$  – переміщення середньої поверхні;  $\gamma_1, \gamma_2$  – кути повороту нормалі;  $N_1^0, N_2^0$  – сталі початкові нормальні зусилля, відповідно, у напрямках  $x, y$  (додатні за розтягу);  $E(z)$  – модуль Юнга;  $\alpha_t(z)$  – коефіцієнт лінійного температурного розширення;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона;  $k'$  – коефіцієнт зсуву [9].

За відомими переміщеннями і температурним полем зусилля і моменти в пластині визначаємо за формулами [1]

$$\begin{aligned}
 N_1 &= A(\partial_1 u_1 + \nu \partial_2 u_2) + B(\partial_1 \gamma_1 + \nu \partial_2 \gamma_2) - A^t T_1 - B^t T_2 / h, \\
 N_2 &= A(\partial_2 u_2 + \nu \partial_1 u_1) + B(\partial_2 \gamma_2 + \nu \partial_1 \gamma_1) - A^t T_1 - B^t T_2 / h, \\
 M_1 &= B(\partial_1 u_1 + \nu \partial_2 u_2) + D(\partial_1 \gamma_1 + \nu \partial_2 \gamma_2) - B^t T_1 - D^t T_2 / h, \\
 M_2 &= B(\partial_2 u_2 + \nu \partial_1 u_1) + D(\partial_2 \gamma_2 + \nu \partial_1 \gamma_1) - B^t T_1 - D^t T_2 / h, \\
 N_{12} &= \frac{1-\nu}{2} (A(\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) + B(\partial_1 \gamma_2 + \partial_2 \gamma_1)), \\
 M_{12} &= \frac{1-\nu}{2} (B(\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) + D(\partial_1 \gamma_2 + \partial_2 \gamma_1)), \\
 Q_1 &= k' A \frac{1-\nu}{2} (\gamma_1 + \partial_1 w), \\
 Q_2 &= k' A \frac{1-\nu}{2} (\gamma_2 + \partial_2 w), \quad (5)
 \end{aligned}$$

де  $N_1, N_2, N_{12}, Q_1, Q_2$  – нормальні, зсувні і перерізувальні зусилля, відповідно;  $M_1, M_2, M_{12}$  – згинні і крутні моменти.

Для однозначності розв'язку систем (2) і (4) необхідно задати відповідні граничні умови для механічних і температурних функцій, а також початкові умови для температури. Нехай краї пластини шарнірно оперті і на них підтримується нульова температура. Тоді крайові умови будуть:

$$\text{для } x=0, a: u_2 = w = \gamma_2 = 0, N_1 = M_1 = 0, \quad (6)$$

$$T_1 = T_2 = 0, \quad (7)$$

$$\text{для } y=0, b: u_1 = w = \gamma_1 = 0, N_2 = M_2 = 0, \quad (8)$$

$$T_1 = T_2 = 0, \quad (9)$$

$$\text{для } \tau = 0: T_1 = T_2 = 0. \quad (10)$$

2. **Метод розв'язування.** Розв'язок системи рівнянь теплопровідності (2) за умов (7), (9) і (10) знаходимо методами інтегрального перетворення Лапласа за часом і скінченного перетворення Фур'є за координатами. Тоді одержимо:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2C^*} \times \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i \neq j=1}^2 \frac{Q_{nm} Z_j(\tau') \text{Bi}^+}{\rho_j - \rho_i} \left[ (C_3 \rho_j - g_4) - (C_2 \rho_j - g_2) \right] \sin \frac{\pi n}{a} x \sin \frac{\pi m}{b} y, \\ T_2 &= \frac{1}{2C^*} \times \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i \neq j=1}^2 \frac{Q_{nm} Z_j(\tau') \text{Bi}^+}{\rho_j - \rho_i} \left[ (C_1 \rho_j - g_1) - (C_2 \rho_j - g_3) \right] \sin \frac{\pi n}{a} x \sin \frac{\pi m}{b} y, \end{aligned} \quad (11)$$

де

$$Q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b t_c(x, y) \sin \frac{\pi n}{a} x \sin \frac{\pi m}{b} y dx dy; \quad (12)$$

$$Z_j(\tau') = \int_0^{\tau'} t^+(v) e^{-\rho_j(\tau'-v)} dv, \quad (j=1,2); \quad (13)$$

$$g_1 = \Lambda_1 (\mu_n^2 + \mu_m^2) + \text{Bi}_1; \quad g_2 = g_3 = \Lambda_2 (\mu_n^2 + \mu_m^2) + \text{Bi}_2; \quad g_4 = \Lambda_3 (\mu_n^2 + \mu_m^2) + \text{Bi}_1 + \Lambda_1;$$

$$\text{Bi}_j = \frac{1}{2} (\text{Bi}^+ - (-1)^j \text{Bi}^-), \quad (j=1,2); \quad \text{Bi}^+ = \frac{\alpha^+ h}{\lambda_0}; \quad \text{Bi}^- = \frac{\alpha^- h}{\lambda_0}; \quad \mu_n = \frac{h \pi n}{a}; \quad \mu_m = \frac{h \pi m}{b};$$

$$\tau' = \frac{\lambda_0}{c_v^0 h^2} \tau; \quad C^* = C_1 C_3 - (C_2)^2; \quad \{\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3\} = \frac{1}{2h\lambda_0} \{A^\lambda, B^\lambda, D^\lambda\};$$

$$\{C_1, C_2, C_3\} = \frac{1}{2hc_v^0} \{A^c, B^c, D^c\};$$

$\lambda_0$  і  $c_v^0$  – деякі характерні коефіцієнти теплопровідності і теплоємності, відповідно;  $-\rho_1$  і  $-\rho_2$  – корені квадратного рівняння  $C^* \rho^2 + [C_1 g_4 + C_3 g_1 - C_2 (g_3 + g_2)] \rho + g_1 g_4 - g_2 g_3 = 0$ , які, як випливає з числового аналізу, є дійсними.

Розв'язок системи рівнянь рівноваги (4), який задовольняє крайові умови (6) і (8), за відомого температурного поля (11) знаходимо також методом скінченних подвійних перетворень Фур'є. Тоді вирази для узагальнених переміщень матимуть вигляд

$$\{u_1, \gamma_1\} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \{U_{1nm}, \Gamma_{1nm}\} \cos \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b},$$

$$\{u_2, \gamma_2\} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \{U_{2nm}, \Gamma_{2nm}\} \sin \frac{\pi n x}{a} \cos \frac{\pi m y}{b},$$

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{nm} \sin \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b}, \quad (14)$$

де коефіцієнти Фур'є  $U_{1nm}, U_{2nm}, W_{nm}, \Gamma_{1nm}, \Gamma_{2nm}$  знаходимо з матричного рівняння за формулою  $\mathbf{U} = \frac{1}{|\mathbf{M}|} \mathbf{M}^* (\mathbf{V} T_{1mn} + \mathbf{S} T_{2mn})$ . Тут  $\mathbf{U} = \{U_{1nm}, U_{2nm}, W_{nm}, \Gamma_{1nm}, \Gamma_{2nm}\}^T$ ;  $\mathbf{M} = (m_{ij})_{5 \times 5}$ ;  $\mathbf{V} = (v_i)_{5 \times 1}$ ;  $\mathbf{S} = (s_i)_{5 \times 1}$ ;  $\mathbf{M}^*$  – приєднана матриця;  $|\mathbf{M}|$  – її визначник. Коефіцієнти матриць  $m_{ij}, v_i$  і  $s_j$  обчислюємо зі системи (4).

За відомими узагальненими переміщеннями зусилля і моменти визначаємо зі співвідношень (5).

3. **Числовий приклад. Аналіз результатів.** Числові дослідження виконували для пластини, зовнішня поверхня  $z = +h$  якої нагрівається середовищем з температурою, заданою функцією

$$t_z^+(x, y, \tau) = t^* [S_-(x - (x_0 - a_0)) - S_+(x - (x_0 + a_0))] e^{-\beta^* \tau}, \quad (15)$$

де  $S_{\pm}(x)$  – асиметричні одиничні функції [3];  $2a_0$  – ширина смуги нагріву;  $x_0$  – координата її середини;  $t^*, \beta^* = \text{const}$ .

Зі співвідношень (12), (13) і (15) одержуємо вирази для коефіцієнтів Фур'є  $Q_{nm}$  і функції часу  $Z_j(\tau')$

$$Q_{nm} = \frac{8t^*}{mn\pi^2} (1 - \cos \pi m) \sin \frac{\pi n a_0}{a} \sin \frac{\pi n x_0}{a}, \quad Z_j(\tau') = \frac{1}{\beta^* - \rho_j} (e^{-\beta^* \tau'} - e^{-\rho_j \tau'}).$$

Пластина виготовлена з композиту метал (Ti-6Al-4V)–кераміка (ZrO<sub>2</sub>) з такими фізико-механічними характеристиками [6]:

**метал:**  $\nu = 0.298$ ;  $E_m = 105.802 \text{ GPa}$ ;  $\alpha_m^t = 6.958 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$ ;  $\lambda_m = 6.08 \text{ W/mK}$ ;  $c_m = 5.56 \cdot 10^6 \text{ J/m}^3 \text{ K}$ ;

**кераміка:**  $\nu = 0.298$ ;  $E_c = 168.4 \text{ GPa}$ ;  $\alpha_c^t = 18.48 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$ ;  $\lambda_c = 1.775 \text{ W/mK}$ ;  $c_c = 1.25 \cdot 10^6 \text{ J/m}^3 \text{ K}$ .

Значення інших параметрів такі:  $h/a = 0.05$ ;  $a/b = 1$ ;  $k' = 5/6$ ;  $E_0 = E_m$ ;  $\alpha_0^t = \alpha_m^t$ ;  $\lambda_0 = \lambda_m$ ;  $c_0 = c_m$ ;  $a_0/a = 0.25$ ;  $x_0 = a/2$ ;  $\beta^* = 1$ ;  $\text{Vi}^+ = 0.5$ ;  $\text{Vi}^- = 2$ .

Вважатимемо, що залежність модуля Юнга  $E(z)$ , коефіцієнта лінійного температурного розширення  $\alpha^t(z)$ , коефіцієнта теплопровідності  $\lambda(z)$  і коефіцієнта теплоємності  $c_v(z)$  від поперечної координати описує рівняння (1), а коефіцієнт Пуассона  $\nu = \text{const}$ .

Обчислили безрозмірні температуру  $t' = \frac{t(h)}{t^*}$ , радіальні прогини

$W = \frac{W}{ht^* \alpha_0^t}$ , нормальні зусилля  $N_j' = \frac{N_j}{t^* h E_0 \alpha_0^t}$ , ( $j = 1, 2$ ), згинні моменти

$M_j' = \frac{M_j}{t^* h^2 E_0 \alpha_0^t}$ , ( $j = 1, 2$ ) у центрі ділянки нагріву.

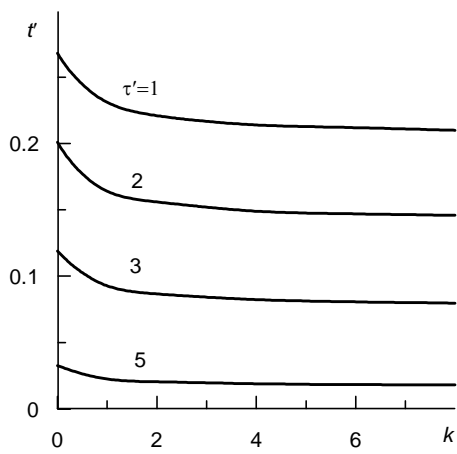


Рис. 1

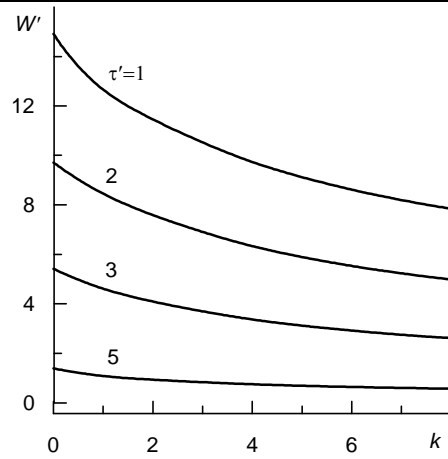


Рис. 2

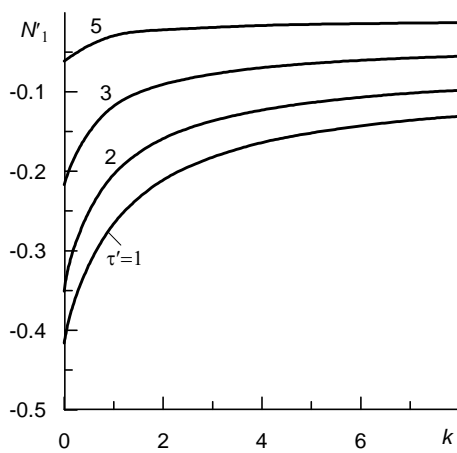


Рис. 3

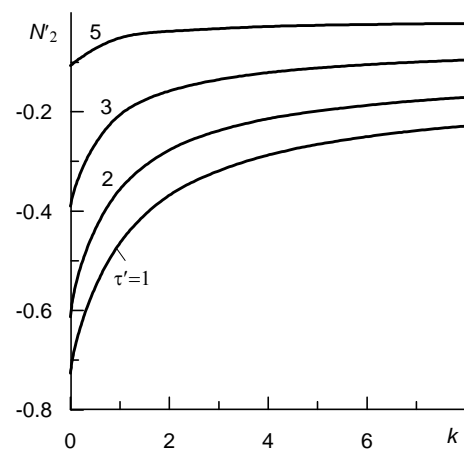


Рис. 4

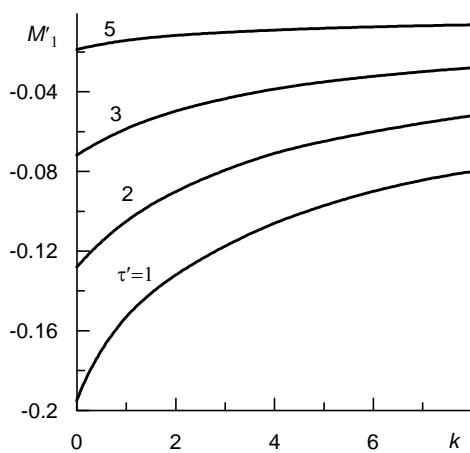


Рис. 5

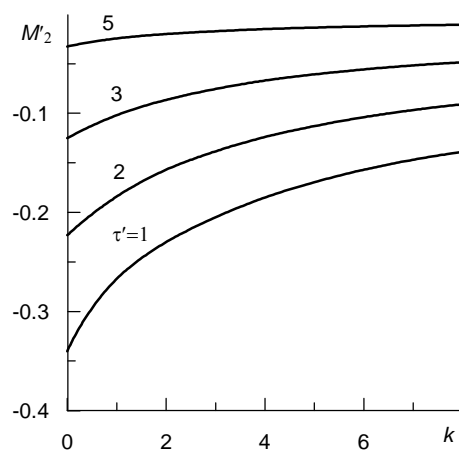


Рис. 6

Залежність цих величин від параметра неоднорідності  $K$  за відсутності початкових зусиль ( $N_1^0 = N_2^0 = 0$ ) для безрозмірного часу  $\tau' = 1; 2; 3$  і 5 ілюструють рис. 1–6.

Як бачимо, зусилля і моменти є від'ємні і найбільших значень досягають у центрі смуги нагріву в початкові моменти часу. Зі збільшенням параметра неоднорідності вони стають меншими. З плином часу вплив цього параметра слабшає, причому для температури – найвідчутніше.

У таблиці наведено температуру та напружено-деформований стан пластини для  $\tau' = 1$ ,  $N_2^0 = 0$ , різних значень безрозмірного початкового нормального зусилля  $N_1^0 = \frac{N_1^0}{E_0 h} = -0.02; 0; 0.02$ , а також параметра неоднорідності  $k = 0; 2$  і  $\infty$ .

	$k = 0$			$k = 2$			$k = \infty$		
$N_1^0 \rightarrow$	-0.02	0	0.02	-0.02	0	0.02	-0.02	0	0.02
$t'$	0.2683	0.2683	0.2683	0.2214	0.2214	0.2214	0.2053	0.2053	0.2053
$w'$	17.685	14.917	12.875	14.412	11.456	9.4803	4.7807	3.5957	2.8702
$N_1'$	-0.4160	-0.4160	-0.4150	-0.2111	-0.2110	-0.2110	-0.0869	-0.0869	-0.0869
$N_2'$	-0.7259	-0.7259	-0.7259	-0.3684	-0.3683	-0.3683	-0.1517	-0.1517	-0.1517
$M_1'$	-0.0565	-0.1950	-0.2979	-0.0199	-0.1321	-0.2081	0.0073	-0.0298	-0.0528
$M_2'$	-0.2086	-0.3399	-0.4368	-0.1239	-0.2306	-0.3020	-0.0167	-0.0520	-0.0737

Зі збільшенням параметра неоднорідності від нуля (чиста кераміка) до нескінченності (чистий метал) моменти і зусилля зменшуються, оскільки модуль пружності металу менший, ніж кераміки. Початкові напруження суттєво впливають на прогини та згинні моменти, а нормальні зусилля не змінюються. Очевидно, через розтягувальні зусилля пластини стає жорсткішою.

**Висновки.** На основі рівнянь лінійної зсувної теорії першого порядку з п'ятьма степенями свободи розвинуто методику розв'язування задач теплопровідності та термопружності для неоднорідних за товщиною пластин, які нагріваються довшіллям шляхом теплообміну через бокові поверхні за законом Ньютона. Досліджено вплив коефіцієнта неоднорідності, параметра часу, а також сталого однорідного початкового напруження на напружено-деформований стан та температурне поле пластини. Встановлено, що, змінюючи початкове напруження і неоднорідність матеріалу, можна суттєво впливати на напружено-деформований стан, який виникає в тонкостінній конструкції внаслідок нагрівання.

- 1 Жидик У. В., Флячок В. М. Термопружний аналіз неоднорідних анізотропних пластин // Наук. нотатки. – Луцьк, ЛНТУ, – 2011. – Вип. 33. – С. 281–287.
- 2 Жидик У. В., Флячок В. М. Термопружний згин шаруватих анізотропних пластин симетричної структури // Квалілогія книги. – 2017. – № 2(32). – С. 77–81.
- 3 Коляно Ю. М. Методи теплопровідності та термопружності неоднорідних тіл. – Київ: Наук. думка, 1992. – 280 с.
- 4 *Encyclopedia of Thermal Stresses* / R. Hetnarski (ed.). – Dordrecht: Springer, 2014. – Vol. 11. – P. 5835–6643.
- 5 Houari M.S.A., Benyoucef S., Mechabl., Tounsi A., Bedia E.A.A. Two-variable refined plate theory for thermoelastic bending analysis of FG sandwich plates // *J. Thermal Stresses*. – 2011. – 34, No. 1. – P. 315–334.

- 6 Javaheri R., Eslami M. R. Thermal buckling of functionally graded plates // AIAA J. – 2002. – 40, No. 1. – P. 162–169.
- 7 Manthena V. R., Kedar G. D. On thermoelastic problem of a thermosensitive functionally graded rectangular plate with instantaneous point heat source // J. Thermal Stresses. – 2019. – 42, No. 7. – P. 849–862.
- 8 Manthena V. R., Lamba N. K., Kedar G. D. Transient thermoelastic problem of a nonhomogeneous rectangular plate // J. Thermal Stresses. – 2017. – 40, No. 5. – P. 627–640.
- 9 Mirsky I. Vibrations of orthotropic thick cylindrical shells // J. Acoust. Soc. Am. – 1964. – 36, No. 1. – P. 41–51.
- 10 Naik N. S., Sayyad A. S. An accurate computational model for thermal analysis of laminated composite and sandwich plates // J. Thermal Stresses. – 2019. – 42, No. 5. – P. 559–579.
- 11 Qjuhua L., Hou P., Shang S. Three-dimensional exact analytical solutions of transversely isotropic plate under heat sources // J. Thermal Stresses. – 2021. – 44, No. 11. – P. 1324–1348.
- 12 Swaminathan K., Sangeetha D. M. Thermal analysis of FGM plates – a critical review of various modeling techniques and solution methods // Compos. Struct. – 2017. – 160, No. 1. – P. 43–60.
- 13 Thai H. T., Kim S. E. A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and shells // Compos. Struct. – 2015. – 128, No. 1. – P. 70–86.
- 14 Varelis D., Saravanos D. A. A coupled nonlinear plate finite element for thermal buckling and postbuckling of piezoelectric composite plates including thermomechanical effects // J. Thermal Stresses. – 2022. – 45, No. 1. – P. 30–50.
- 15 Vel S. S., Batra R. C. Three-dimensional analysis of transient thermal stresses in functionally graded plates // Inter. J. Solids and Struct. – 2003. – 40. – P. 7181–7196.
- 16 Zenkour A. M. Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates // Appl. Mathematical Modelling. – 2006. – 30. – P. 67–84.
- 17 Zenkour A. M., Alghamdi N. A. Bending analysis of functionally graded sandwich plates under the effect of mechanical and thermal loads // Mech. Adv. Mat. Struct. – 2010. – 17, No. 6. – P. 419–432.
- 18 Zghal S., Trabelsi S., Frikha A., Dammak F. Thermal free vibration analysis of FG plates and panels with an improved finite shell element // J. Thermal Stresses. – 2021. – 44, No. 3. – P. 315–341.

#### **BENDING OF THE FUNCTIONAL-GRADIENT PLATE UNDER NON-STATIONARY HEATING AND INITIAL STRESS**

*The thermoelastic behavior of a rectangular isotropic functional-gradient plate, which, being initially in a plane stress state, is unsteadily heated by the medium due to convective heat exchange, has been investigated. For this, the five-modal mathematical model of the shear theory of thermoelasticity and the two-dimensional equations of thermal conductivity of heterogeneous isotropic plates were used. Using the methods of Fourier and Laplace integral transformations, the solution of the non-stationary problem of thermal conductivity and the quasi-static problem of thermoelasticity for a finite hinged plate supported on the edges is found. Numerical results are given for a heterogeneous ceramic-metal composite.*

*Keywords:* thermoelasticity, temperature load, heat exchange, heterogeneous plates.