https://doi.org/10.15407/apmm2023.21.91-107

УДК 514, 515.1

Г. М. Возняк, О. Г. Возняк ✉

ПОБУДОВА МІНІМАЛЬНОЇ СІТКИ СПОЛУЧЕННЯ ТРЬОХ ТА ЧОТИРЬОХ ОБ’ЄКТІВ, ДОВІЛЬНО РОЗМІЩЕНИХ НА ПЛОЩИНІ

Розглянуто оптимальні задачі, пов’язані з побудовою найкоротшої сітки ліній сполучення деякої кількості об’єктів, розміщених на площині. Загалом задано систему точок (об’єктів) і побудовано мінімальну сітку ліній, яка їх з’єднує. Розроблено та обґрунтовано способи побудови найкоротшої лінії, яка з’єднує певні об’єкти. Побудовано оптимальні схеми сполучення об’єктів з використанням доведених теорем. Запропоновано способи сполучення об’єктів, розміщених у вершинах многокутника.

***Ключові слова**: точка Торрічеллі, мінімальна сітка, математична модель, оптимальні лінії, вузлові точки, сумарні відрізки, алгоритм, геометричні перетворення.*

Аналіз проблеми. Серед транспортних задач важливі ті, що стосуються найраціональніших оптимальних способів побудови дорожніх, електричних шляхів сполучення, водопровідних, каналізаційних, газопровідних ліній тощо. На початку 19-го століття швейцарський геометр Якоб Штейнер (1796–1863) досліджував проблему мінімізації загальної протяжності доріг, які з’єднують три пункти з четвертим. Наприклад, потрібно три пункти A, B і C з’єднати системою доріг так, щоб загальна протяжність побудованих доріг була мінімальною. Конкретніше математично проблему Штейнера можна сформулювати так.

У площині задано три точки A, B і C. Знайти на ній четверту точку D так, щоб сума довжин $AD+BD+CD$ була мінімальною.

Загальна проблема Штейнера для n точок A_1, A_2, A_3, …, A_n, заданих на площині, призвела до дивних результатів. Якщо шукати одну – єдину точку D на площині, для якої сума $A_1D+A_2D+A_3D+\ldots+A_nD$ була б мінімальною, то таке узагальнення не призводить до практично корисних результатів. Пізніше проблемою Штейнера займався німецький математик Курант Ріхтер (1888–1972). Мінімальну сітку сполучення для трьох точок, розміщених у вершинах довільного трикутника, він побудував і обґрунтував у книзі «Що таке математика» [3, с. 354–361]. Якщо задані точки є вершинами опуклого чотирикутника $ABCD$, то розв’язування немовби елементарне: шуканою є точка O перетину його діагоналей, але сума відрізків $AO+BO+CO+DO$ для точок A, B, C і D опуклого чотирикутника не є мінімальною сіткою сполучення чотирьох об’єктів. Далі цей факт доведемо.

На сьогодні розроблені деякі схеми мінімальної сітки сполучення об’єктів (точок), розміщених у вершинах квадрата та прямокутника, але без обґрунтувань. Побудував мінімальну сітку сполучення об’єктів, розміщених у вершинах квадрата, за двома схемами польський математик Гуго Штейнгауз (1887–1972) [4, с. 35, 146–149]. Тому доцільно розглянути конкретні схеми та математичні моделі (у вигляді математичних формул та геометричних фігур) мінімальних ліній сполучення об’єктів, розміщених не тільки у вершинах квадрата і прямокутника, а й і у вершинах довільних чотирикутників і многокутників, та подати способи їх побудови.

✉ voznyak.o.g@gmail.com

Маючи мінімальні сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах довільних многокутників, можна будувати мінімальні лінії сполучення в практичній діяльності. Під поняттям точки маємо на увазі будь-який об'єкт, під поняттям відрізок чи ламана – електричні лінії, шосейні дороги, водопроводи, каналізації, сполучення елементів монтажу різних конструкцій тощо.

Мета дослідження – знайти за допомогою точки Торрічеллі та деяких теорем і властивостей мінімальної сітки способу сполучення довільно розміщених трьох та чотирьох об'єктів на площині, намітити перспективи побудови мінімальної сітки сполучення більшої кількості об'єктів, розміщених на площині.

Виклад основного матеріалу. Нехай маємо n точок A_1, A_2, A_3, ..., A_n, розміщених в одній площині. Потрібно їх з'єднати відрізками, або ламаною лінією так, щоб:

а) *будь-які дві точки зі заданих були зв'язані відрізком, або ламаною* (вершини ламаної можуть і не бути заданими точками);

б) *сума довжин відрізків сітки була мінімальною.*

Систему відрізків ламаної, яка задовольняє ці умови, називатимемо ***мінімальною сіткою.*** Точку, в якій з'єднуються декілька відрізків – ***вузловою точкою***.

1. **Побудова мінімальної сітки сполучення трьох точок (об'єктів), розміщених на площині**.

Почнемо з найпростіших випадків. Візьмемо спочатку три точки A_1, A_2 і A_3. Вважатимемо, що вони не лежать на одній прямій, оскільки, коли б лежали, то мінімальною сіткою сполучення був би відрізок, який з'єднує крайні точки.

Загалом для побудови мінімальної сітки сполучення трьох заданих точок достатньо знайти точку Торрічеллі, яка з точками A_1, A_2, A_3 з'єднана відрізками.

Точкою Торрічеллі називають точку, сума відстаней якої від трьох заданих точок є мінімальною.

Геометричне місце точки Торрічеллі та побудова мінімальної сітки сполучення трьох об'єктів, розміщених у вершинах довільного трикутника, чіткіше викладені методом геометричних перетворень, який у компактному вигляді поданий у доведенні наступного твердження – теореми.

Теорема 1. *Якщо на сторонах A_1A_2 і A_2A_3 трикутника $A_1A_2A_3$, в якому кожний кут менший від 120°, побудувати рівносторонні трикутники $A_1A_2A_2'$ і $A_2A_3A_3'$, то точка M перетину відрізків A_1A_3' і $A_2'A_3$ буде точкою Торрічеллі.*

Д о в е д е н н я. Згідно з умовою теореми, візьмемо три довільні точки A_1, A_2 і A_3 так, щоб кожний із кутів трикутника $A_1A_2A_3$ був менший від 120°. Нехай D – довільна внутрішня точка трикутника $A_1A_2A_3$ (рис. 1). Тоді, згідно з вимогою теореми, вона має бути такою, щоб сума відстаней $A_1D + A_2D + A_3D$ була мінімальною. З цією метою повернемо трикутник A_1A_2D навколо точки A_1 на 60° проти годинникової стрілки. Отримаємо трикутник $A_1A_2'D_1$, який рівний трикутнику A_1A_2D. Оскільки $A_1A_2 = A_1A_2'$, а кут між ними становить 60°, то трикутник $A_1A_2A_2'$ є рівностороннім. Його можемо вважати вписаним у коло, яке своїми вершинами ділить його на три

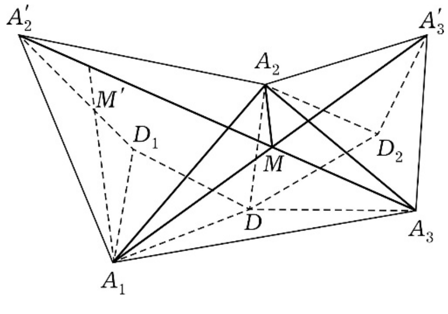

Рис. 1

рівні дуги, кожна з яких має 120°. Аналогічно можна довести, що трикутник A_1DD_1 є також рівностороннім. З того, що $A_1D = A_1D_1$, $A_2D = A_2'D_1$, випливає, що $A_1D + A_2D + A_3D = \; = A_2'D_1 + D_1D + DA_3$.

Оскільки ламана $A_2'D_1DA_3$ довша, ніж відрізок $A_2'A_3$, який з'єднує її кінці, то сума $A_2'D_1 + D_1D + DA_3 > A_2'A_3$. Отже, щоб сума $A_2'D_1 + D_1D + DA_3$ була мінімальною, потрібно, щоб точки D і D_1 лежали на відрізку $A_2'A_3$.

Аналогічно повернемо трикутник A_2DA_3 навколо точки A_2 на 60° проти годинникової стрілки, і дістанемо, що $A_1D + DD_2 + D_2A_3' > A_1A_3'$. Щоб сума $A_1D + DD_2 + D_2A_3'$ була мінімальною, потрібно, щоб точки D і D_2 належали відрізку A_1A_3'. З'єднаємо точки A_1 і A_3' відрізком A_1A_3'. Тоді точка Торрічеллі M лежатиме як на відрізку A_1A_3', так і на відрізку $A_2'A_3$, а сума $A_1M + A_2M + A_3M$ буде мінімальною, оскільки менша від будь-якої ламаної, яка з'єднує кінці відрізка $A_2'A_3$ [1, с. 135], що й треба довести.

Отже, алгоритмом побудови мінімальної сітки сполучення трьох об'єктів є геометричне перетворення трьох відрізків MA_1, MA_2, MA_3 у відрізок A_1A_3' (який менший від будь-якої ламаної, що з'єднує кінці відрізка A_1A_3'), довжина якого дорівнює сумі довжин цих відрізків. Щоб знайти довжину мінімальної сітки сполучення трьох об'єктів з четвертим, потрібно:

а) на стороні A_1A_2 трикутника $A_1A_2A_3$ побудувати рівносторонній трикутник $A_1A_2A_2'$;

б) вершину A_2' цього трикутника з'єднати відрізком з протилежною вершиною A_3 трикутника $A_1A_2A_3$.

Довжина відрізка $A_2'A_3$ дорівнює довжині мінімальної сітки сполучення трьох об'єктів, розміщених у вершинах трикутника з кутами, меншими від 120°.

Відрізок $A_2'A_3$ називатимемо ***сумарним відрізком мінімальної сітки сполучення трьох об'єктів***. Аналогічно, якщо на стороні A_2A_3 побудувати рівносторонній трикутник $A_2A_3A_3'$, то відрізок A_1A_3' буде також сумарним відрізком мінімальної сітки сполучення трьох об'єктів. А точка M перетину цих двох сумарних відрізків мінімальної сітки буде точкою Торрічеллі. Доцільно зауважити, що за повороту трикутника A_1MA_2 навколо точки A_1 на 60° проти годинникової стрілки отримуємо трикутник $A_1M'A_2'$, який рівний трикутнику A_1MA_2.

У такому випадку $\angle A_1MA_2 = \angle A_1M'A_2 = 120°$, бо суміжний з кутом $A_1M'A_2'$ кут $A_1M'M$ дорівнює 60°. Як бачимо, кут A_1MA_2 спирається на відрізок A_1A_2, а точка M належить дузі, що містить дугу A_1MA_2, яка має 120°. Аналогічно можна довести, що точка M належить дузі A_2MA_3, яка має 120°. Тому для побудови точки Торрічеллі M досить побудувати два сегменти, які спираються на відрізки A_1A_2 і A_2A_3, і кожний з них вміщає кут 120°.

Отже, *точка Торрічеллі – це точка, з якої кожну сторону A_1A_2, A_2A_3 і A_1A_3 трикутника $A_1A_2A_3$ видно під кутом 120°*, що і є й основною ознакою.

З'ясуємо, чи може точка Торрічеллі лежати поза трикутником $A_1A_2A_3$. Візьмемо довільну точку M, яка лежить ззовні трикутника $A_1A_2A_3$, в якого кожний кут менший 120°. Якщо уявити сторони трикутника продовженими, то зовнішня область стосовно цього трикутника матиме такі два випадки:

а) точка M лежить біля сторони трикутника $A_1A_2A_3$, наприклад, A_2A_3;

б) точка M належить області, яка розташована між продовженням сторін A_1A_2 і A_2A_3 трикутника $A_1A_2A_3$.

Для першого випадку очевидна нерівність

$$A_1M + A_2M + A_3M > A_1D + A_2D + A_3D = A_1D + A_2A_3 \ ,$$

оскільки $A_1M > A_1D$, $A_2M > A_2D$ і $A_3M > A_3D$ (D – точка перетину відрізка A_1M зі стороною A_2A_3). Для другого отримаємо нерівність

$$A_1M + A_2M + A_3M > A_1A_2 + A_2A_3 \ ,$$

оскільки $A_1M > A_1A_2$ і $A_3M > A_2A_3$.

в) Доведемо, що точка M не може лежати на продовжених сторонах, наприклад, на стороні A_1A_3 трикутника. Очевидно, $A_1M + A_2M + A_3M >$ $> A_1A_3 + A_2A_3$. Отже, точка Торрічеллі M не може лежати на продовженнях сторін трикутника $A_1A_2A_3$.

г) Доведемо, що точка Торрічеллі M не може лежати на стороні, наприклад, A_2A_3 трикутника $A_1A_2A_3$. Для цього побудуємо в цьому трикутнику точку Торрічеллі M і візьмемо довільну точку P на стороні A_2A_3, яка немовби також є точкою Торрічеллі. Згідно з теоремою 1 маємо:

$$A_1M + A_2M + A_3M < A_1P + (A_2P + A_3P) = A_1P + A_2A_3 \, .$$

Отже, точка Торрічеллі лежить всередині трикутника, якщо в ньому кожний кут менший від 120°.

Довжина l мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах трикутника з кутами, меншими від 120°, така:

$$l = A_1M + A_2M + A_3M \, ,$$

де M – точка перетину сумарних відрізків A_1A_3' і $A_2'A_3$.

Виведемо формулу для обчислення довжини мінімальної сітки сполучення трьох об'єктів, розміщених у вершинах довільного трикутника. Нехай $A_1A_2 = a$, $A_1A_3 = b$ і кут між ними $\angle A_2A_1A_3 = \alpha$ (рис. 1). Тоді з трикутника $A_1A_2'A_3$ за теоремою косинусів матимемо:

$$l^2 = (A_2'A_3)^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(60^0 + \alpha) \, .$$

Спростивши вираз, отримаємо:

$$l = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(60° + \alpha)} = \sqrt{a^2 + b^2 - ab(\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha)} \, .$$

Якщо $\alpha = 120°$, то $l = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab} = a + b$. Якщо $\alpha > 120°$, то довжина мінімальної сітки сполучення дорівнює сумі двох менших сторін трикутника.

Якщо трикутник рівносторонній, то довжину l мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах трикутника, можна обчислити за формулою $l = a\sqrt{3}$, де a – довжина сторони трикутника. Точка M перетину медіан є точкою Торрічеллі.

Із доведеної теореми випливають наслідки.

а) *Якщо трикутник має кут, що дорівнює 120°, то його вершина є точкою Торрічеллі.*

Для доведення цього твердження досить на двох сторонах трикутника $A_1A_2A_3$ побудувати рівносторонні трикутники $A_1A_2A_2'$ і $A_2A_3A_3'$, тоді відрізки A_1A_3' і A_3A_2' перетинатимуться у вершині кута, який має 120° (рис. 1), яка і буде точкою Торрічеллі.

б) *Якщо в трикутнику $A_1A_2A_3$ міститься кут, більший від 120°, то точка M перетину відрізків A_1A_3' і A_3A_2' опиниться поза трикутником $A_1A_2A_3$* (рис. 2).

У цьому випадку точку M не можна назвати точкою Торрічеллі, бо

$$A_1M + A_2M + A_3M > A_1A_2 + A_2A_3 .$$

Тому точкою Торрічеллі буде вершина кута $A_1A_2A_3$, більшого за 120°.

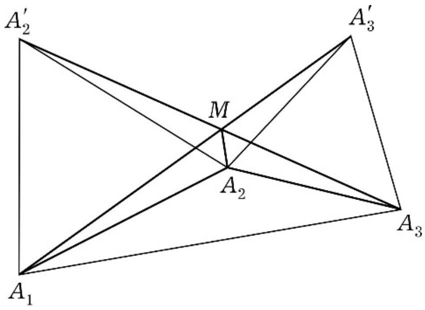

Рис. 2

в) *Незалежно від того, на якій стороні побудований рівносторонній трикутник, довжина всіх трьох сумарних відрізків мінімальної сітки однакова.*

Отже, *точка Торрічеллі міститься всередині трикутника $A_1A_2A_3$, якщо кожний його кут менший від 120°. За кута 120° або більше точка Торрічеллі міститься у вершині тупого кута.*

Ця суто геометрична задача має конкретне практичне значення під час побудови шосейних доріг, для проведення електричної лінії, побудови каналізації, сполучення свердловин мінімальної довжини, сполучення елементів монтажу різних конструкцій тощо. На цій мінімальній сітці сполучення, крім трьох об'єктів, можна розміщати й інші.

З'ясуємо деякі властивості мінімальної сітки сполучення об'єктів.

а) Покажемо перш за все, що *вона складається із відрізків.* Якщо б містила деякі криві дуги, то їх можна замінити відрізками, які з'єднують кінці дуги. Адже відрізок, який з'єднує кінці дуги, менший від неї.

б) Доведемо другу її властивість, що *у точці M мінімальної сітки на площині може збігатися не більше трьох відрізків.*

Нехай у вузловій точці M збігаються чотири відрізки A_1M, A_2M, A_3M і A_4M (рис. 3). Тоді принаймні один із кутів біля вершини виявиться гострим, або прямим, тобто меншим від 120°. Нехай кут A_1MA_2 менший від 120°. Тоді, згідно з теоремою 1, для трьох точок A_1, A_2 і M точкою Торрічеллі буде точка D, з якої сторони трикутника A_1A_2M видно під кутом 120°. У такому випадку довжина мінімальної сітки зменшиться, бо

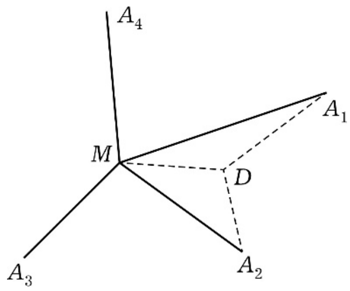

Рис. 3

$$A_1D + A_2D + MD < A_1M + A_2M ,$$

що неможливо.

в) *Якщо в точці M мінімальної сітки збігаються два відрізки, то жоден із двох кутів, що утворилися, не може бути меншим від 120°.*

Нехай у точці M збігаються два відрізки A_1M і A_2M (рис. 4). Припустимо, що кут A_1MA_2 менший від 120°. Тоді всередині трикутника A_1MA_2 знайдеться така точка D, для якої $A_1D + A_2D + MD < A_1M + A_2M$. А

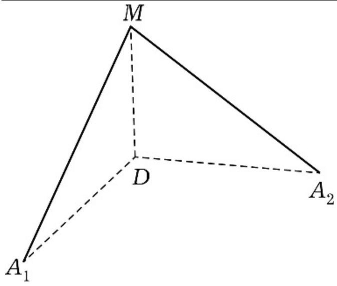

Рис. 4

це неможливо, бо $A_1M + A_2M$ є довжиною мінімальної сітки сполучення точок A_1 і A_2.

г) Доведемо, що *три відрізки, які з'єднуються в точці* M *за мінімальної сітки, ділять повний кут на три рівні кути* (кожний з них дорівнює 120°).

Нехай, наприклад, кут A_1MA_2 (рис. 5) менший від 120°. Тоді для трикутника A_1MA_2 знайдеться точка D, відмінна від точки M. У такому випадку, згідно з теоремою 1, буде правильною нерівність

$$A_1D + A_2D + MD < A_1M + A_2M,$$

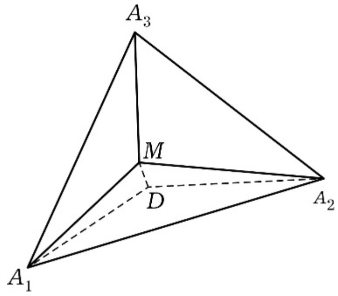

Рис. 5

за якою можна скоротити довжину мінімальної сітки, тобто довжина $A_1D + A_2D + MD$ стане меншою, ніж довжина мінімальної сітки. А це неможливо. Тим самим довели, що ні один із вказаних кутів у вузлових точках не може бути меншим від 120° чи більшим від 120°, оскільки тоді знайдеться кут, який менший від 120°.

ґ) *Мінімальна сітка сполучення є однозв'язною.* Це означає, що за вилучення будь-якого внутрішнього її відрізка отримаємо незв'язні частини сітки.

Припустимо, що мінімальна сітка сполучення не є однозв'язною. Тоді знайдеться всередині мінімальної сітки відрізок, який можна вилучити. В такому випадку отримаємо сітку, довжина якої виявиться меншою від довжини мінімальної сітки. А це неможливо.

2. **Побудова мінімальної сітки сполучення чотирьох точок (об'єктів), розміщених на площині**.

Побудуємо мінімальну сітку сполучення об'єктів, розміщених у вершинах довільного опуклого чотирикутника. Для цього потрібно визначити:

а) кількість вузлових точок мінімальної сітки сполучення об'єктів;

б) кількість відрізків, з яких складається мінімальна сітка сполучення об'єктів;

в) геометричне її розміщення.

Кількість вузлових точок мінімальної сітки сполучення обумовлює мінімальна кількість трикутників, з яких складається опуклий чотирикутник. В опуклому чотирикутнику вузлових точок буде дві ($k = n - 2$, де n – кількість сторін многокутника, а k – кількість вузлових точок).

Зауважимо, що для фіксації двох об'єктів – точок A_1 і A_2 – потрібний один елемент – відрізок A_1A_2. Для фіксації третього об'єкта – точки A_3 – треба два елементи – два відрізки A_1A_3 і A_2A_3. Для фіксації кожного наступного об'єкта – точки A_n також потрібно мати два елементи – відрізки, які з'єднують цю точку з першою і передостанньою точками. А всіх об'єктів (точок) залишилося $n - 2$, бо перші два об'єкти (точки) з'єднані відрізком на першому етапі. Отже, всіх відрізків мінімальної сітки сполучення об'єктів буде: $k = 1 + 2(n - 2) = 2n - 3$. Для сполучення чотирьох об'єктів, розміщених у вершинах опуклого чотирикутника, має бути від трьох до п'яти відрізків. Такі емпіричні формули доводять методом табличних різниць [2, с. 75].

Далі з'ясуємо, як всі ці елементи мінімальної сітки сполучення об'єктів розмістити в опуклому чотирикутнику і окреслимо схему мінімальної сітки.

Оскільки у її вузловій точці з'єднали три відрізки під кутом 120°, то досить в кінці будь-якого із них приєднати кут (сторони якого паралельні до сторін попереднього кута), який має 120°. Тоді утвориться схема побудови мінімальної сітки сполучення чотирьох точок (об'єктів), яка складається із двох вузлових точок і п'яти відрізків, які утворюють кути 120° (рис. 6). Встановили, що мінімальна сітка сполучення об'єктів, розміщених у вершинах опуклого чотирикутника, розбиває його на два трикутники з кутами по 120° і два чотирикутники з двома кутами по 120°. Кожна геометрична фігура має одну спільну сторону з опуклим чотирикутником, у вершинах якого розміщені об'єкти. В кожній вузловій точці збігається три відрізки під кутом 120°. Така структура існує тоді, коли вузлові точки є всередині чотирикутника. Побудова мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах опуклого чотирикутника, ґрунтується на міркуваннях, поданих у доведенні наступного твердження – теореми.

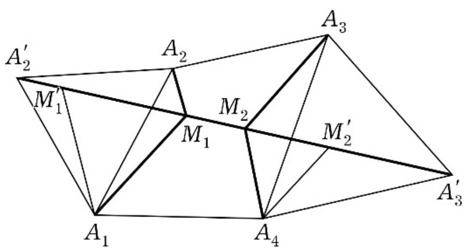

Рис. 6

Теорема 2. *Якщо на протилежних сторонах, сума яких не перевищує суму двох інших сторін, довільного опуклого чотирикутника $A_1A_2A_3A_4$ ззовні побудувати рівносторонні трикутники $A_1A_2A_2'$ і $A_3A_4A_3'$ та відрізок $A_2'A_3'$, який з'єднує протилежні вершини цих трикутників, то:*

а) точки M_1 і M_2 перетину відрізка $A_2'A_3'$ із дугами, які мають 120° та побудовані на сторонах A_1A_2 і A_3A_4, будуть вузловими точками мінімальної сітки сполучення;

б) довжина відрізка $A_2'A_3'$ дорівнює довжині мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах чотирикутника.

У цьому випадку треба розглянути опуклий чотирикутник, в якого:

а) протилежні кути тупі; б) тупі кути прилягають до однієї сторони (один із цих кутів може бути прямий); в) три або один кут тупий.

Д о в е д е н н я. а) Розглянемо перший випадок. Згідно з умовою теореми, на протилежних менших сторонах A_1A_2 і A_3A_4 (сума яких не є більшою від суми двох інших сторін) чотирикутника $A_1A_2A_3A_4$ ззовні побудуємо рівносторонні трикутники $A_1A_2A_2'$ і $A_3A_4A_3'$ (їх можна вважати вписаними в коло, яке вершинами рівностороннього трикутника ділиться на три рівні дуги, які мають 120°) (рис. 6). Протилежні вершини A_2' і A_3' цих трикутників з'єднуємо відрізком $A_2'A_3'$. Доведемо, що точки M_1 і M_2 перетину відрізка $A_2'A_3'$ із дугами, які мають 120°, будуть вузловими точками мінімальної сітки сполучення, а його довжина

$$A_2'A_3' = A_1M_1 + A_2M_1 + A_3M_2 + A_4M_2 + M_1M_2 .$$

Оскільки хорди (відрізки) A_1A_2' і A_2A_2' (A_3A_3' і A_4A_3') є рівні, то дуги, які стягуються рівними хордами, є рівні між собою (кожна з яких дорівнює 120°), а отже, будуть рівними вписані кути, які спираються на рівні дуги. Внаслідок цього вписані кути $A_1M_1A_2'$ і $A_2M_1A_2'$ у вершинах вузлових точок дорівнюють по 60°, де $A_2'A_3'$ – бісектриса кутів у вузлових точках мінімальної сітки сполучення. Звідси маємо, що $\angle A_1M_1A_2 = 120°$, а $\angle A_1M_1M_2 = \angle A_2M_1M_2 = 120°$ (як симетричні відносно відрізка M_1M_2 і як доповняльні до розгорнутого кута). Це ж можна сказати і про кути у вершині вузлової точки M_2. Отже, точки M_1 і M_2 є вузловими точками мінімальної сітки сполучення.

Далі доведемо, що довжина відрізка $A_2'A_3'$ дорівнює сумі довжин відрізків, які є сторонами кутів з вершинами у вузлових точках M_1 і M_2. Для цього повернемо трикутник $A_1A_2M_1$ навколо точки A_1 проти годинникової стрілки на 60°. Отримаємо трикутник $A_1A_2'M_1'$, який дорівнює трикутнику $A_1A_2M_1$, $\angle A_1M_1'A_2' = \angle A_1M_1A_2 = 120°$, бо суміжний з ним $\angle A_1M_1'M_1 = 60°$ (як кут рівностороннього трикутника). Звідси $A_1A_2 = A_1A_2' = A_2'A_2$; $A_1M_1 = M_1M_1' = A_1M_1'$, а $A_2M_1 = A_2'M_1'$, $A_2'M_1 = A_2'M_1' + M_1'M_1 = A_2M_1 + A_1M_1$.

Аналогічно, за повороту трикутника $A_3A_4M_2$ навколо точки A_4 за годинниковою стрілкою на 60°, отримаємо трикутник $A_3'A_4M_2'$. Внаслідок цього матимемо:

$$A_3'M_2 = A_3'M_2' + M_2'M_2 = A_3M_2 + A_4M_2.$$

Як бачимо, лінія, яка складається з відрізків, що є сторонами кутів з вершинами у вузлових точках (рис. 6), задовольняє всі властивості мінімальної сітки сполучення об'єктів, а довжина відрізка $A_2'A_3'$, який дорівнює довжині сукупності відрізків мінімальної сітки, менша, ніж довжина будь якої ламаної, яка з'єднує кінці відрізка $A_2'A_3'$. Такий відрізок також називатимемо ***сумарним відрізком мінімальної сітки***.

Отже, *мінімальна сітка сполучення об'єктів, які розміщені у вершинах опуклого чотирикутника, складається із п'яти відрізків:* A_1M_1, A_2M_1, A_3M_2, A_4M_2 *і* M_1M_2, *які є сторонами кутів з вершинами у вузлових точках* M_1 *і* M_2. Сума довжин цих відрізків дорівнює довжині відрізка $A_2'A_3'$, який з'єднує протилежні вершини рівносторонніх трикутників, побудованих на протилежних сторонах чотирикутника. Отже,

$$l = A_2'A_3' = A_1M_1 + A_2M_1 + A_3M_2 + A_4M_2 + M_1M_2.$$

Із всього наведеного вище випливає, що випадок а) теореми доведено.

б) Розглянемо другий випадок (рис. 7). Міркування доведення теореми такі ж, як і для першого випадку. Тому окреслимо тільки основні етапи. Трикутник $A_1A_2M_1$ повернемо проти годинникової стрілки навколо точки A_1 на 60°, а трикутник $A_4A_3M_2$ – за годинниковою стрілкою навколо точки A_4 на 60°. Отримаємо

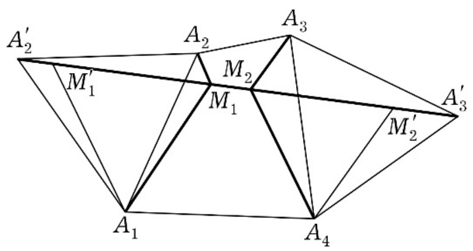

Рис. 7

$$A_2'M_1 = A_1M_1 + A_2M_1,$$
$$A_3'M_2 = A_3M_2 + A_4M_2,$$

а кути у вузлових точках M_1 і M_2 рівні між собою і кожний з них становить 120°. Тому мінімальна сітка сполучення об'єктів, розміщених у вершинах опуклого чотирикутника з тупими кутами, що прилягають до однієї сторони, складається із відрізків, що є сторонами кутів у вузлових точках M_1 і M_2 опуклого чотирикутника, а сума їх довжин дорівнює довжині відрізка $A_2'A_3'$, який утворився через геометричне перетворення ламаних (які складаються із п'яти відрізків) в один відрізок $A_2'A_3'$, який менший від будь-якої ламаної, що з'єднує його кінці. Отже,

$$l = A_2'A_3' = A_1M_1 + A_2M_1 + A_3M_2 + A_4M_2 + M_1M_2 .$$

Таким чином, другий випадок теореми доведено.

в) Якщо чотирикутник містить один або три тупих кути, то побудова мінімальної сітки сполучення об'єктів така сама, як у перших двох випадках.

Знаючи розміри сторін чотирикутника та його кути, можна обчислити довжину мінімальної сітки сполучення чотирьох об'єктів.

Нехай $A_1A_2 = a$, $A_1A_4 = b$, $A_3A_4 = c$, $\angle A_2A_1A_4 = \alpha$, $\angle A_1A_4A_3 = \beta$. Згідно з теоремою косинусів, з трикутника $A_2'A_4A_3'$ маємо $(A_2'A_3')^2 = (A_2'A_4)^2 + c^2 - 2c \cdot A_2'A_4 \cos(60° + x)$, де $x = \angle A_2'A_4A_3$; з $\Delta A_1A_2'A_4$ маємо $(A_2'A_4)^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(60° + \alpha)$. Звідси

$$l^2 = (A_2'A_3')^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(60° + \alpha) +$$

$$+c^2 - 2c \cdot \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(60° + \alpha)} \cdot \cos(60° + x) ;$$

$$l = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(60° + \alpha) + c^2 - 2c \cdot \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(60° + \alpha)} \cdot \cos(60° + x)} ,$$

де $x = \beta - \arcsin\dfrac{a\sin(60° + \alpha)}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(60° + \alpha)}}$ визначали з трикутника $A_1A_4A_2'$.

Якщо $\alpha = \beta = 120°$, то, спростивши формулу для обчислення довжини l сумарного відрізка, одержимо:

$$l = \sqrt{(a + b + c)^2} = a + b + c .$$

Якщо $\alpha > 120°$ і $\beta > 120°$, то довжина l дорівнює сумі трьох менших сторін чотирикутника.

Доцільно застерегти, якщо рівносторонні трикутники будувати на більших протилежних сторонах опуклого чотирикутника, то сітка сполучення об'єктів, розміщених у його вершинах, не буде мінімальною, бо довжина відрізка, який з'єднує протилежні вершини рівносторонніх трикутників, побудованих на більших сторонах, буде більша, ніж довжина відрізка, який з'єднує вершини рівносторонніх трикутників, побудованих на менших сторонах. Крім цього, може виявитися, що вузлові точки M_1 і M_2 мінімальної сітки можуть збігатися, тобто відстань між ними дорівнює нулю (у вузловій точці не можуть з'єднуватися чотири відрізки), або мінятися місцями (відрізки, які з'єднують вузлові точки, накладаються). Тому рівносторонні трикутники треба будувати на менших протилежних сторонах (сума яких є меншою, ніж двох інших сторін) опуклого чотирикутника. Об'єкти сполучення можуть розташовуватися як у вузлових точках, так і навіть на відрізках мінімальної сітки.

Слід відмітити, що *сторони кутів з вершинами у вузлових точках завжди паралельні,* оскільки різносторонні кути за перетину двох прямих третьою є рівними і кожен з них дорівнює 120°.

Із доведеної теореми, згідно з другою і третьою властивостями мінімальної сітки сполучення, випливають наслідки.

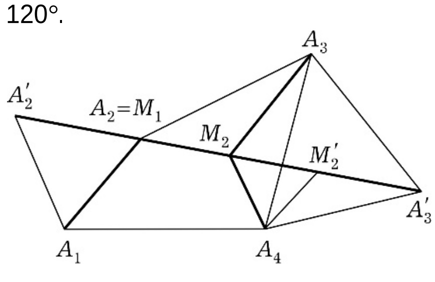

Рис. 8

а) *Якщо в опуклому чотирикутнику з двома протилежними тупими кутами сумарний відрізок $A_2'A_3'$ мінімальної сітки сполучення проходить крізь вершину тупого кута, то ця вершина стає вузловою точкою мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах чотирикутника.* Мінімальна сітка складається з чотирьох відрізків A_1M_1, M_1M_2, A_3M_2, A_4M_2 (рис. 8).

б) *Якщо в опуклому чотирикутнику з двома протилежними тупими кутами менша діагональ утворює кути із двома протилежними сторонами по 120°, то згідно з третьою властивістю мінімальної сітки сполучення вершини цих кутів стають її вузловими точками, а діагональ – складовим відрізком.* Мінімальна сітка містить три відрізки A_1M_1, M_1M_2, A_3M_2 (рис. 9).

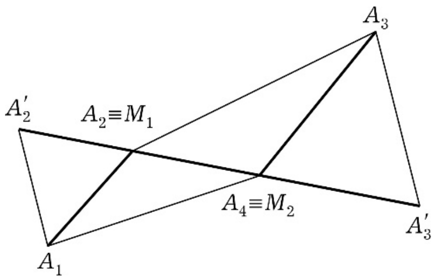

Рис. 9

Якщо протилежні кути між меншими стороною та діагоналлю чотирикутника більші від 120°, то сумарний відрізок $A_2'A_3'$ перетинає більші протилежні або суміжні сторони чотирикутника, а мінімальна сітка сполучення складається з двох менших протилежних сторін і меншої діагоналі.

в) *Якщо в опуклому чотирикутнику з двома тупими кутами, що прилягають до однієї сторони, кути дорівнюють по 120°, то згідно з третьою властивістю мінімальної сітки сполучення вершини цих кутів стають вузловими точками мінімальної сітки, яка складається із трьох відрізків, які є сторонами чотирикутника, середній з яких є A_2A_3.* Мінімальна сітка складається з трьох відрізків A_1M_1, M_1M_2, A_4M_2 (рис. 10).

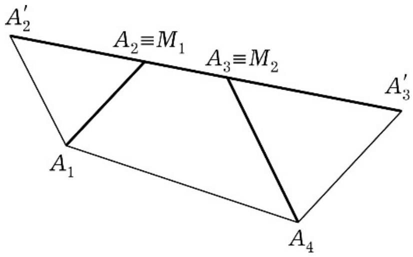

Рис. 10

г) *Якщо кожний з двох прилеглих кутів до однієї сторони більший від 120°, то сумарний відрізок $A_2'A_3'$ виходить за межі чотирикутника, а мінімальна сітка сполучення чотирьох об'єктів, розміщених у вершинах опуклого чотирикутника, згідно з третьою властивістю мінімальної сітки сполучення, складається з трьох менших сторін чотирикутника.*

Користуючись теоремою 2, можна побудувати мінімальну сітку сполучення об'єктів, розміщених у вершинах квадрата, прямокутника, паралелограма, трапеції, дельтоїда і довільного чотирикутника.

Побудова мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах квадрата. Нехай, наприклад, об'єкти A_1, A_2, A_3 і A_4 розміщені у вершинах квадрата (рис. 11). Для побудови мінімальної сітки сполучення об'єктів, згідно з теоремою 2, потрібно на протилежних сторонах квадрата побудувати рівносторонні трикутники $A_1A_2A_2'$ і $A_3A_4A_3'$. Протилежні вершини A_2' і A_3' трикутників з'єднаємо відрізком $A_2'A_3'$, який належить серединному перпендикуляру сторони A_1A_2. Тому

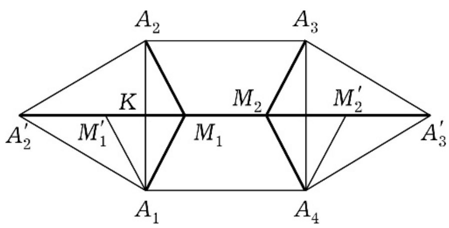

Рис. 11

всередині квадрата на протилежних сторонах A_1A_2 і A_3A_4 будуємо рівнобедрені трикутники $A_1M_1A_2$ і $A_3M_2A_4$ так, щоб $\angle A_1M_1A_2 = \angle A_3M_2A_4 = 120°$. Сторони A_1A_2 і A_3A_4 із вершин M_1 і M_2 видно під кутом 120°. Виконавши послідовно всі побудови, які здійснювали під час доведення теореми 2, одержимо:

$$l = A_2'A_3' = A_1M_1 + A_2M_1 + A_3M_2 + A_4M_2 + M_1M_2 = 4A_1M_1 + M_1M_2 .$$

Якщо довжина сторони квадрата дорівнює a, то з рівнобедреного трикутника $A_1M_1A_2$ одержимо $M_1K = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, $A_1M_1 = \frac{a}{\sqrt{3}}$, а довжина мінімальної сітки сполучення

$$l = 4 \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} + \left(a - \frac{a}{\sqrt{3}}\right) = a(1+\sqrt{3}) .$$

Доведемо, що довжина мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах квадрата, менша від суми відрізків, які з'єднують точку перетину діагоналей з вершинами квадрата.

Нехай довжина сторони квадрата дорівнює a, тоді $A_1A_3 + A_2A_4 = 2a\sqrt{2}$, тобто довжина суми діагоналей $2a\sqrt{2}$. Доведемо нерівність $2a\sqrt{2} > a(1+\sqrt{3})$. Оскільки $a > 0$, то $(2a\sqrt{2})^2 > a^2(1+\sqrt{3})^2$. Звідси $8a^2 > 4a^2 + 2a^2\sqrt{3}$, $2 > \sqrt{3}$. Отже, довжина мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах квадрата, менша від суми відрізків, які з'єднують точку перетину діагоналей з кожною з вершин квадрата.

Це ще раз підтверджує властивість мінімальної сітки сполучення об'єктів, що у вузловій точці мінімальної сітки на площині може збігатися не більше трьох відрізків.

Побудова мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах прямокутника. Для цього потрібно рівносторонні трикутники будувати на менших протилежних сторонах прямокутника. Дотримуючись всіх етапів побудови мінімальної сітки сполучення об'єктів, які здійснювалися під час доведення теореми 2, одержимо (рис. 12):

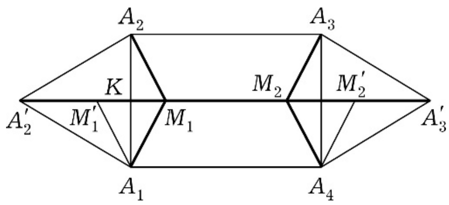

Рис. 12

$$l = A_2'A_3' = A_1M_1 + A_2M_1 + A_3M_2 + A_4M_2 + M_1M_2 .$$

Знаючи розміри прямокутника ($A_1A_4 = a$, $A_2A_3 = b$, $a > b$), обчислимо довжину мінімальної сітки сполучення об'єктів. Нехай $A_1M_1 = x$, тоді, згідно з теоремою про катет, що лежить проти кута 30°, $M_1K = 0,5x$. Користуючись теоремою Піфагора, отримаємо:

$$A_1M_1 = \frac{b}{\sqrt{3}} M_1K = \frac{b}{2\sqrt{3}} .$$

Отже, *довжина l мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах прямокутника, буде:*

$$l = A_2'A_3' = 2(A_1M_1 + A_2M_1) + M_1M_2 = 4 \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} + \left(a - \frac{b}{\sqrt{3}}\right) = b\sqrt{3} + a .$$

Якщо довжина відрізка M_1M_2 дорівнює нулю (вузлові точки M_1 і M_2 збігаються), то згідно з другою властивістю мінімальної сітки сполучення об'єктів у вузловій точці не можуть з'єднуватися чотири відрізки. З'ясуємо тоді, яке відношення довжин сторін прямокутника. Якщо $M_1M_2 = 0$, то $a - \frac{b}{\sqrt{3}} = 0$, $\frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. У такому випадку відношення довжин сторін прямокутника $\frac{A_2A_3}{A_1A_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Тому вузлові точки мінімальної сітки треба шукати на середній лінії прямокутника, яка паралельна його більшій стороні.

Якщо відношення сторін визначатиме нерівність $\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{A_2A_3}{A_1A_2} < 1$, то задача матиме два різні розв'язки з різними значеннями. У першому випадку $l_1 = b\sqrt{3} + a$, в другому – $l_2 = a\sqrt{3} + b$. Порівняємо довжини l_1 і l_2. Оскільки

$$l_1 - l_2 = (b\sqrt{3} + a) - (a\sqrt{3} + b) = (\sqrt{3} - 1)(b - a) < 0$$

за умови, що $a > b$, то $l_{\min} = b\sqrt{3} + a$. Отже, *вузлові точки M_1 і M_2 мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах прямокутника, лежать на більшій середній лінії прямокутника.*

Побудова мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах паралелограма. Побудуємо її також згідно з теоремою 2, як і в попередніх випадках. Одержуємо (рис. 13):

$$A_2'M_1 = A_2'M_1' + M_1'M_1 = A_1M_1 + A_2M_1,$$

$$A_3'M_2 = A_3'M_2' + M_2'M_2 = A_3M_2 + A_4M_2.$$

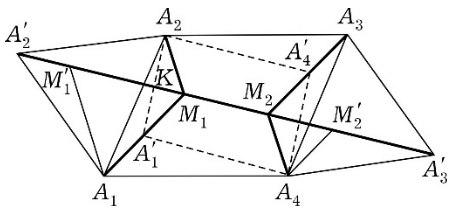

Рис. 13

Отже, така *мінімальна сітка сполучення складається з відрізків A_1M_1, A_2M_1, A_3M_2, A_4M_2, M_1M_2, які є сторонами кутів з вершинами у вузлових точках, а сума довжин цих відрізків дорівнює довжині відрізка $A_2'A_3'$, який є бісектрисою кутів у вузлових точках.*

Оскільки довжина відрізка $A_2'A_3'$, який з'єднує дві вершини побудованих рівносторонніх трикутників (уявно вписані в коло), завжди менша, ніж ламаної, яка з'єднує кінці відрізка A_2' і A_3', то:

$$l = A_2'A_3' = A_1M_1 + A_2M_1 + A_3M_2 + A_4M_2 + M_1M_2.$$

Доцільно зауважити, що мінімальна сітка сполучення об'єктів, розміщених у вершинах прямокутника $A_1'A_2A_4'A_4$ (рис. 13), збігається з мінімальною сіткою сполучення об'єктів, розміщених у вершинах паралелограма $A_1A_2A_3A_4$. Тому для паралелограма рівносторонні трикутники також будують на менших сторонах, як і для прямокутника. Зі збільшенням тупого кута паралелограма прямокутник $A_1'A_2A_4'A_4$ видовжується, перетворюється у смужку, а при 120° (між меншими стороною і діагоналлю паралелограма) – у відрізок (діагональ) A_2A_4.

Виведемо формулу, за якою можна обчислити довжину мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах паралелограма. Нехай сторони паралелограма $A_1A_4 = a$, а $A_1A_2 = b$. З трикутника $A_2A_2'M_1$ за теоремою синусів матимемо:

$$A_2'M_1 = \frac{2b\sin(90° + \gamma)}{\sqrt{3}},\ A_2M_1 = \frac{2b\sin(30° - \gamma)}{\sqrt{3}},\ \gamma = \angle A_1A_2A_1'.$$

З трикутника M_1KA_2: $M_1K = \frac{b\sin(30° - \gamma)}{\sqrt{3}}$. З трикутника $A_1A_1'A_4$: $A_1'A_4 = \frac{2a\sin\alpha}{\sqrt{3}}$, де $\alpha = \angle A_1'A_1A_4$. Оскільки трикутники $A_1A_2M_1$ і $A_3A_4M_2$ є рівні, то $A_2'M_1 = A_1M_1 + A_2M_1 = A_3'M_2$. Звідси

$$l = 2(A_1M_1 + A_2M_1) + M_1M_2 = 2A_2'M_1 + M_1M_2 = 2A_2'M_1 + (A_1'A_4 - 2M_1K) =$$

$$= 2 \cdot \frac{2b\sin(90^\circ + \gamma)}{\sqrt{3}} + \frac{2a\sin\alpha}{\sqrt{3}} - \frac{2b\sin(30^\circ - \gamma)}{\sqrt{3}},$$

$$l = \frac{2}{\sqrt{3}}(2b\cos\gamma + a\sin\alpha - b\sin(30^\circ - \gamma)).$$

Доцільно звернути увагу, що *якщо:*

а) кут $A_1A_2A_4$ (між бічною стороною та діагоналлю) більший від 90°, але менший від 120°, то сумарний відрізок $A_2'A_3'$ (який дорівнює сумі відрізків, що складають мінімальну сітку сполучення об'єктів, розміщених у вершинах паралелограма) перетинає менші сторони паралелограма, а вузлові точки мінімальної сітки знаходяться всередині паралелограма (рис. 13);

б) кут $A_1A_2A_4$ (між меншими бічною стороною і діагоналлю) дорівнює 120°, то менша діагональ накладається на сумарний відрізок $A_2'A_3'$ мінімальної сітки сполучення, а вузлові точки мінімальної сітки сполучення об'єктів збігаються з вершинами тупих кутів. Мінімальна сітка в цьому випадку складається з двох менших сторін паралелограма і меншої діагоналі, як і для довільного опуклого чотирикутника (див. рис. 9);

в) сумарний відрізок $A_2'A_3'$ мінімальної сітки сполучення перетинає більші сторони паралелограма, то вузловими точками стають вершини тупих кутів, мінімальна сітка, згідно з третьою властивістю, складатиметься з двох менших сторін і меншої діагоналі.

Побудова мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах трапеції. Побудуємо мінімальну сітку сполучення об'єктів, розміщених у вершинах рівнобедреної трапеції. Оскільки геометричне місце її розміщення залежить від кутів та розмірів сторін, то розглядатимемо два випадки:

а) сума бічних сторін менша від суми основ трапеції;

б) сума бічних сторін більша від суми основ трапеції.

Розглянемо випадок. Побудову мінімальної сітки сполучення об'єктів тут подаємо за схемою, як і для об'єктів, розміщених у вершинах опуклого чотирикутника (теорема 2).

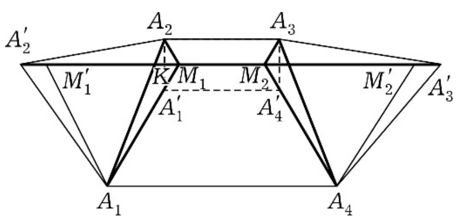

Рис. 14

Виконавши всі етапи побудови, матимемо:

$$l = A_2'A_3' = (A_1M_1 + A_2M_1) + (A_3M_2 + A_4M_2) + M_1M_2$$

(що зображено жирною лінією на рис. 14). Пояснимо цю геометричну рівність.

За повороту трикутника $A_1A_2M_1$ на 60° проти годинникової стрілки навколо точки A_1 отримаємо:

$$A_2'M_1 = A_2'M_1' + M_1'M_1 = A_2M_1 + A_1M_1.$$

Аналогічно за повороту трикутника $A_4A_3M_2$ на 60° за годинниковою стрілкою навколо точки A_4 одержимо:

$$A_3'M_2 = A_3'M_2' + M_2'M_2 = A_3M_2 + A_4M_2.$$

Звідси довжина мінімальної сітки

$$l = A_2'A_3' = (A_1M_1 + A_2M_1) + (A_3M_2 + A_4M_2) + M_1M_2 = 2A_2'M_1 + M_1M_2$$

за умови, що довжина відрізка M_1M_2 більша від нуля.

Якщо тупі кути трапеції наближаються до 120°, то прямокутник $A_1'A_2A_3A_4'$ звужується і перетворюється у відрізок A_2A_3 (верхньої основи). Якщо вони дорівнюють по 120°, то згідно з третьою властивістю мінімальної сітки сумарний відрізок $A_2'A_3'$ містить верхню основу, тобто $A_2'A_3' = A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4$. Іншими словами, мінімальна сітка складається з бічних сторін і верхньої основи, як і для опуклого чотирикутника (рис. 10). Якщо тупі кути трапеції більші від 120°, то мінімальна сітка сполучення об'єктів складається з тих самих сторін.

Виведемо формулу для обчислення довжини мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах рівнобедреної трапеції з тупими кутами, меншими від 120°. Нехай $A_1A_4 = a$, $A_2A_3 = b$, $A_1A_2 = c$. З трикутника $A_1A_2M_1$ згідно з теоремою синусів матимемо: $A_2M_1 = \dfrac{2c\sin\beta}{\sqrt{3}}$, де $\beta = \angle A_2A_1M_1$. З трикутника A_2M_1K отримаємо: $M_1K = \dfrac{c\sin\beta}{\sqrt{3}}$, як катет, що лежить проти кута 30°. Оскільки трикутник $A_1A_2'M_1$ дорівнює трикутнику $A_4A_3'M_2$, то $A_3'M_2 = A_2'M_1 = \dfrac{2c\sin(60°+\beta)}{\sqrt{3}} = c\cos\beta + \dfrac{c\sin\beta}{\sqrt{3}}$. Відстань між вузловими точками M_1 і M_2 мінімальної сітки сполучення об'єктів $M_1M_2 = b - \dfrac{2c\sin\beta}{\sqrt{3}}$. Отже, *довжина мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах трапеції, така:*

$$l = 2c\left(\cos\beta + \frac{\sin\beta}{\sqrt{3}}\right) + \left(b - \frac{2c\sin\beta}{\sqrt{3}}\right) = 2c\cos\beta + b,\ \text{якщо}\ \frac{b}{c} > \frac{2\sin\beta}{\sqrt{3}}.$$

Кут β треба вимірювати. Ця формула придатна для обчислення довжини l, якщо тупі кути трапеції менші від 120° і $\dfrac{b}{c} > \dfrac{2\sin\beta}{\sqrt{3}}$, бо згідно з другою властивістю мінімальної сітки в одній точці не може збігатися чотири відрізки.

Якщо тупий кут трапеції дорівнює 120° або перевищує це значення, то $l = 2c + b$, де c – довжина бічної сторони трапеції, а b *– довжина верхньої основи.*

Якщо відстань між вузловими точками M_1 і M_2 дорівнює нулю, або вони поміняються місцями, то вузлові точки мінімальної сітки треба шукати на серединному перпендикулярі, проведеному до основ рівнобедреної трапеції.

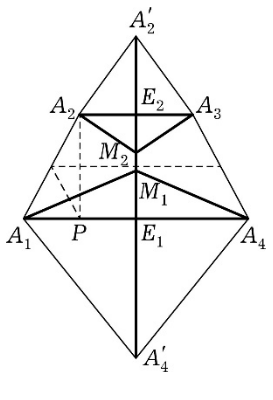

Рис. 15

б) Розглянемо другий випадок. З цією метою на основах рівнобедреної трапеції будуємо рівнобедрені трикутники з кутом 120° біля вершин M_1 і M_2 (рис. 15). Тоді $\angle A_1M_1A_4 = \angle A_2M_2A_3 = 120°$. Оскільки чотирикутники $A_1A_2M_2M_1$ і $A_4A_3M_2M_1$ є симетричними відносно прямої M_1M_2, то

$$\angle A_1M_1M_2 = \angle A_4M_1M_2 = \angle A_2M_2M_1 = \angle A_3M_2M_1 = 120°.$$

Легко переконатися (так само, як і в попередніх випадках), що довжина мінімальної сітки сполучення об'єктів дорівнює довжині відрізка $A_2'A_4'$ (що з'єднує протилежні вершини рівносторонніх трикутників, побудованих на основах трапеції), який менший від будь-якої ламаної, що з'єднує кінці відрізка $A_2'A_4'$. Як бачимо, вузлові точки M_1 і M_2 задовольняють всі властивості мінімальної сітки сполучення об'єктів. Отже, геометричним місцем розташування мінімальної сітки сполучення об'єктів будуть сторони кутів, вершинами яких є вузлові точки M_1 і M_2.

Знайдемо формулу для обчислення довжини мінімальної сітки. Нехай $A_1A_4 = a$, $A_2A_3 = b$, $E_1E_2 = H$. З трикутників $A_1A_4M_1$ і $A_2A_3M_2$ за теоремою синусів матимемо: $A_1M_1 = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, $A_2M_2 = \dfrac{b}{\sqrt{3}}$. З трикутників $A_1M_1E_1$ і $A_2M_2E_2$

$$M_1E_1 = \frac{a}{2\sqrt{3}},\; M_2E_2 = \frac{b}{2\sqrt{3}},\; M_1M_2 = H - \frac{a+b}{2\sqrt{3}}.$$

Довжина мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах рівнобедреної трапеції, буде

$$l = 2\left(\frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{b}{\sqrt{3}}\right) + H - \frac{a+b}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(a+b)}{2} + H$$

за умови, що $\dfrac{A_2P}{A_4P} = \dfrac{H}{0,5(a+b)} > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, або $\angle A_1A_4A_2 > 30°$ (рис. 15).

Така сама методика і побудови мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах довільної трапеції.

Побудова мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах довільного неопуклого чотирикутника. Тут пошук мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах неопуклого чотирикутника, ґрунтується на теоремі про точку Торрічеллі, її наслідках та властивостях мінімальної сітки сполучення об'єктів. Як відомо, в неопуклому чотирикутнику увігнутий кут завжди більший від 180°, бо в протилежному випадку він перетворився б у трикутник. Кут, який його доповнює до повного кута, розміщений ззовні чотирикутника і завжди менший від 180°. У такому випадку, залежно від увігнутого кута, потрібно розглянути три випадки (рис. 16):

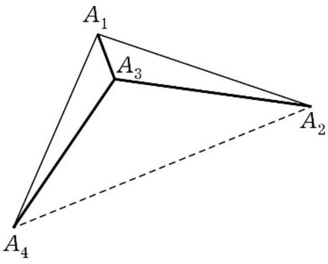

Рис. 16

а) увігнутий кут дорівнює 240°;

б) менший від 240°;

в) більший від 240°.

У перших двох випадках кут $A_2A_3A_4$, який доповнює увігнутий кут до повного кута, становить 120°, або більший від 120°. Тоді, згідно з наслідками з теореми про точку Торрічеллі, для трикутника $A_2A_3A_4$ вузловою точкою буде вершина A_3 увігнутого кута неопуклого чотирикутника $A_1A_2A_3A_4$. Звідси мінімальна сітка сполучення трьох об'єктів A_2, A_3 і A_4 трикутника $A_2A_3A_4$ складатиметься з двох відрізків A_2A_3 і A_3A_4, які є сторонами увігнутого кута неопуклого чотирикутника. Оскільки $A_1A_3 < A_1A_2$ і $A_1A_3 < A_1A_4$, то мінімальна сітка сполучення чотирьох об'єктів A_1, A_2, A_3 і A_4, розміщених у вершинах неопуклого чотирикутника, складатиметься з трьох відрізків A_3A_1, A_3A_2 і A_3A_4. Її довжина дорівнюватиме сумі довжин трьох відрізків: $l = A_1A_3 + A_2A_3 + A_4A_3$.

Математичну модель, подану геометричною фігурою на рис. 16, запишемо за допомогою формули. Якщо $A_1A_2 = a$, $A_2A_3 = b$, $A_3A_4 = c$,

$\angle A_1A_2A_3 = \gamma$, то згідно з теоремою косинусів з трикутника $A_1A_2A_3$ матимемо $A_1A_3 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$. Оскільки A_3 є вузловою точкою мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах неопуклого чотирикутника, то її довжина

$$l = b + c + \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}.$$

Якщо увігнутий кут більший від 240°, то кут $A_2A_3A_4$ (який його доповнює до повного кута) менший від 120°. Тому для трикутника $A_2A_3A_4$, згідно з теоремою про точку Торрічеллі, вузловою точкою мінімальної сітки сполучення трьох об'єктів A_2, A_3 і A_4 буде точка Торрічеллі M всередині трикутника $A_2A_3A_4$ (спосіб побудови точки M зображено на рис. 1). Оскільки в точці A_3 з'єднуються два відрізки A_1A_3 і A_3M, які утворюють два кути, кожний з яких більший від 120°, то згідно з третьою властивістю мінімальної сітки сполучення точка A_3 буде другою вузловою точкою мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах неопуклого чотирикутника. Як бачимо, мінімальна сітка сполучення об'єктів складається з чотирьох відрізків: A_1A_3, A_2M, A_3M і A_4M (рис. 17).

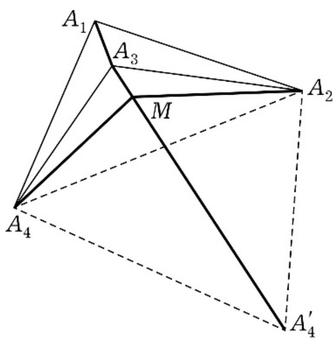

Рис. 17

Для заміни математичної моделі, поданої у вигляді геометричної фігури (рис. 17), формулою побудуємо рівносторонній трикутник $A_2A_4A_4'$. Згідно з теоремою про точку Торрічеллі з трикутника $A_2A_3A_4$ матимемо: $A_3A_4' = A_2M + A_3M + A_4M$. Нехай $A_1A_2 = a$, $A_2A_3 = b$, $A_3A_4 = c$, $\angle A_2A_3A_4 = \alpha$, $\angle A_3A_2A_4 = \beta$, $\angle A_1A_2A_3 = \gamma$. Тоді, користуючись теоремою косинусів, з трикутника $A_2A_3A_4$ дістанемо: $(A_2A_4)^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. Оскільки в трикутнику $A_2A_4A_4'$ маємо $A_2A_4 = A_2A_4'$, то згідно з теоремою косинусів

$$(A_3A_4')^2 = b^2 + (A_2A_4')^2 - 2b \cdot A_2A_4'\cos(60° + \beta) =$$

$$= 2b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha - 2b\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}\cos(60° + \beta).$$

Отже, $l = \sqrt{2b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha - 2b\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}\cos(60° + \beta)} + \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$.

Таким чином, для об'єктів, розміщених у вершинах довільного чотирикутника, можна також побудувати мінімальну сітку сполучення. Крім цього, на лінії мінімальної сітки можуть розташовуватися й інші об'єкти.

Висновки та перспективи подальших досліджень. Сформульовані і доведені властивості мінімальної сітки сполучення об'єктів, а також дві теореми, на основі яких побудовані вузлові точки мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах довільного трикутника та чотирикутника, визначено довжину мінімальної сітки, можливості її побудови та геометричне місце розташування. Подані математичні моделі у вигляді формул та геометричних фігур для побудови мінімальних сіток сполучення об'єктів, розміщених у вершинах довільних трикутників та чотирикутників. Вказано спосіб визначення кількості вузлових точок у кожному випадку, а також елементів, потрібних для встановлення довжини мінімальної сітки. Слід відмітити, що кожна така проблема вимагає індивідуального підходу до розв'язання. Таким чином, можна зробити висновок про доцільність використання способів побудови мінімальної сітки сполучення об'єктів як геометричних моделей виробничих процесів, а їх застосування забезпечить можливість оптимального планування, побудови мінімальної довжини електричної лінії, водопроводу, газопроводу, каналізації, визначення місця розміщення станцій різного призначення тощо. Проте побудова мінімальних сіток сполучення для інших многокутників потребує подальшого дослідження.

1. *Возняк Г. М., Гусев В. А.* Прикладные задачи на екстремумы. – Москва: Просвещение, 1985. – 144 с.
2. *Возняк О. Г., Голубник О. Р.* Побудова економічних емпіричних формул методом табличних різниць // Вісник ОНУ імені І. І. Мечникова. Сер.: Економіка. – 2022. – 27, вип. 1 (91). – С. 75–81.
3. *Courant Richard, Robbins Herbert.* What is Mathematics? – Rev. by Ian Stewart. – N.-Y., Oxford: Oxford University Press, 1996. – 590 p.
4. Steinhaus Hugo. One hundred problems in elementary mathematics. – N.-Y., Dover Publications, 1979. – 174 p.

CONSTRUCTION OF A MINIMAL GRID CONNECTING THREE AND FOUR OBJECTS, ARBITRARILY PLACED ON THE PLANE

The optimal problems related to the construction of the shortest grid of connecting lines for a certain number of objects placed on the plane are considered. In general, a system of points (objects) is given and a minimal grid of lines connecting them is built. Methods for constructing the shortest line connecting certain objects have been developed and substantiated. Optimal schemes for connecting objects are built using proven theorems. Methods of connecting objects placed at the vertices of a polygon are proposed.

Keywords: Torricelli point, minimal grid, mathematical model, optimal lines, nodal points, total segments, algorithm, geometric transformations.

Західноукраїнський нац. ун-т, Тернопіль

Одержано
10.10.23