https://doi.org/10.15407/apmm2023.21.108-119

УДК 517.95+511.2

Т. М. Бокало[1], М. М. Симотюк[2]✉

ПРО ОЦІНКИ МІР ПІДРІВНЕВИХ МНОЖИН ГЛАДКИХ ФУНКЦІЙ

Встановлено оцінки зверху для міри Лебега підрівневої множини гладкої функції, результат дії на яку диференціального виразу третього порядку не дорівнює нулю. Розглянуто часткові випадки, коли диференціальний вираз допускає факторизацію за Поя. Наведено застосування отриманих результатів для доведення метричних оцінок знизу малих знаменників, які виникають під час дослідження триточкових задач для навантажених рівнянь з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами.

Ключові слова: *міра Лебега, факторизація диференціального виразу, триточкова задача, навантажене рівняння з частинними похідними.*

Вступ. Домовимося про такі позначення: $C^m(I)$ ($m \in N \cup \{0\}$) – простір дійснозначних функцій, m раз неперервно диференційовних на проміжку I, $\operatorname{mes} A$ – міра Лебега вимірної множини $A \subset R$,

$$E(f, \varepsilon, I) = \{t \in I : | f(t) | < \varepsilon\}, \ \varepsilon > 0,$$

де $f : I \to R$ – функція, задана на проміжку $I \subset R$. Множину $E(f, \varepsilon, I)$ назвемо ε-підрівневою для функції f на проміжку I. Мірі Лебега цієї множини можна дати таку фізичну інтерпретацію: якщо $f(t)$ – відхилення матеріальної точки від положення рівноваги у момент часу t, то $\operatorname{mes} E(f, \varepsilon, I)$ – це сумарна тривалість часу за проміжок I, упродовж якого матеріальна точка перебуває в ε-околі положення рівноваги. Твердження про оцінки мір підрівневих множин гладких функцій використовують під час розв'язання проблеми малих знаменників у задачах для рівнянь із частинними похідними, у метричній теорії чисел (див., наприклад, праці [1, 6–8, 12, 14] та бібліографію там).

У публікації [11] встановлено такий результат про оцінку зверху мір ε-підрівневих множин.

Теорема A. *Нехай функції* $f \in C^{n+1}[a,b]$, $a_j \in C[a,b]$, $j = 1, \ldots, n$, *є такими, що для всіх* $t \in [a,b]$ *виконується нерівність*

$$\left| L_n\left(\frac{d}{dt}\right) f(t) \right| \equiv \left| f^{(n)}(t) + a_1(t) f^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n(t) f(t) \right| \ge \delta > 0. \qquad (1)$$

Тоді для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0 / 2)$ *виконується оцінка*

$$\operatorname{mes} E(f, \varepsilon, [a,b]) \le C_1 \max\left\{1, \frac{M}{\delta} G_1^n\right\} \sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{\delta}}, \qquad (2)$$

де $\varepsilon_0 = \dfrac{\delta}{(n+1) G_1^n}$, $G_1 = 1 + \max\limits_{1 \le j \le n} \max\limits_{t \in [a,b]} \sqrt[j]{| a_j(t) |}$, $M = \sum\limits_{j=1}^{n+1} \max\limits_{t \in [a,b]} \left| f^{(j)}(t) \right|$, C_1 – *додатна стала, яка залежить тільки від* n *і* $(b-a)$.

Теорему A застосовано у праці [11] для оцінок знизу малих знаменників [6], які виникають під час дослідження багатоточкових задач для рівнянь з частинними похідними. Хоча в умові (1) присутні похідні функції f лише до

✉ mykhailo.m.symotiuk@gmail.com

порядку n включно, припущення про її диференційовність до порядку $(n+1)$ є суттєвим (див. [11]) для доведення оцінки (2).

Проте для оцінок знизу малих знаменників, які виникають у задачах з багатоточковими умовами для навантажених рівнянь з частинними похідними, виникає потреба встановити оцінки зверху міри ε-підрівневої множини для функції f, порядок гладкості якої на відрізку $[a,b]$ збігається з порядком n диференціального виразу $L_n(d/dt)$ в умові (1). Для часткових випадків, коли $L_n(d/dt)=(d/dt)^n$ (тобто $a_j(t)\equiv 0$, $j=1,\dots,n$) або вираз $L_n(d/dt)$ допускає факторизацію

$$L_n\left(\frac{d}{dt}\right)\equiv\left(\frac{d}{dt}-b_1(t)\right)\dots\left(\frac{d}{dt}-b_n(t)\right), \tag{3}$$

де $b_j\in C^{j-1}[a,b]$, $j=1,\dots,n$, а дія диференціальних множників у (3) береться справа наліво, такі оцінки доведено у працях [2, 3, 5–8, 10, 12, 14].

Зокрема, якщо $f\in C^n[a,b]$ і $\left|f^{(n)}(t)\right|\ge\delta$ для всіх $t\in[a,b]$, доведено [2, 3, 5, 10], що для довільного $\varepsilon>0$ виконується оцінка

$$\operatorname{mes}E(f,\varepsilon,[a,b])\le C_2(n)\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{\delta}},$$

де $C_2(n)$ – додатна стала, яка залежить тільки від n. Якщо $f\in C^n[a,b]$ і в кожній точці $t\in[a,b]$

$$\left|\left(\frac{d}{dt}-b_1(t)\right)\dots\left(\frac{d}{dt}-b_n(t)\right)f(t)\right|>\delta,$$

встановлено [8, 10], що для довільного $\varepsilon>0$ справджується оцінка

$$\operatorname{mes}E(f,\varepsilon,[a,b])\le C_3(n)\sqrt[n]{\frac{\varepsilon\exp(\nu(b-a))}{\delta}},\quad C_3(n)=n\,2^{(n+1)/2},\quad \nu=\sum_{j=1}^{n}\max_{t\in[a,b]}|b_j(t)|.$$

Оцінки зверху для $\operatorname{mes}E(f,\varepsilon,[a,b])$ отримано у праці [5] для випадку, коли $f\in C^n[a,b]$, коефіцієнти диференціального виразу в умові (1) є сталими і відомі оцінки для кількостей нулів (які потрапляють на $[a,b]$) функцій $f^{(j)}(t)\pm f^{(q)}(t)$, $0\le j<q\le n$. Якщо функція f є нетривіальним розв'язком звичайного диференціального рівняння зі сталими або змінними коефіцієнтами, оцінки зверху для $\operatorname{mes}E(f,\varepsilon,[a,b])$ встановлено у праці [11].

Для довільних функцій $f\in C^n[a,b]$ та змінних коефіцієнтів $a_j(t)$, $j=1,\dots,n$, в умові (1) питання про оцінку зверху для $\operatorname{mes}E(f,\varepsilon,(a,b))$ залишається відкритим. У праці [8] вказана прогалина вирішена для випадку, коли $n=2$. Це дослідження присвячене випадку, коли $n=3$.

1. **Формулювання основного результату**. Тут основним результатом є таке твердження.

Теорема B. *Нехай функції* $f\in C^3[a,b]$, $a_j\in C^{3-j}[a,b]$, $j=1,2,3$, *є такими, що для всіх* $t\in[a,b]$ *виконується нерівність*

$$\left|L_3\left(\frac{d}{dt}\right)f(t)\right|\equiv\left|f'''(t)+a_1(t)f''(t)+a_2(t)f'(t)+a_3(t)f(t)\right|\ge\delta>0. \tag{4}$$

Тоді для довільного $\varepsilon>0$ *справджується оцінка*

$$\operatorname{mes}E(f,\varepsilon,[a,b])\le C_4H^2\exp(4\alpha(b-a))\sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{\delta}}, \tag{5}$$

де $C_4 > 0$ *– стала, яка залежить тільки від* $b-a$, $H = 1+\alpha^2$, $\alpha = \sqrt{1+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}$, $\alpha_j = \| a_j(t) \|_{C^{3-j}[a,b]}$, $j = 1,2,3$.

Доведення теореми В ґрунтується на допоміжних теоремах 1–3. Зокрема, нижче у теоремі 1 встановлено оцінку зверху для міри множини $E(f,\varepsilon,[a,b])$, якщо диференціальний вираз у формулі (4)

$$L_3\left(\frac{d}{dt}\right) = \frac{d^3}{dt^3} + a_1(t)\frac{d^2}{dt^2} + a_2(t)\frac{d}{dt} + a_3(t), \quad a_j \in C[a,b], \quad j = 1,2,3, \tag{6}$$

на всьому відрізку $[a,b]$ допускає факторизацію за Поя [13, 15, 16], тобто існують такі функції $q_j \in C^{3-j}[a,b]$, $j = 0,1,2,3$, що для довільної функції $f \in C^3[a,b]$ виконується рівність

$$L_3\left(\frac{d}{dt}\right) f(t) = q_3(t)\frac{d}{dt}\left[q_2(t)\frac{d}{dt}\left(q_1(t)\frac{d}{dt}\{q_0(t)f(t)\}\right)\right]. \tag{7}$$

У теоремі 1 верхні оцінки для мір $\operatorname{mes} E(f,\varepsilon,[a,b])$ містять максимуми модулів коефіцієнтів $q_j(t)$, $j = 0,1,2,3$, факторизації (7) на відрізку $[a,b]$.

Факторизацію (7) на всьому відрізку $[a,b]$ допускають ті і тільки ті диференціальні вирази (6), які володіють властивістю неосциляції [13, 15, 18]: кожен нетривіальний розв'язок диференціального рівняння 3-го порядку

$$L_3\left(\frac{d}{dt}\right) f(t) \equiv f'''(t) + a_1(t)f''(t) +$$
$$+a_2(t)f'(t) + a_3(t)f(t) = 0, \quad a_j \in C[a,b], j = 1,2,3, \tag{8}$$

має на $[a,b]$ не більше ніж два нулі [9, 17], ураховуючи кратність; при цьому, коефіцієнти $q_j \in C^{3-j}[a,b]$, $j = 0,1,2,3$, факторизації (7) для неосцилюючого на $[a,b]$ виразу (7) можна подати через таку систему розв'язків $f_j \in C^3[a,b]$, $j = 1,2,3$, рівняння (8), що $f_1(t) \cdot W(f_1, f_2)(t) \cdot W(f_1, f_2, f_3)(t) \neq 0$ для всіх $t \in [a,b]$ (тут $W(f_1, f_2)(t)$ та $W(f_1, f_2, f_3)(t)$ – вронскіани систем функцій f_1, f_2 та f_1, f_2, f_3 відповідно). Існування такої фундаментальної системи розв'язків $f_j \in C^3[a,b]$, $j = 1,2,3$, для неосцилюючого на відрізку $[a,b]$ виразу (6) випливає з умови W (див. [13, 16, 18]).

Теорема Валле-Пуссена [9, 17] забезпечує виконання умови W на відрізку малої довжини для довільного диференціального виразу (6) з неперервними коефіцієнтами. У цій праці побудовано розбиття $[a,b]$ на дрібніші відрізки $I_1,\dots,I_N$, на кожному з яких вираз (6) з гладкими коефіцієнтами допускає факторизацію вигляду (7); водночас вказано формули знаходження коефіцієнтів факторизації (7), знайдено оцінки для цих коефіцієнтів на кожному з відрізків розбиття, а також наведено оцінки для кількості N проміжків цього розбиття (див. нижче теореми 2, 3). Таким чином, оцінка (5) випливає з нерівності

$$\operatorname{mes} E(f,\varepsilon,(a,b)) \le \sum_{j=1}^{N} \operatorname{mes} E(f,\varepsilon,I_j) \le N \max_{1\le j\le N} \operatorname{mes} E(f,\varepsilon,I_j)$$

та результатів, доведених у теоремах 1–3.

Теорему В застосовано для доведення теореми 4 про метричні оцінки знизу малих знаменників, які виникають у триточкових задачах для навантажених рівнянь з частинними похідними.

2. **Факторизований диференціальний вираз**. Встановимо оцінку зверху

для міри множини $E(f,\varepsilon,[a,b])$ у випадку, коли вираз $L_3(d/dt)$ допускає факторизацію (7). Для цього потрібні такі твердження.

Лема 1. (див. [8]). *Нехай функції* $f,q_0\in C^1[a,b]$, $q_1\in C[a,b]$ *є такими, що для всіх* $t\in[a,b]$ *виконується нерівність*

$$\left|q_1(t)\frac{d}{dt}\{q_0(t)f(t)\}\right|>\delta,\quad \delta>0.$$

Тоді для довільного $\varepsilon>0$ *справджується оцінка*

$$\operatorname{mes}E(f,\varepsilon,[a,b])\le 2\varepsilon Q_0Q_1/\delta,\qquad Q_j=\max_{t\in[a,b]}|q_j(t)|,\quad j=0,1.$$

Лема 2. (див. [8]). *Якщо функції* $f,q_0\in C^2[a,b]$, $q_1\in C^1[a,b]$, $q_2\in C[a,b]$ *є такими, що для всіх* $t\in[a,b]$ *виконується умова*

$$\left|q_2(t)\frac{d}{dt}\left(q_1(t)\frac{d}{dt}\{q_0(t)f(t)\}\right)\right|>\delta,\quad \delta>0,$$

то для довільного $\varepsilon>0$ *справджується оцінка*

$$\operatorname{mes}E(f,\varepsilon,[a,b])\le 4\left(2\varepsilon Q_0Q_1Q_2/\delta\right)^{1/2},\quad Q_j=\max_{t\in[a,b]}|q_j(t)|,\ j=0,1,2.$$

Теорема 1. *Нехай функції* $f\in C^3[a,b]$, $q_j\in C^{3-j}[a,b]$, $j=0,1,2,3$, *є такими, що для всіх* $t\in[a,b]$ *виконується нерівність*

$$\left|q_3(t)\frac{d}{dt}\left[q_2(t)\frac{d}{dt}\left(q_1(t)\frac{d}{dt}\{q_0(t)f(t)\}\right)\right]\right|>\delta,\quad \delta>0. \tag{9}$$

Тоді для довільного $\varepsilon>0$ *справджується оцінка*

$$\operatorname{mes}E(f,\varepsilon,[a,b])\le 12\left(\varepsilon Q_0Q_1Q_2Q_3/\delta\right)^{1/3}, \tag{10}$$

де $Q_j=\max_{t\in[a,b]}|q_j(t)|$, $j=0,1,2,3$.

Доведення. Нехай $h(t)\equiv q_2(t)\frac{d}{dt}\left(q_1(t)\frac{d}{dt}\{q_0(t)f(t)\}\right)$. Множину $E(f,\varepsilon,[a,b])$ покриємо двома множинами $M_1(\eta)$, $M_1(\varepsilon,\eta)$, $\eta>0$:

$$E(f,\varepsilon,[a,b])\subset M_1(\eta)\cup M_1(\varepsilon,\eta),$$

де $M_1(\eta)=\{t\in[a,b]:|h(t)|\le\eta\}$, $M_2(\varepsilon,\eta)=\{t\in[a,b]:|f(t)|<\varepsilon,|h(t)|>\eta\}$.

Множина $M_1(\eta)\setminus\{a,b\}$ з точністю до множини $\{t\in(a,b):|h(t)|=\eta\}$, яка може складатися не більш ніж з двох точок, збігається з η-підрівневою множиною функції h на проміжку (a,b). З умови (9) випливає, що для всіх $t\in[a,b]$ виконується оцінка $|q_3(t)h'(t)|>\delta$. Тому за лемою 1 для довільного $\eta>0$

$$\operatorname{mes}M_1(\eta)=\operatorname{mes}E(h,\eta,[a,b])\le 2\eta Q_3/\delta.$$

Зі строгої монотонності функції h на (a,b) випливає, що множина $\{t\in(a,b):|h(t)|>\eta\}$ може складатися щонайбільше з двох неперетинних проміжків. Застосовуючи на кожному з цих проміжків лему 2, отримаємо, що

$$\operatorname{mes}M_2(\varepsilon,\eta)\le 8\left(2\varepsilon Q_0Q_1Q_2/\eta\right)^{1/2}.$$

Таким чином, для довільного $\eta>0$ виконується оцінка

$$\operatorname{mes} E(f,\varepsilon,[a,b]) \le \operatorname{mes} M_1(\eta) + \operatorname{mes} M_2(\varepsilon,\eta) \le \frac{2\eta Q_3}{\delta} + 8\sqrt{\frac{2\varepsilon Q_0 Q_1 Q_2}{\eta}}.$$

Мінімум правої частини отриманої нерівності як функції від η на проміжку $(0;\infty)$ досягається при $\eta = \eta^*$, $\eta^* = 2\left(\varepsilon Q_0 Q_1 Q_2 \delta^2 / Q_3^2\right)^{1/3}$. Отже,

$$\operatorname{mes} E(f,\varepsilon,[a,b]) \le \frac{2\eta^* Q_2}{\delta} + 8\sqrt{\frac{2\varepsilon Q_0 Q_1 Q_2}{\eta^*}} = 12\left(\varepsilon Q_0 Q_1 Q_2 Q_3 / \delta\right)^{1/3}.$$

З теореми 1 випливають такі наслідки про оцінку міри ε-підрівневої множини функції f на відрізку $[a,b]$, дія на яку диференціального виразу зі сталими коефіцієнтами не перетворюється в нуль на $[a,b]$.

Наслідок 1. *Якщо* $f \in C^3[a,b]$, $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in R$ *і для всіх* $t \in [a,b]$ *виконується нерівність*

$$\left| f'''(t) - (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) f''(t) + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) f'(t) - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 f(t)\right| > \delta, \quad \delta > 0,$$

то для довільного $\varepsilon > 0$

$$\operatorname{mes} E(f,\varepsilon,[a,b]) \le 12\left(\varepsilon \exp(\nu) / \delta\right)^{1/3}, \tag{11}$$

де $\nu = \nu_0 + \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$, $\nu_0 = \max\{-\lambda_1 a, -\lambda_1 b\}$, $\nu_1 = \max\{(\lambda_1-\lambda_2)a, (\lambda_1-\lambda_2)b\}$, $\nu_2 = \max\{(\lambda_2-\lambda_3)a, (\lambda_2-\lambda_3)b\}$, $\nu_3 = \max\{\lambda_3 a, \lambda_3 b\}$.

Доведення. Легко перевірити, що

$$f'''(t) - (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) f''(t) + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) f'(t) - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 f(t) =$$

$$= e^{\lambda_3 t} \frac{d}{dt}\left[e^{(\lambda_2-\lambda_3)t} \frac{d}{dt}\left(e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} \frac{d}{dt}\left\{ e^{-\lambda_1 t} f(t)\right\}\right)\right].$$

Оскільки $e^{\nu_0} = \max\limits_{t\in[a,b]} e^{-\lambda_1 t}$, $e^{\nu_1} = \max\limits_{t\in[a,b]} e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}$, $e^{\nu_2} = \max\limits_{t\in[a,b]} e^{(\lambda_2-\lambda_3)t}$, $e^{\nu_3} = \max\limits_{t\in[a,b]} e^{\lambda_3 t}$, то оцінка (11) є наслідком оцінки (10).

Наслідок 2. *Якщо* $f \in C^3[a,b]$, $[a,b] \subset \left(-\pi/(2\mu), \pi/(2\mu)\right)$, $\mu > 0$, *і для всіх* $t \in [a,b]$ *виконується нерівність*

$$\left| f'''(t) + \mu^2 f'(t)\right| > \delta, \quad \delta > 0,$$

то для довільного $\varepsilon > 0$

$$\operatorname{mes} E(f,\varepsilon,[a,b]) \le 6(4\varepsilon Q^2 / \delta)^{1/3}, \qquad Q = \max\{(\cos a)^{-1}, (\cos b)^{-1}\}. \tag{12}$$

Доведення. Оскільки $\max\limits_{t\in[a,b]} \left|\cos(\mu t)\right|^{-1} \le \max\{(\cos a)^{-1}, (\cos b)^{-1}\}$, то з очевидної рівності

$$f'''(t) + \mu^2 f'(t) = \frac{1}{\cos(\mu t)} \frac{d}{dt}\left(\cos^2(\mu t) \frac{d}{dt}\left\{ \frac{f'(t)}{\cos(\mu t)}\right\}\right)$$

випливає оцінка (12).

Зауважимо, що у випадку, коли функція $f(t)$ є квазімногочленом, для $\operatorname{mes} E(f,\varepsilon,[a,b])$ можна отримати точніші оцінки, ніж (11), (12) (див., наприклад, працю [5]).

3. **Розбиття відрізка**, **підпорядковані системам функцій**. Запровадимо поняття розбиття відрізка, підпорядковане системі трьох функцій, заданих на ньому, а також встановимо деякі властивості таких розбиттів.

Нехай $f_j \in C^2[a,b]$, $j = 1,2,3$. Символом $W(f_1, f_2, f_3)(t)$ позначимо вронскіан системи функцій f_1, f_2, f_3, а символом $W(f_r, f_s)(t)$, $r \neq s$, – вронскіан функцій f_r, f_s. Розбиттям R відрізка $[a,b]$ назвемо таку скінченну кількість точок $t_0, t_1, \ldots, t_N$, що $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$, а відрізки $I_j = [t_{j-1}, t_j]$, $j = 1,\ldots,N$, – відрізками розбиття R.

***Означення** 1. Розбиття R відрізка $[a,b]$ назвемо підпорядкованим системі трьох функцій f_1, f_2, f_3, якщо для кожного відрізка I_j, $j \in \{1,\ldots,N\}$, цього розбиття знайдуться такі числа $q(j), r(j), s(j)$, $1 \le r(j) < s(j) \le 3$, $q(j) \in \{r(j), s(j)\}$, що виконуються рівності*

$$\forall\, t \in I_j \quad | W(f_{r(j)}, f_{s(j)})(t) | = \max\{| W(f_\alpha, f_\beta)(t) | : 1 \le \alpha < \beta \le 3\}, \tag{13}$$

$$\forall\, t \in I_j \quad | f_{q(j)}(t) | = \max\{| f_{r(j)}(t) |, | f_{s(j)}(t) |\}. \tag{14}$$

Наведемо приклади розбиттів, підпорядкованих системам функцій.

Приклад 1. Розбиття $[0,T] = [0,\ln 2] \cup [\ln 2, T]$ (де $T > \ln 2$) – підпорядковане системі функцій $f_1(t) = e^t$, $f_2(t) = e^{2t}$, $f_3(t) = e^{3t}$. Дійсно, для цієї системи $W(f_1, f_2)(t) = e^{3t}$, $W(f_1, f_3)(t) = 2e^{4t}$, $W(f_2, f_3)(t) = e^{5t}$. Тому для всіх чисел $t \in [0, \ln 2]$ виконуються нерівності

$$| W(f_1, f_3)(t) | = 2e^{4t} \ge \max\{| W(f_1, f_2)(t) |, | W(f_1, f_3)(t) |\} = \max\{e^{3t}, e^{5t}\},$$

$$| f_3(t) | = e^{3t} \ge e^t = | f_1(t) |,$$

а для всіх $t \in [\ln 2, T]$ – нерівності

$$| W(f_2, f_3)(t) | = e^{5t} \ge \max\{| W(f_1, f_2)(t) |, | W(f_1, f_3)(t) |\} = \max\{e^{3t}, 2e^{4t}\},$$

$$| f_3(t) | = e^{3t} \ge e^{2t} = | f_2(t) |.$$

Приклад 2. Розбиття $[0, \pi/2] = [0, \pi/4] \cup [\pi/4, \pi/2]$ – підпорядковане системі функцій $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = \cos t$, $f_3(t) = \sin t$. Справді, у цьому випадку $W(f_1, f_2)(t) = -\sin t$, $W(f_1, f_3)(t) = \cos t$, $W(f_2, f_3)(t) = 1$. Очевидно, що для всіх $t \in [0, \pi/2]$ виконується нерівність

$$| W(f_2, f_3)(t) | = 1 \ge \max\{| W(f_1, f_2)(t) |, | W(f_1, f_3)(t) |\} = \max\{| \sin t |, | \cos t |\}.$$

Окрім того, для всіх $t \in [0, \pi/4]$ виконується оцінка $| f_2(t) | = | \cos t | \ge | \sin t | = | f_3(t) |$, а для всіх $t \in [\pi/4, \pi/2]$ – нерівність $| f_3(t) | = | \sin t | \ge | \cos t | = | f_2(t) |$.

Встановимо властивості розбиттів, підпорядкованих фундаментальній системі розв'язків звичайного диференціального рівняння (8).

Теорема 2. *Якщо розбиття R відрізка $[a,b]$ підпорядковане фундаментальній системі розв'язків f_1, f_2, f_3 звичайного диференціального рівняння* (8), *то на кожному з проміжків I_j, $j = 1,\ldots,N$, цього розбиття вираз* (6) *допускає факторизацію за Поя, тобто для будь-якої $f \in C^3[a,b]$*

$$L_3\left(\frac{d}{dt}\right) f(t) = q_{3,j}(t) \frac{d}{dt}\left[q_{2,j}(t) \frac{d}{dt}\left(q_{1,j}(t) \frac{d}{dt}\left\{ q_{0,j}(t) f(t) \right\}\right)\right], \quad t \in I_j. \tag{15}$$

Коефіцієнти $q_{0,j}(t), q_{1,j}(t), q_{2,j}(t), q_{3,j}(t)$ у (15) *визначають рівностями*

$$q_{3,j}(t)=\frac{W(f_1,f_2,f_3)(t)}{W(f_{r(j)},f_{s(j)})(t)},\quad q_{2,j}(t)=\frac{W^2(f_{r(j)},f_{s(j)})(t)}{f_{q(j)}(t)W(f_1,f_2,f_3)(t)},$$

$$q_{1,j}(t)=\frac{f^2_{q(j)}(t)}{W(f_{r(j)},f_{s(j)})(t)},\quad q_{0,j}(t)=\frac{1}{f_{q(j)}(t)},$$

де для кожного $j=1,\ldots,N$ *числа* $q(j),r(j),s(j)$ *є такими, як в означенні 1. У кожній точці* t *відрізка* I_j, $j=1,\ldots,N$, *виконуються нерівності*

$$|W(f_{r(j)},f_{s(j)})(t)|\geq\frac{|W(f_1,f_2,f_3)(t)|}{3F_2(t)},\quad F_2(t)=\max\{|f_j''(t)|: j=1,2,3\},\qquad(16)$$

$$|f_{q(j)}(t)|\geq\frac{|W(f_{r(j)},f_{s(j)})(t)|}{2F_1(t)},\quad F_1(t)=\max\{|f_j'(t)|: j=1,2,3\}.\qquad(17)$$

Доведення. Розвинемо вронскіан $W(f_1,f_2,f_3)(t)$ за елементами його останнього рядка:

$$W(f_1,f_2,f_3)(t)=f_1''(t)W(f_2,f_3)(t)-f_2''(t)W(f_1,f_3)(t)+f_3''(t)W(f_1,f_2)(t).\qquad(18)$$

Із розвинення (18) випливає, що в жодній точці t відрізка I_j функція $W(f_{r(j)},f_{s(j)})(t)$ не дорівнює нулю. Справді, якщо $t_0\in I_j$ і $W(f_{r(j)},f_{s(j)})(t_0)=0$, то з того, що розбиття R підпорядковане системі функцій f_1,f_2,f_3, випливає, що $W(f_1,f_2)(t_0)=W(f_2,f_3)(t_0)=W(f_1,f_3)(t_0)=0$, а отже, згідно з формулою (18), вронскіан $W(f_1,f_2,f_3)(t)$ дорівнює нулю в точці t_0. Це суперечить тому, що f_1,f_2,f_3 – фундаментальна система розв'язків рівняння (8). Аналогічно, на відрізку I_j функція $f_{q(j)}(t)$ не перетворюється в нуль. Дійсно, якщо $t_0\in I_j$ і $f_{q(j)}(t_0)=0$, то з того, що розбиття R підпорядковане системі f_1,f_2,f_3, випливає, що $f_{r(j)}(t_0)=0$, $f_{s(j)}(t_0)=0$, а отже, $W(f_{r(j)},f_{s(j)})(t_0)=0$. Це суперечить тому, що $W(f_{r(j)},f_{s(j)})(t)$ відмінний від нуля на відрізку I_j. Таким чином, знаменники у формулі (15) не перетворюються в нуль.

Якщо $W(f_{r(j)},f_{s(j)})(t)\neq 0$ і $f_{q(j)}(t)\neq 0$ для всіх $t\in I_j$, то істинність формули (15) є відомим фактом [13, 15, 16] і випливає зі співвідношень

$$L_3\left(\frac{d}{dt}\right)f(t)=\frac{W(f_1,f_2,f_3,f)(t)}{W(f_1,f_2,f_3)(t)}=\frac{W(f_1,f_2,f_3)(t)}{W(f_{r(j)},f_{s(j)})(t)}\cdot\frac{d}{dt}\left[\frac{W(f_{r(j)},f_{s(j)},f)(t)}{W(f_1,f_2,f_3)(t)}\right],$$

$$\frac{W(f_{r(j)},f_{s(j)},f)(t)}{W(f_1,f_2,f_3)(t)}=\frac{W^2(f_{r(j)},f_{s(j)})(t)}{f_{q(j)}(t)W(f_1,f_2,f_3)(t)}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{W(f_{q(j)},f)(t)}{W(f_{r(j)},f_{s(j)})(t)}\right)=$$

$$=\frac{W^2(f_{r(j)},f_{s(j)})(t)}{f_{q(j)}(t)W(f_1,f_2,f_3)(t)}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{f^2_{q(j)}(t)}{W(f_{r(j)},f_{s(j)})(t)}\frac{d}{dt}\left\{\frac{f(t)}{f_{q(I_j)}(t)}\right\}\right),\quad t\in I_j,$$

які легко перевірити.

Нарешті, зауважимо, що оцінки (16), (17) є наслідками розвинень вронскіанів $W(f_1,f_2,f_3)(t)$, $W(f_{r(j)},f_{s(j)})(t)$ за елементами їхніх останніх рядків.

Для доведення наступної теореми використаємо такі допоміжні твердження, які випливають з теореми Валле-Пуссена [9, 17].

Лема 3. *Нехай функція* $f:[a,b]\to R$ *є ненульовим розв'язком рівняння* (8), *коефіцієнти* $a_j(t)$, $j=1,2,3$, *якого є неперервними функціями на* $[a,b]$.

Тоді кількість нулів функції f *на відрізку* $[a,b]$ *не перевищує* $C_5 H$*, де* $C_5 = 2 + 6(b-a)$*, а стала* H *– така, як у теоремі B.*

Позначимо: $V_{r,s}(t) = W(f_r, f_s)(t) \,/\, W(f_1, f_2, f_3)(t)$, $1 \le r < s \le 3$, де f_1, f_2, f_3 – фундаментальна система розв'язків рівняння (8).

Лема 4. *Якщо* $a_j \in C^{3-j}[a,b]$, $j = 1,2,3$*, то функції* $V_{1,2}(t)$, $V_{1,3}(t)$, $V_{2,3}(t)$ *на відрізку* $[a,b]$ *є ненульовими розв'язками рівняння*[1]

$$f'''(t) - (a_1(t) f(t))'' + (a_2(t) f(t))' - a_3(t) f(t) = 0. \tag{19}$$

Кількість нулів кожної з функцій $V_{1,2}(t)$, $V_{1,3}(t)$, $V_{2,3}(t)$ *на відрізку* $[a,b]$ *не перевищує* $C_5 H$*, де* $C_5 = 2 + 6(b-a)$*, а стала* H *– така, як у теоремі B.*

Сконструюємо тепер розбиття S, підпорядковане фундаментальній системі розв'язків f_1, f_2, f_3 звичайного диференціального рівняння (8) з гладкими коефіцієнтами $a_j \in C^{3-j}[a,b]$, $j = 1,2,3$. Нехай P – множина, утворена точками a, b і нулями (які потрапляють на $[a,b]$) усеможливих функцій

$$V^{\pm}_{r,s;\alpha,\beta}(t) = V_{r,s}(t) \pm V_{\alpha,\beta}(t), \quad 1 \le r < s \le 3, \quad 1 \le \alpha < \beta \le 3,$$

тут (r,s) і (α,β) – різні пари. Через $t_0, t_1, \ldots, t_{N_1}$ позначимо точки, що утворюють множину P, причому $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N_1} = b$. Зауважимо, що за лемою 4 виконується оцінка $N_1 \le C_6 H$.

Згідно з побудовою розбиття P на кожному з його відрізків $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \ldots, N_1$, знайдуться такі числа $r(j) < s(j)$, що модуль функції $V_{r(j),s(j)}(t)$ буде максимальним серед модулів інших функцій $V_{\alpha,\beta}(t)$ на $[t_{j-1}, t_j]$, тобто

$$\forall\, t \in [t_{j-1}, t_j] \qquad |V_{r(j),s(j)}(t)| = \max\{|V_{\alpha,\beta}(t)| : 1 \le \alpha < \beta \le 3\}. \tag{20}$$

Враховуючи означення функцій $V_{\alpha,\beta}(t)$, з рівностей (20) отримуємо, що

$$\forall\, t \in [t_{j-1}, t_j] \qquad |W(f_{r(j)}, f_{s(j)})(t)| = \max\{|W(f_\alpha, f_\beta)(t)| : 1 \le \alpha < \beta \le 3\}.$$

Нехай тепер P_j – множина, утворена точками t_{j-1}, t_j і нулями (які потрапляють на $[t_{j-1}, t_j]$) функцій $f_{r(j)}(t) \pm f_{s(j)}(t)$ і нехай $\xi_{j,0}, \xi_{j,1}, \ldots, \xi_{j,N_2(j)}$ – точки, що утворюють множину P_j, причому $t_{j-1} = \xi_{j,0} < \xi_{j,1} < \ldots < \xi_{j,N_2(j)} = t_j$. За лемою 3 для кожного $j = 1, \ldots, N_1$ виконуються оцінки $N_2(j) \le C_6 H$.

Легко перевірити, що для кожного $j = 1, \ldots, N_1$ на всьому відрізку $[\xi_{j,m-1}, \xi_{j,m}]$, $m = 1, \ldots, N_2(j)$, виконується або оцінка $|f_{r(j)}(t)| \ge |f_{s(j)}(t)|$, або оцінка $|f_{r(j)}(t)| \le |f_{s(j)}(t)|$, тобто існує таке число $q(j) \in \{r(j), s(j)\}$, що

$$\forall\, t \in [\xi_{j,m-1}, \xi_{j,m}] \quad |f_{q(j)}(t)| = \max\{|f_{r(j)}(t)|, |f_{s(j)}(t)|\}. \tag{21}$$

Покладемо: $S = P_1 \cup \ldots \cup P_{N_1}$, тобто S є подрібненням розбиття P. З наведених вище міркувань та умов (20), (21) випливає істинність такої теореми.

Теорема 3. *Сконструйоване розбиття* S *є підпорядкованим фундаментальній системі розв'язків* f_1, f_2, f_3*. Кількість* N *відрізків розбиття* S *не перевищує* $C_7 H^2$*, де стала* H *– така ж, як у теоремі B.*

4. **Доведення основного результату**. Використовуватимемо такі оцінки розв'язків задачі Коші для звичайного диференціального рівняння.

---

[1] перше твердження леми 4 добре відомий факт (див., наприклад, [4, с. 101]).

Лема 5. (див. [4, 13]). *Нехай функції* f_1, f_2, f_3 *на відрізку* $[a,b]$ *є розв'язками рівняння* (8), *коефіцієнти* $a_j(t)$, $j=1,2,3$, *якого є неперервними функціями на* $[a,b]$. *Якщо справджуються умови*

$$f_q^{(j-1)}(a)=\delta_{jq},\ \ j,q=1,2,3, \tag{22}$$

то для довільних $t\in[a,b]$ *виконуються оцінки*

$$\left|f_q^{(j-1)}(t)\right|\le C_8\exp(\alpha(b-a)),\ \ j,q=1,2,3, \tag{23}$$

де $C_8>0$, *стала* α *така ж, як у теоремі* B.

Перейдемо до доведення теореми B. Нехай $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ – така фундаментальна система розв'язків рівняння (8) на відрізку $[a,b]$, для якої виконуються умови (22). Нехай S – розбиття відрізка $[a,b]$, побудоване для цієї системи: $[a,b]=\bigcup_{j=1}^{N} I_j$, $N\le C_7H^2$. Оскільки S підпорядковане системі f_1, f_2, f_3, то за теоремою 2 на кожному з проміжків I_j, $j=1,\dots,N$, цього розбиття диференціальний вираз (6) допускає факторизацію за Поя (15). На підставі оцінок (23) у лемі 5, оцінок (10) у теоремі 1, з формул (11) отримуємо, що на кожному з проміжків I_j, $j=1,\dots,N$, для коефіцієнтів факторизації (15) виконуються такі нерівності:

$$|q_{3,j}(t)|\le C_9e^{\alpha(b-a)},\quad |q_{2,j}(t)|\le C_{10}e^{4\alpha(b-a)},\quad t\in I_j, \tag{24}$$

$$|q_{1,j}(t)|\le C_{11}e^{4\alpha(b-a)},\quad |q_{0,j}(t)|\le C_{12}e^{3\alpha(b-a)},\quad t\in I_j, \tag{25}$$

де $C_9,\dots,C_{12}>0$ – сталі, які залежать тільки від a,b. Застосуємо теорему 1 для оцінок зверху мір множин $E(f,\varepsilon,I_j)$, $j=1,\dots,N$. Враховуючи нерівності (24), (25), отримуємо, що для довільного $\varepsilon>0$

$$\operatorname{mes}E(f,\varepsilon,I_j)\le C_{13}e^{4\alpha(b-a)}(\varepsilon/\delta)^{1/3},\ \ j=1,\dots,N,\ \ C_{13}>0. \tag{26}$$

Оскільки $N\le C_7H^2$, то з оцінок (26) отримуємо:

$$\operatorname{mes}E(f,\varepsilon,(a,b))\le N\max_{1\le j\le N}\operatorname{mes}E(f,\varepsilon,I_j)\le C_{14}H^2e^{4\alpha(b-a)}(\varepsilon/\delta)^{1/3},$$

де C_{14} – додатна стала, яка залежить тільки від a,b.

5. **Метричні оцінки знизу малих знаменників**. Наведемо деякі застосування отриманих результатів. Позначимо: $x=(x_1,\dots,x_p)$, Ω^p – p-вимірний тор $(R/2\pi Z)^p$, $Q_T^p=\{(t,x): t\in(0,T), x\in\Omega^p\}$, $D_x=(-i\partial/\partial x_1,\dots,-i\partial/\partial x_p)$, $k=(k_1,\dots,k_p)\in Z^p$, $|k|=|k_1|+\dots+|k_p|$.

Під час дослідження розв'язності в області Q_T^p задачі з триточковими крайовими умовами для навантаженого рівняння з частинними похідними

$$\frac{\partial^3u(t,x)}{\partial t^3}+A_1(t,D)u(t,x)=f(t,x)+A_0(t,D)u(\xi,x),\quad \xi\in(0,T)\setminus\{T/2\},$$

$$u(0,x)=0,\quad u(T/2,x)=0,\quad u(T,x)=0,\quad x\in\Omega^p,$$

де

$$A_j(t,D)=\sum_{|s|\le M}A_j^s(t)(-i\partial/\partial x_1)^{s_1}\dots(-i\partial/\partial x_p)^{s_p},$$

$M \in N$, $A_j^s \in C[0,T]$, $j = 0,1$, $s = (s_1,\ldots,s_p) \in Z^p$, $|s| = s_1 + \ldots + s_p$, виникає потреба оцінити знизу модулі виразів

$$\Gamma_k(\xi) = \int_0^T G_k(\xi,\tau)A_0(\xi,k)d\tau - 1, \quad k \in Z^p.$$

Тут $G_k(t,\tau)$ – функція Ґріна диференціального оператора, породженого диференціальним виразом

$$l_k\left(\frac{d}{dt}\right)y(t) \equiv y'''(t) + A_1(t,k)y(t), \quad k \in Z^p, \tag{27}$$

і триточковими умовами

$$y(0) = 0, \quad y(T/2) = 0, \quad y(T) = 0. \tag{28}$$

Зазначимо, що критерієм існування функції Ґріна $G_k(t,\tau)$, $k \in Z^p$, є відмінність від нуля величини

$$\Delta(T,k) \equiv f_2(T/2,k)f_3(T,k) - f_3(T/2,k)f_2(T,k),$$

де $f_2(t,k), f_3(t,k)$ – такі неперервно диференційовні на $[0,T]$ розв'язки диференціального рівняння $l_k(d/dt)y(t) = 0$, що $f_q^{(j-1)}(0,k) = \delta_{jq}$, $q = 2,3, j = 1,2,3$.

Теорема 4. *Нехай* $\Delta(T,k) \neq 0$, $k \in Z^p$, *і нехай*

$$\min_{t\in[0,T]} |A_1(t,k) - A_0(t,k)| \geq C_{15}(1+|k|)^{\gamma}, \quad k \in Z^p.$$

Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в R *) чисел* $\xi \in [0,T]$ *нерівність*

$$|\Gamma_k(\xi)| \geq (1+|k|)^{-\omega}\exp(-\delta|k|^M)$$

виконується для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) $k \in Z^p$ *при*

$$\omega > 3p + 12M - \gamma, \ \delta \geq 12AT, \ A = \sup_{k\in Z^p}\max_{t\in[0,T]} |A_1(t,k)|/(1+|k|)^M.$$

Доведення. Для кожного $k \in Z^p$ запровадимо такі множини:

$$E_{\omega,\delta}(k) = \{\xi \in [0,T] : |\Gamma_k(\xi)| < (1+|k|)^{-\omega}\exp(-\delta|k|^M)\}, \ \omega,\delta \in R.$$

Згідно з лемою Бореля–Кантеллі [6] для доведення теореми 4 досить перевірити, що при $\omega > 3p + 12M - \gamma$, $\delta \geq 12AT$ ряд $\sum_{k\in Z^p} \operatorname{mes} E_{\omega,\delta}(k)$ збігається. Функція $\Gamma_k(\xi)$, $k \in Z^p$, – тричі неперервно диференційовна за $\xi \in [0,T]$. З властивостей функції $G_k(t,\tau)$ задачі (27), (28) отримаємо

$$l_k\left(\frac{d}{d\xi}\right)\Gamma_k(\xi) = A_1(\xi,k) - A_0(\xi,k), \ \xi \in [0,T]. \tag{29}$$

Тоді з формули (29) та умови теореми 4 отримуємо, що для всіх $\xi \in [0,T]$ виконується нерівність

$$\left| l_k\left(\frac{d}{d\xi}\right)\Gamma_k(\xi)\right| \geq C_{15}(1+|k|)^{\gamma}, k \in Z^p.$$

З теореми B для міри множини $E_{\omega,\delta}(k)$, $k \in Z^p$, при $\omega > 3p + 12M - \gamma$, $\delta \geq 12AT$ дістаємо оцінку

$$\operatorname{mes} E_{\omega,\delta}(k) \leq \frac{C_{16}}{(1+|k|)^{(\omega+\gamma-12M)/3}} = \frac{C_{16}}{(1+|k|)^{p+\sigma}}, \tag{30}$$

де $\sigma = (\omega + \gamma - 12M) / 3 - p > 0$, C_{16} – додатна стала, що не залежить від k. З отриманої оцінки (30) випливає збіжність ряду $\sum_{k \in Z^p} \operatorname{mes} E_{\omega,\delta}(k)$.

Висновки. Встановлено оцінки зверху для міри множини $\{t \in [a,b] : | f(t) | < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, якщо тричі неперервно диференційовна функція f справджує умову $|L_3(d / dt) f(t)| > \delta$, $\delta > 0$, $L_3(d / dt)$ – лінійний диференціальний вираз третього порядку з гладкими коефіцієнтами. Отримані результати застосовано для доведення оцінок знизу малих знаменників, які виникають під час дослідження задач з триточковими умовами для навантажених рівнянь з частинними похідними.

Результати можна поширити для функцій комплексного аргументу.

1. *Берник В. И., Мельничук Ю. В.* Диофантовы приближения и размерность Хаусдорфа. – Минск: Наука и техника, 1988. – 144 с.
2. *Ільків В. С.* Аналоги леми Пяртлі із абсолютними константами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – 42, № 4. – С. 68–74.
3. *Ільків В. С., Магеровська Т. В.* Про константу в лемі Пяртлі // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Фіз.-мат. науки. – 2007. – № 601. – С. 12–17.
4. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Москва: Наука, 1971. – 576 с.
5. *Медвідь О. М., Симотюк М. М.* Інтегральна задача для лінійних рівнянь із частинними похідними // Мат. Студії. – 2007. – 28, № 2. – С. 115–140.
6. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Київ: Наук. думка, 1984. – 264 с.
7. *Пташник Б. Й., Симотюк М. М.* Багатоточкова задача для неізотропних диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2003. – 55, № 2. – С. 241–254.
8. *Пташник Б. Й., Симотюк М. М.* Оцінки мір виняткових множин гладких функцій // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Фіз.-мат. науки. – 2014. –№ 804.– С. 49–56.
9. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения: В 2 т. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1953. – Т. 1. – 346 с.
10. *Симотюк М. М.* Про оцінки мір множин, на яких модуль гладкої функції обме– жений зверху // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – 42, № 4. – С. 90–95.
11. *Симотюк М. М.* Багатоточкова задача для псевдодиференціальних рівнянь із частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – 46, № 2. – С. 26–40.
12. *Beresnevich V. V.* A Groshev type theorem for convergence on manifolds // Acta Mathematica Hungarica. – 2002. – 94, № 1–2. – P. 99–130.
13. *Hartman Ph.* Ordinary Differential Equations, 2nd ed., Birkhauser, Boston, 1982.
14. *Kleinbock D., Margulis G.* Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds // Ann. Math. – 1998. – 148. – P. 339–360.
15. *Levin A. Yu.* Non-oscillation of solutions of the equation $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + {} + p_n(t)x = 0$ // Russian Math. Surveys. –1969. – 24. – P. 43–99.
16. *Polya G.* On the mean-value theorem corresponding to a given linear homogeneous differential equation // Trans. Amer. Math. Soc. –1922. – 24. – P. 312–324.
17. *De la Vallee-Poussin C.* Sur l'equation differentielle lineaire du second ordre. Determination d'une integrale par deux valeurs assignees. Extension aux equations d'ordre n // J. Math. Pures Appl. – 1929. – Ser. 9, Tom 8. – P. 125–144.
18. *Willet D.* Generalized de la Valle Poussin disconjugacy tests for linear differential equations // Canad. Math. Bull. – 1971. – 14 – P. 419-428.

ESTIMATES OF MEASURES OF SUBLEVEL SETS OF SMOOTH FUNCTIONS

Lower bounds estimates for the Lebesgue measure of sublevel set of smooth function have been established if the result of the differential expression of the third order is not equal to zero. The partial cases when the differential expression allows Polya factorization are considered. We done application of the obtained results to prove metric estimates for the small denominators that arise in the study of three-point problems for loaded partial differential equations with variables coefficients.

Keywords: *Lebesgue measure, factorization of differential operators, three-point problem, loaded partial differential equation*.

[1] Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів,
[2] Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
01.09.23