

## ЧИСЛОВЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

*Розв'язано нелінійну початково-крайову задачу теплопровідності з використанням методів Рунге, лінеаризації, стрільби та Рунге–Кутта четвертого порядку. Наведено результати числових досліджень. Проаналізовано вплив кроку за часом на кількість ітерацій методу лінеаризації.*

**Ключові слова:** нелінійна початково-крайова задача, лінеаризація, методи Рунге, стрільби та метод Рунге–Кутта четвертого порядку.

**Вступ.** Нелінійні початково-крайові задачі, описані нелійними диференціальними рівняннями в часткових похідних, часто трапляються, коли моделюють задачі в різних галузях науки і техніки (динаміка польоту літальних об'єктів, термомеханіка, оптимальне керування, ядерна фізика, астрофізика, квантова механіка, електрогідродинаміка тощо). Нелінійні задачі не мають аналітичного розв'язку і для їх розв'язування використовують числові методи [1, 3, 5–7 та ін.]. Аналітично-числові методи розглянуті у працях [4, 9].

Нижче на прикладі одновимірної задачі теплопровідності зі залежним від температури коефіцієнтом теплопровідності  $\kappa(u) = \kappa_0 \Lambda(u)$  і сталими щільністю  $\rho$  і теплоємністю  $c_p$  проілюструємо методику розв'язання нелінійних початково-крайових задач.

**1. Формулювання задачі і її розв'язання.** Нелінійна одновимірна нестационарна задача теплопровідності має вигляд [6, 10]

$$\begin{aligned} \kappa^* \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= \partial_u \Lambda(u(x, t)) \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2 + \Lambda(u(x, t)) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) &= \overline{u_0}(x), \quad x \in [a, b], \\ u(a, t) &= u_1(t), \quad u(b, t) = u_2(t), \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут  $\kappa^* = \frac{\rho c_p}{\kappa_0}$ ,  $\overline{u_0}(x)$ ,  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  – задані неперервні функції. Якщо  $\Lambda(u)$  константа, то задача (1) є лінійною. Нелінійну початково-крайову задачу (1) розв'язуємо за такою схемою.

Застосовуючи метод Рунге [6], отримуємо таку послідовність нелінійних диференціальних рівнянь

$$\kappa^* \frac{u_n(x) - u_{n-1}(x)}{\tau} = \partial_u \Lambda(u_n(x)) (\partial_x u_n(x))^2 + \Lambda(u_n(x)) \partial_{xx} u_n(x) \quad (2)$$

з крайовими умовами

$$u_n(a) = u_1(t_n), \quad u_n(b) = u_2(t_n). \quad (3)$$

Тут  $t_n = n\tau$ ,  $n = \overline{1, N}$ ;  $\tau = \frac{T}{N}$ ,  $N$  – кількість розбиттів;  $u_n(x)$  – невідомі функції;  $u_{n-1}(x)$  – функції, знайдені на попередньому кроці;  $u_0$  – задане.

Для розв'язання нелінійних крайових задач (2), (3) застосовуємо метод лінеаризації [2], згідно з яким одержимо рівняння

---

✉ v.shuflyak@gmail.com

$$\begin{aligned}
u_{k+1}''(x) = & \partial_{u_k} \left( \frac{\Lambda'(u_k(x))(u_k'(x))^2}{\Lambda(u_k(x))} \right) (u_{k+1}(x) - u_k(x)) - \\
& - \partial_{u_k} \left( \frac{u_k(x) - u_{n-1}(x)}{\tau\Lambda(u_k(x))} - \frac{\Lambda'(u_k(x))(u_k'(x))^2}{\Lambda(u_k(x))} \right) (u_{k+1}'(x) - u_k'(x)) + \\
& + \frac{u_k(x) - u_{n-1}(x)}{\tau\Lambda(u_k(x))} - \frac{\Lambda'(u_k(x))(u_k'(x))^2}{\Lambda(u_k(x))}
\end{aligned} \quad (4)$$

і крайові умови

$$u_{k+1}(a) = \alpha, \quad u_{k+1}(b) = \beta, \quad (5)$$

де  $k$  – номер ітерації;  $\alpha$  і  $\beta$  вибираємо, як у праці [6].

Значення  $u_k'(x_i)$  обчислюємо за формулою

$$u_k'(x_i) \approx \frac{u_k(x_{i+1}) - u_k(x_{i-1}))}{2h},$$

де  $x_i = a + ih$ ,  $i = 0, \dots, h = \frac{b-a}{M}$ ,  $M$  – кількість розбиттів відрізка  $[a, b]$ .

Задачу (4), (5) розв'язуємо методом стрільби за таким алгоритмом[8]:

1. Якщо  $n = 0$ , задаємо початкове наближення  $s_0 \in \mathbb{R}$  для  $u_{k+1}'(a)$ .

2. Розв'язуємо задачу Коші, яку описує рівняння (4) з крайовими умовами

$$\begin{aligned}
u_{k+1}(a) &= \alpha, \\
u_{k+1}'(a) &= s_n.
\end{aligned}$$

3. Розв'язуємо допоміжну задачу Коші:

$$\begin{aligned}
v'' &= f_{u_{k+1}}(x, u_{k+1}(x, s), u_{k+1}'(x, s))v(x, s) + \\
& + f_{u_{k+1}'}(x, u_{k+1}(x, s), u_{k+1}'(x, s))v(x, s), \quad a < x < b, \\
v(a, s) &= 0, \\
v(a, s) &= 1,
\end{aligned}$$

де  $f$  – права частина рівняння (4).

4. Якщо  $\|u_{k+1}(b) - \beta\| < \varepsilon$ , то зупинити ітераційний процес, в іншому випадку замінити  $s$  на нове значення

$$s_{n+1} = s_n - \frac{u_{k+1}(b, s_n) - \beta}{v(b, s_n)}$$

і перейти на крок 2.

Зазначені задачі Коші для диференціальних рівнянь другого порядку, ввівши позначення  $u' = z$ , зводимо до задач Коші для системи диференціальних рівнянь першого порядку :

$$\begin{aligned}
z' &= f(x, u, z), \quad a < x < b, \\
u(a) &= \alpha, \\
z(a) &= s.
\end{aligned} \quad (6)$$

Для числового розв'язання задачі (6) застосуємо метод Рунге–Кутта четвертого порядку [8]. Тоді

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3),$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{h}{6}(q_0 + 2q_1 + 2q_2 + q_3).$$

Тут значення  $k_0, k_1, k_2, k_3, q_0, q_1, q_2, q_3$  знаходимо за формулами [8]

$$q_0 = f(x_i, u_i, z_i),$$

$$k_0 = z_i,$$

$$q_1 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, u_i + k_0 \frac{h}{2}, z_i + q_0 \frac{h}{2}\right),$$

$$k_1 = z_i + q_0 \frac{h}{2},$$

$$q_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, u_i + k_1 \frac{h}{2}, z_i + q_1 \frac{h}{2}\right),$$

$$k_2 = z_i + q_1 \frac{h}{2},$$

$$q_3 = f(x_i + h, u_i + k_2 h, z_i + q_2 h),$$

$$k_3 = z_i + q_2 h.$$

2. **Числові результати.** Дослідження виконували при  $T = 15$ ,  $M = 128$ ,  $N = 30$ ,  $\bar{u}_0(x) = 2 - \frac{x-1}{2} + (x-1)(x-3)$ ,  $x \in [1, 3]$ ,  $u_1(t) = 2$ ,  $u_2(t) = 1$ ,  $\varepsilon = 10^{-8}$  та використали залежність  $\Lambda(u) = e^{\lambda u}$ , що відповідає кремнію [6].

У цьому випадку задача (4),(5) матиме вигляд

$$u''_{k+1} = \left( \frac{\kappa^* - \lambda \kappa^* u_k + \lambda \kappa^* u_{n-1}}{\tau e^{\lambda u_k}} \right) (u_{k+1} - u_k) -$$

$$- 2\lambda u'_k (u'_{k+1} - u'_k) + \frac{\kappa^* u_k}{\tau e^{\lambda u_k}} - \lambda (u'_k)^2 - \frac{\kappa^* u_{n-1}}{\tau e^{\lambda u_k}},$$

$$u_{k+1}(1) = 2, u_{k+1}(3) = 1, t \in [0, T].$$

На рис. 1–3 наведено зміну температури відносно  $x$  при  $\kappa^* = 10$  для моментів часу  $t = 0; 5; 10; 15$  і значень  $\lambda = -1$  (рис. 1),  $0$  (рис. 2), та  $1$  (рис. 3).

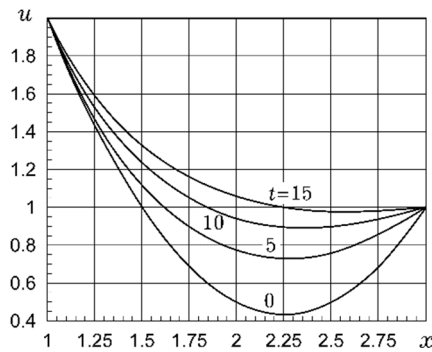


Рис. 1

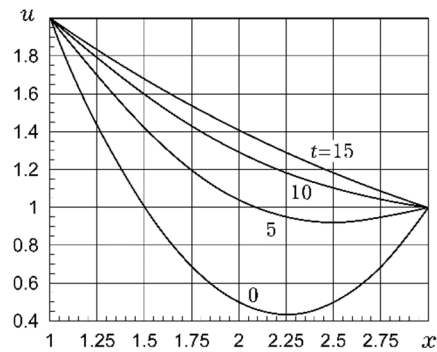


Рис. 2

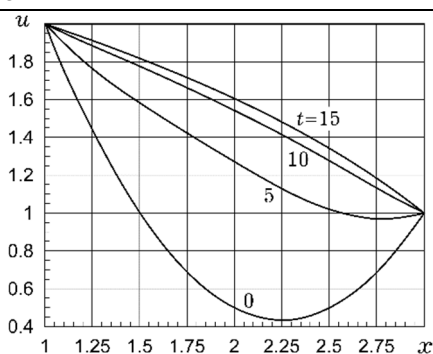


Рис. 3

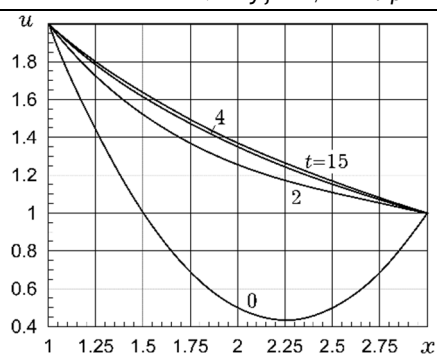


Рис. 4

Виявили, що при  $\lambda = 0$  та за великих  $t$  розподіл є лінійним. Проте за інших значень  $\lambda$  – параболічний. Якщо  $\lambda < 0$ , вітки цих парабол напрямлені вгору, а при  $\lambda > 0$  з певного моменту часу – вниз. На серединній поверхні, в кінцевий момент часу, якщо  $\lambda = -1$ , температура нижча на 27%, а при  $\lambda = 1$  – вища на 14%, ніж за умови, коли  $\lambda = 0$ . Зазначимо, що графіки на рис. 1–3 збігаються з наведеними у праці [6], побудованими на основі розв'язку методом скінченних різниць відповідної задачі.

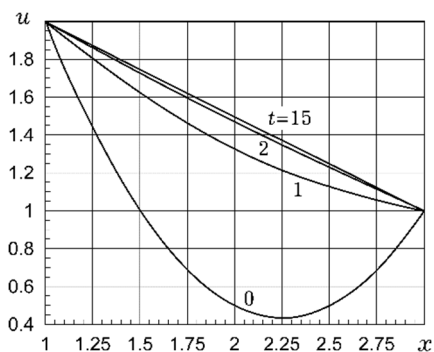


Рис. 5

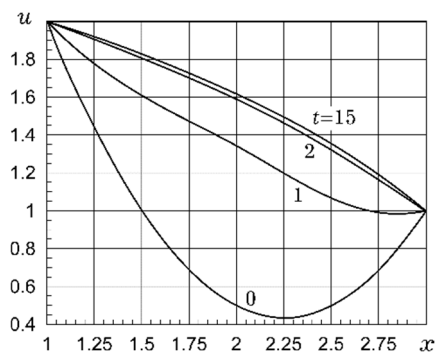


Рис. 6

Рис. 4–6 ілюструють зміну температури відносно  $x$  при  $\kappa^* = 0.5$  для моментів часу  $t = 0; 2; 4; 15$  (рис. 4);  $0; 1; 2; 15$  (рис. 5, 6) і значень  $\lambda = -1$  (рис. 4);  $0$  (рис. 5) та  $1$  (рис. 6).

Як бачимо, зі зменшенням параметра  $\kappa^*$  значення  $u(x)$  на одних і тих же поверхнях, в однакові моменти часу збільшилися та набагато швидше досягають стаціонарного значення. Зокрема, на серединній поверхні відповідні значення температури в моменти часу  $t = 5$  (рис. 3) і  $1$  (рис. 6) приблизно рівні. При цьому  $\kappa^*$  на серединній поверхні, в кінцевий момент часу, якщо  $\lambda = -1$  температура нижча на 7%, а коли  $1$  – вища на 6%, ніж при  $\lambda = 0$ . Напрявленія віток аналогічне, як при  $\kappa^* = 10$ .

Досліджували загальну кількість ітерацій методу лінеаризації при  $\kappa^* = 10$  залежно від зміни  $\tau$ . У таблиці наведено кількість ітерацій  $N_i^*$ , похибка та середня кількість ітерацій  $N_j^*$ .

$\tau$	$N^*$	$\ u_k - u_{k-1}\ $	$N_i^*$
1	61	7.0919e-09	4.06
0.5	115	9.6339e-09	3.83
0.1	508	9.6789e-09	3.39

Зі зменшенням  $\tau$  середня кількість ітерацій на одному часовому проміжку зменшується. Отже, можна стверджувати, що чим менше  $\tau$ , то швидше досягається задана точність на одному часовому проміжку.

На рис. 7; 8 подано залежність кількості ітерацій від часу для  $\tau = 0.1$  і 1, відповідно.

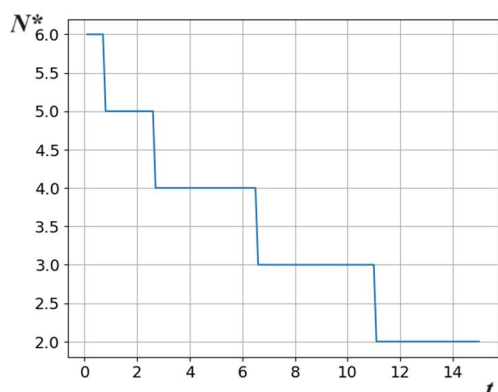


Рис. 7

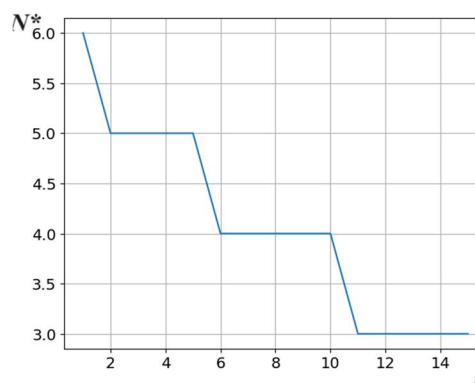


Рис. 8

З цих графіків випливає, що чим ближче значення часу до  $T$ , то менше потрібно ітерацій, щоб отримати розв'язок нелінійної крайової задачі. За малого  $\tau$  з певного моменту потрібно лише дві ітерації, оскільки на них значення  $u(x)$  відрізняються несуттєво.

**Висновки.** Нелінійну початково-крайову задачу теплопровідності зведено до послідовності нелінійних крайових задач, які розв'язано одно-кроковим методом лінеаризації. Для розв'язання крайових задач з лінійними крайовими умовами використано метод стрільби. Задачі Коші, які при цьому виникли, розв'язано методом Рунге–Кутта четвертого порядку. Проаналізовано вплив експоненціальної залежності коефіцієнта теплопровідності на температуру. Зокрема, зі зміною знака аргументу в цій залежності змінюється з певного моменту часу характер поведінки температури. Встановлено, що чим менший крок за часом, то менша середня кількість ітерацій методу лінеаризації в один часовий момент.

1. Волонтир Л. О., Зелінська О. В., Потапова Н. А., Чіков І. А. Чисельні методи: Навч. посіб. – Вінниця: Вид-во Вінницьк. нац. аграрного ун-ту, 2020. – 322 с.
2. Григоренко Я. М., Панкратова Н. Д. Обчислювальні методи в задачах прикладної математики: Навч. посіб. – Київ: Либідь, 1995. – 280 с.
3. Задачин В. М., Конюшенко І. Г. Чисельні методи. – Харків: Вид-во Харківськ. нац. економічного ун-ту ім. С. Кузнеця, 2014. – 180 с.
4. Кушнір Р. М., Попович В. С. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра. Т. 3: Термопружність термочутливих тіл. – Львів: СПОЛОМ, 2009. – 412 с.
5. Самарский А. А., Гудин А. В. Численные методы: Уч. пос. для вузов. – Москва: Наука, 1989. – 432 с.
6. Filipov S., Farago I. Implicit Euler time discretization and FDM with Newton method in nonlinear heat transfer modeling // Inter. sci. j. Mathematical modeling. – 2018. – 2, Iss. 3. – P. 94–98.
7. Ingole K. A Review of Heat Transfer Using Finite Element Method for Varied Concepts // J. of Industrial Mech. - 2021. – 6, Iss. 2. – P. 7–14.

8. Kress R. Numerical analysis / R. Kress. – New York: Springer, 1998.–328 p.
9. Kushnir R. M., Popovych V. S., Protsyuk B. V. On the Development of Investigations of the Thermomechanical Behavior of Thermally Sensitive Bodies // J. of Mathematical Sci. – 2019. – 236, No. 1.– P. 1–20.
10. Yu J., Yang Y., Campo A. Approximate Solution of the Nonlinear Heat Conduction Equation in a Semi-Infinite Domain // Mathematical Problems in Engineering. – 2010. – <https://doi.org/10.1155/2010/421657>.

#### NUMERICAL SOLUTION OF NONLINEAR INITIAL BOUNDARY PROBLEMS

*The nonlinear initial boundary value problem of heat conduction was solved using the methods of Rothe, linearization, shooting method, and fourth-order Runge–Kutta. The numerical research results are provided. The influence of the time step on the number of iterations of the linearization method has been analyzed.*

*Keywords: nonlinear initial boundary value problem, linearization, Rothe method, shooting method, Runge–Kutta method of the fourth order.*

<sup>1</sup> Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

<sup>2</sup> Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів