https://doi.org/10.15407/apmm2023.21.5-16

УДК 512.643.4

Г. В. Зеліско[1], Н. Б. Ладзоришин[✉2], В. М. Петричкович[2]

ЛІНІЙНІ МАТРИЧНІ РІЗНОСТОРОННІ РІВНЯННЯ НАД КВАДРАТИЧНИМИ КІЛЬЦЯМИ З ІНВОЛЮЦІЄЮ

Встановлено необхідні та достатні умови існування розв'язків лінійних матричних рівнянь типу Сильвестра над квадратичними кільцями $K = \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$ *з інволюцією. Вказано критерій існування та єдиності цілочислових розв'язків, тобто розв'язків над кільцем цілих чисел* $\mathbb{Z}$ *таких рівнянь. Умови наведені в термінах еквівалентності матриць із елементами з кільця цілих чисел, які побудовані з коефіцієнтів матричного рівняння з використанням кронекерівського добутку матриць.*

Ключові слова: *квадратичне кільце, інволюція, кронекерівський добуток матриць, еквівалентність матриць, матричне рівняння, розв'язок рівняння.*

Вступ. Лінійні матричні рівняння, зокрема типу Сильвестра

$$AX + YB = C, \tag{1}$$

його окремого типу матричного рівняння Ляпунова

$$AX + XA^T = C \tag{2}$$

та матричне рівняння від двох змінних

$$AX + YA^T = C, \tag{3}$$

односторонні матричні діофантові рівняння

$$AX + BY = C \tag{4}$$

над різними областями застосовують у багатьох прикладних задачах [2, 4, 11, 12, 14, 16, 18, 23].

Такі матричні рівняння з матрицями-коефіцієнтами A, B, C над полями зводять до систем лінійних алгебричних рівнянь над полями, використовуючи кронекерівський добуток матриць [17].

Встановлено [20], що розв'язність рівнянь (1)–(4) над полями та кільцями поліномів пов'язана з еквівалентністю та подібністю блочних матриць

$$M = \begin{Vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{Vmatrix} \text{ та } N = \begin{Vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{Vmatrix},$$

складених із коефіцієнтів цих рівнянь. У статті [13] цей результат поширили на матричні рівняння над комутативними кільцями.

Серед квадратичних кілець, матриці над якими розглядатимемо далі, є такі, в яких не існує поняття найбільшого спільного дільника елементів, і тому відсутнє класичне поняття еквівалентності матриць [1]. Отже, наведені умови розв'язності матричних рівнянь (1)–(4), у термінах еквівалентності матриць, не є критерієм. У цій статті розв'язність матричних рівнянь над квадратичними кільцями зведено до розв'язності систем лінійних матричних рівнянь над кільцем цілих чисел. Для їх розв'язків можна використати результати праці [5].

1. **Квадратичні кільця та інволюції в них**. Відображення ∇ кільця R в себе називають інволюцією, якщо для довільних $a, b \in R$

$$(a+b)^\nabla = a^\nabla + b^\nabla, \quad (a \cdot b)^\nabla = b^\nabla \cdot a^\nabla, \quad (a^\nabla)^\nabla = a.$$

✉ natalja.ladzoryshyn@gmail.com

У публікаціях [8, 10, 15, 19, 22] досліджували інволюції в комутативних кільцях з одиницею, встановлювали всеможливі інволюції в конкретно взятих кільцях та полях. У праці [8] увагу акцентували на кільцях многочленів та квазімногочленів над полями дійсних та комплексних чисел.

У статті [3] вивчали інші способи перенесення інволюції в кільці R на кільця матриць над R, зокрема, симплектичну інволюцію та інволюцію змішаного типу, а також встановили зв'язок між ними.

У статті [2] досліджували питання про факторизацію матриць над кільцями многочленів з інволюцією та її застосування до розв'язування матричних многочленних рівнянь, а також розглядали лінійні матричні рівняння над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ з інволюцією.

Нижче розглянемо матриці та лінійні матричні рівняння над квадратичними кільцями $K = \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$ з інволюцією.

Нехай $\mathbb{Z}$ – кільце цілих чисел, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 1$ і k не ділиться на квадрат простого числа. Квадратичне кільце $\mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$ визначаємо так [9]:

якщо $k \equiv 2 (\operatorname{mod} 4)$ або $k \equiv 3 (\operatorname{mod} 4)$, то

$$\mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right] = \left\{x + y\sqrt{k} \mid x, y \in \mathbb{Z}\right\},$$

якщо $k \equiv 1 (\operatorname{mod} 4)$, то

$$\mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right] = \left\{\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\sqrt{k} \mid x, y \in \mathbb{Z}, (x - y) \text{ ділиться на } 2\right\}.$$

У публікації [9] таке означення квадратичного кільця обумовлено намаганням знайти всі кільця, полем відношень яких є поле квадратичних чисел

$$\mathbb{Q}\left(\sqrt{k}\right) = \left\{x + y\sqrt{k} \mid x, y \in \mathbb{Q}\right\}.$$

У квадратичному кільці $K = \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$ існує лише два типи інволюцій: тотожна

$$(x + y\sqrt{k})^{\nabla} = x + y\sqrt{k}$$

чи

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\sqrt{k}\right)^{\nabla} = \frac{x}{2} + \frac{y}{2}\sqrt{k}$$

та нетотожна ∇, для якої

$$(x + y\sqrt{k})^{\nabla} = x - y\sqrt{k}$$

чи
$$\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\sqrt{k}\right)^{\nabla} = \frac{x}{2} - \frac{y}{2}\sqrt{k}.$$

Відповідно, у кільці матриць $M_n(R)$ інволюцію ∇, як і раніше [8], вводимо так:

$$A^{\nabla} = \left\|a_{ij}\right\|^{\nabla} = \left\|a_{ji}{}^{\nabla}\right\|.$$

Зауважимо, що в кільці $\mathbb{Z}$ можлива лише тотожна інволюція [8].

2. **Існування розв'язку лінійного матричного рівняння над квадратичним кільцем з інволюцією**. Розглянемо лінійне матричне рівняння

$$AX + YA^{\nabla} = C, \tag{5}$$

де $A, C \in M_n\left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]\right)$. Якщо ∇ – тотожна інволюція в квадратичному кільці $\mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$, тобто $A^{\nabla} = A^T$, де символом "T" позначено операцію транспортування, то це неперервне рівняння Ляпунова. Надалі розглянемо нетотожну інволюцію в $\mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$, зокрема, рівняння (5) буде узагальненим рівнянням Ляпунова.

Результати праць [6, 7] і розроблений там метод узагальнимо і поширимо на рівняння (5).

Запишемо коефіцієнти цього рівняння у вигляді

$$A = A_1 + A_2\sqrt{k}, \qquad A^{\nabla} = A_1^T - A_2^T\sqrt{k}, \qquad C = C_1 + C_2\sqrt{k}, \tag{6}$$

якщо $k \equiv 2, 3 (\mathrm{mod}\, 4)$;

$$A = \frac{1}{2}\left(A_1 + A_2\sqrt{k}\right), \qquad A^{\nabla} = \frac{1}{2}\left(A_1^T - A_2^T\sqrt{k}\right), \quad C = \frac{1}{2}\left(C_1 + C_2\sqrt{k}\right), \tag{7}$$

якщо $k \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$.

Нагадаємо, що кронекерівським добутком матриць $A = \left\|a_{ij}\right\|_1^m$ і $B = \left\|b_{ij}\right\|_1^n$ називають блочну матрицю вигляду

$$A \otimes B = \begin{Vmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2m}B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mm}B \end{Vmatrix}.$$

Теорема 1. Матричне рівняння (5) над квадратичним кільцем K з інволюцією з коефіцієнтами вигляду (6) або (7) має розв'язки X, Y у кільці $M_n(K)$ тоді і тільки тоді, коли еквівалентними над $\mathbb{Z}$ є такі матриці:

$$\begin{Vmatrix} A_1 \otimes E & A_2 k \otimes E & E \otimes A & -E \otimes A_2 k & \mathrm{c}_1 \\ A_2 \otimes E & A_1 \otimes E & -E \otimes A & E \otimes A_1 & \mathrm{c}_2 \end{Vmatrix}$$

і

$$\begin{Vmatrix} A_1 \otimes E & A_2 k \otimes E & E \otimes A & -E \otimes A_2 k & 0 \\ A_2 \otimes E & A_1 \otimes E & -E \otimes A & E \otimes A_1 & 0 \end{Vmatrix},$$

якщо $k \equiv 2, 3 (\mathrm{mod}\, 4)$, та

$$\begin{Vmatrix} (A_1 + A_2 k) \otimes E & 2A_1 \otimes E & E \otimes (A_1 - A_2 k) & E \otimes 2A_1 & 2\mathbf{c}_1 \\ (A_1 + A_2) \otimes E & 2A_2 \otimes E & E \otimes (A_1 - A_2) & E \otimes (-2A_1) & 2\mathbf{c}_2 \end{Vmatrix}$$

і

$$\begin{Vmatrix} (A_1 + A_2 k) \otimes E & 2A_1 \otimes E & E \otimes (A_1 - A_2 k) & E \otimes 2A_1 & 0 \\ (A_1 + A_2) \otimes E & 2A_2 \otimes E & E \otimes (A_1 - A_2) & E \otimes (-2A_1) & 0 \end{Vmatrix},$$

якщо $k \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$. Тут E – одинична матриця n-го порядку, а стовпці c_1 та c_2 мають вигляд

$$\mathrm{c}_i = \left\| row_1(C_i) \;\; row_2(C_i) \dots row_n(C_i) \right\|^T, \; i = 1, 2,$$

де $row_i(C)$ означає i-ий рядок матриці C.

Доведення. Нехай $k \equiv 2, 3 (\bmod 4)$. Запишемо матриці X та Y у вигляді

$$X = X_1 + X_2\sqrt{k}, \qquad Y = Y_1 + Y_2\sqrt{k}. \tag{8}$$

Підставивши вирази (6) і (8) у рівняння (5), одержимо:

$$\left(A_1 + A_2\sqrt{k}\right)\left(X_1 + X_2\sqrt{k}\right) + \left(Y_1 + Y_2\sqrt{k}\right)\left(A_1^T - A_2^T\sqrt{k}\right) = C_1 + C_2\sqrt{k}.$$

Звідси отримаємо систему лінійних матричних рівнянь над кільцем $\mathbb{Z}$

$$\begin{cases} A_1X_1 + A_2kX_2 + Y_1A_1^T - Y_2A_2^Tk = C_1, \\ A_2X_1 + A_1X_2 - Y_1A_2^T + Y_2A_1^T = C_2, \end{cases}$$

яку можна записати, використовуючи означення і властивості кронекерівського добутку матриць [17], так:

$$\begin{Vmatrix} A_1 \otimes E & A_2k \otimes E \\ A_2 \otimes E & A_1 \otimes E \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} E \otimes A_1 & -E \otimes A_2k \\ -E \otimes A_2 & E \otimes A_1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \mathrm{y}_1 \\ \mathrm{y}_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathrm{c}_1 \\ \mathrm{c}_2 \end{Vmatrix},$$

де E – одинична матриця n-го порядку,

$$\mathrm{x}_i = \left\| row_1(X_i) \;\; row_2(X_i) \;\; \ldots \;\; row_n(X_i) \right\|^T,$$

$$\mathrm{y}_i = \left\| row_1(Y_i) \;\; row_2(Y_i) \;\; \ldots \;\; row_n(Y_i) \right\|^T,$$

$$\mathrm{c}_i = \left\| row_1(C_i) \;\; row_2(C_i) \;\; \ldots \;\; row_n(C_i) \right\|^T, \quad i = 1, 2.$$

Із цієї системи отримуємо матричне рівняння над кільцем $\mathbb{Z}$:

$$\begin{Vmatrix} A_1 \otimes E & A_2k \otimes E & E \otimes A_1 & -E \otimes A_2k \\ A_2 \otimes E & A_1 \otimes E & -E \otimes A_2 & E \otimes A_1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{y}_1 \\ \mathrm{y}_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathrm{c}_1 \\ \mathrm{c}_2 \end{Vmatrix}. \tag{9}$$

Відомо [5], що рівняння (5) має розв'язок над кільцем $\mathbb{Z}$ тоді і тільки тоді, коли еквівалентними над $\mathbb{Z}$ є матриці

$$\begin{Vmatrix} A_1 \otimes E & A_2k \otimes E & E \otimes A & -E \otimes A_2k & \mathrm{c}_1 \\ A_2 \otimes E & A_1 \otimes E & -E \otimes A & E \otimes A_1 & \mathrm{c}_2 \end{Vmatrix}$$

і

$$\begin{Vmatrix} A_1 \otimes E & A_2k \otimes E & E \otimes A_1 & -E \otimes A_2k & 0 \\ A_2 \otimes E & A_1 \otimes E & -E \otimes A_2 & E \otimes A_1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Отже, теорему 1 доведено, якщо $k \equiv 2, 3 (\bmod 4)$.

Нехай $k \equiv 1 (\bmod 4)$. Тоді запишемо матриці X та Y так:

$$X = \frac{1}{2}\left(X_1 + X_2\sqrt{k}\right), \qquad Y = \frac{1}{2}\left(Y_1 + Y_2\sqrt{k}\right). \tag{10}$$

Оскільки за таких значеннь k елементи матриць $X_1 - X_2$ та $Y_1 - Y_2$ діляться на 2, то нехай

$$X_1 = X_2 + 2X_0, \quad Y_1 = Y_2 + 2Y_0,$$

де X_0, Y_0 – деякі матриці з $M_n(\mathbb{Z})$.

Тоді невідомі матриці X та Y з рівності (10) будуть:

$$X = \frac{1}{2}\left(X_2 + 2X_0 + X_2\sqrt{k}\right), \qquad Y = \frac{1}{2}\left(Y_2 + 2Y_0 + Y_2\sqrt{k}\right). \tag{11}$$

Підставивши вирази (11) у рівняння (5) і врахувавши (7), одержимо:

$$\frac{1}{2}\left(A_1 + A_2\sqrt{k}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(X_2 + 2X_0 + X_2\sqrt{k}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(Y_2 + 2Y_0 + Y_2\sqrt{k}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(A_1{}^T - A_2{}^T\sqrt{k}\right) = \frac{1}{2}\left(C_1 + C_2\sqrt{k}\right).$$

Звідси, домноживши обидві частини цієї рівності на 4, дістанемо систему матричних рівнянь над $\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases}(A_1 + A_2k)\,X_2 + Y_2(A_1{}^T - A_2{}^Tk) + 2A_1X_0 + 2Y_0A_1{}^T = 2C_1,\\ (A_1 + A_2)\,X_2 + Y_2\left(A_1{}^T - A_2{}^T\right) + 2A_2X_0 - 2Y_0A_2{}^T = 2C_2.\end{cases}$$

Знову, як і коли $k \equiv 2, 3 (\operatorname{mod} 4)$, використавши кронекерівський добуток матриць, з цієї системи отримаємо матричне рівняння над кільцем $\mathbb{Z}$

$$\begin{Vmatrix}(A_1 + A_2)k \otimes E & 2A_1 \otimes E & E \otimes (A_1 - A_2k) & E \otimes 2A_1\\ (A_1 + A_2) \otimes E & 2A_2 \otimes E & E \otimes (A_1 - A_2) & E \otimes 2(-A_2)\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\mathrm{x}_1\\ \mathrm{x}_0\\ \mathrm{y}_1\\ \mathrm{y}_0\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}2\mathrm{c}_1\\ 2\mathrm{c}_2\end{Vmatrix}, \tag{12}$$

де

$$\mathrm{x}_0 = \begin{Vmatrix}row_1(X_0) & row_2(X_0) & \dots & row_n(X_0)\end{Vmatrix}^T,$$

$$\mathrm{y}_0 = \begin{Vmatrix}row_1(Y_0) & row_2(Y_0) & \dots & row_n(Y_0)\end{Vmatrix}^T,$$

яке еквівалентне до матричного рівняння (5) над квадратичним кільцем $\mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$, якщо $k \equiv 1 (\operatorname{mod} 4)$.

Відомо [5], що рівняння (12) має розв'язок (11) тоді і тільки тоді, коли матриці

$$\begin{Vmatrix}(A_1 + A_2k) \otimes E & 2A_1 \otimes E & E \otimes (A_1 - A_2k) & E \otimes 2A_1 & 2\mathbf{c}_1\\ (A_1 + A_2) \otimes E & 2A_2 \otimes E & E \otimes (A_1 - A_2) & E \otimes (-2A_1) & 2\mathbf{c}_2\end{Vmatrix}$$

і

$$\begin{Vmatrix}(A_1 + A_2k) \otimes E & 2A_1 \otimes E & E \otimes (A_1 - A_2k) & E \otimes 2A_1 & 0\\ (A_1 + A_2) \otimes E & 2A_2 \otimes E & E \otimes (A_1 - A_2) & E \otimes (-2A_1) & 0\end{Vmatrix}$$

еквівалентні над кільцем $\mathbb{Z}$. Теорему доведено.

3. **Існування та єдиність цілочислового розв'язку лінійного матричного рівняння над квадратичним кільцем з інволюцією**.

Теорема 2. Матричне рівняння (5) над квадратичним кільцем K з інволюцією, де матриці $A, C \in M_n\left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]\right)$ вигляду (6) або (7), має цілочисловий розв'язок $X_0 \in M_n(\mathbb{Z})$, $Y_0 \in M_n(\mathbb{Z})$ тоді і тільки тоді, коли еквівалентними над $\mathbb{Z}$ є такі матриці:

$$\begin{Vmatrix}A_1 \otimes E & E \otimes A_1 & \mathrm{c}_1\\ A_2 \otimes E & E \otimes (-A_2) & \mathrm{c}_2\end{Vmatrix} \text{ та } \begin{Vmatrix}A_1 \otimes E & E \otimes A_1 & 0\\ A_2 \otimes E & E \otimes (-A_2) & 0\end{Vmatrix}, \tag{13}$$

де

$$c_1 = \|row_1(C_1)\ \ row_2(C_1)\ \ \ldots\ \ row_n(C_1)\|^T,$$

$$c_2 = \|row_1(C_2)\ \ row_2(C_2)\ \ \ldots\ \ row_n(C_2)\|^T.$$

Доведення. Нехай $k \equiv 2, 3 (\bmod 4)$. Поклавши в (8) $X_2 = 0$, $Y_2 = 0$, отримаємо:

$$A_1X_1 + Y_1A_1^T + (A_2X_1 - Y_1A_2^T)\sqrt{k} = C_1 + C_2\sqrt{k}.$$

Звідси одержимо систему лінійних матричних рівнянь над кільцем $\mathbb{Z}$, розв'язок якої X_1, Y_1 є шуканим цілочисловим розв'язком рівняння (5):

$$\begin{cases} A_1X_1 + Y_1A_1^T = C_1, \\ A_2X_1 - Y_1A_2^T = C_2. \end{cases}$$

Використовуючи кронекерівський добуток матриць, цю систему зведемо до матричного рівняння

$$\left\| \begin{matrix} A_1 \otimes E & E \otimes A_1 \\ A_2 \otimes E & E \otimes (-A_2) \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \end{matrix} \right\|, \qquad (14)$$

яке має розв'язок над кільцем $\mathbb{Z}$ тоді і тільки тоді, коли виконується умова (13).

Якщо $k \equiv 1 (\bmod 4)$, теорему доводимо аналогічно, використовуючи метод з теореми 1.

Теорема 3. Цілочисловий розв'язок $X_0, Y_0 \in M_n(\mathbb{Z})$ матричного рівняння (5), де матриці $A, C \in M_n\left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]\right)$ вигляду (6) або (7), єдиний тоді і тільки тоді, коли

$$\det\|A_1 \otimes A_2 + A_2 \otimes A_1\| \neq 0. \qquad (15)$$

Доведення. З доведення теореми 2 випливає, що з матричного рівняння (5) над квадратичним кільцем K, поклавши $X_2 = 0$, $Y_2 = 0$, отримаємо матричне рівняння (14) над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$. Відомо [17], що якщо рівняння (14) має розв'язок, то він єдиний тоді і тільки тоді, коли

$$\det\left\| \begin{matrix} A_1 \otimes E & E \otimes A_1 \\ A_2 \otimes E & E \otimes (-A_2) \end{matrix} \right\| \neq 0. \qquad (16)$$

Використовуючи властивості кронекерівського добутку матриць з [17] і [21], одержимо:

$$\det\left\| \begin{matrix} A_1 \otimes E & E \otimes A_1 \\ A_2 \otimes E & E \otimes (-A_2) \end{matrix} \right\| = \det\|(A_1 \otimes E)(E \otimes (-A_2)) - (A_2 \otimes E)(E \otimes A_1)\| =$$

$$= \det\|(A_1 \otimes (-A_2)) - (A_2 \otimes A_1)\| = (-1)^n \det\|(A_1 \otimes A_2) + (A_2 \otimes A_1)\|.$$

Отже, умова (16) рівносильна умові $\det\|(A_1 \otimes A_2) + (A_2 \otimes A_1)\| \neq 0$. Теорему доведено.

Приклад. Розглянемо матричне рівняння

$$\left\| \begin{matrix} 1+\sqrt{-2} & 2-\sqrt{-2} \\ \sqrt{-2} & 1 \end{matrix} \right\| X_1 + Y_1 \left\| \begin{matrix} 1-\sqrt{-2} & -\sqrt{-2} \\ 2+\sqrt{-2} & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 2-2\sqrt{-2} & 3-3\sqrt{-2} \\ 3+2\sqrt{-2} & 3 \end{matrix} \right\| \qquad (17)$$

над квадратичним кільцем $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-2}\right]$, де X_1, Y_1 – невідомі 2×2 матриці над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$.

Зобразивши матриці

$$A = \begin{Vmatrix} 1+\sqrt{-2} & 2-\sqrt{-2} \\ \sqrt{-2} & 1 \end{Vmatrix},$$

$$A^{\nabla} = \begin{Vmatrix} 1-\sqrt{-2} & -\sqrt{-2} \\ 2+\sqrt{-2} & 1 \end{Vmatrix},$$

$$C = \begin{Vmatrix} 2-2\sqrt{-2} & 3-3\sqrt{-2} \\ 3+2\sqrt{-2} & 3 \end{Vmatrix}$$

у вигляді (6), використовуючи доведення теореми 2, із цього рівняння дістанемо таке матричне рівняння над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{y}_1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{Vmatrix},$$

де

$$\mathrm{x}_1 = \left\| row_1(X_1) \quad row_2(X_1) \right\|^T,$$

$$\mathrm{y}_1 = \left\| row_1(Y_1) \quad row_2(Y_1) \right\|^T.$$

Оскільки

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} V = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

де V – оборотна матриця над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$ вигляду

$$V = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

то, згідно з теоремою 2 рівняння (17) має цілочисловий розв'язок. Таким розв'язком будуть матриці

$$X_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}, \qquad Y_1 = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{18}$$

Зауважимо, що

$$\det \| A_1 \otimes A_2 + A_2 \otimes A_1 \| = \det \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix} = 4,$$

і згідно з теоремою 3 цілочисловий розв'язок (18) єдиний.

Зауважимо, що рівняння (17) має також розв'язок X, Y, де X, Y – невідомі 2×2 матриці над квадратичним кільцем $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-2}\right]$ вигляду (8). Застосувавши міркування з доведення теореми 1, отримаємо таке матричне рівняння (9) над кільцем $\mathbb{Z}$:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{y}_1 \\ \mathrm{y}_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{Vmatrix}, \tag{19}$$

де

$$\mathrm{x}_i = \| row_1(X_i) \quad row_2(X_i) \|^T,$$

$$\mathrm{y}_i = \| row_1(Y_i) \quad row_2(Y_i) \|^T, \; i = 1, 2.$$

Використовуючи елементарні операції над рядками і стовпцями, зводимо матрицю до діагонального вигляду, а саме, існують такі оборотні матриці $U \in GL_8(\mathbb{Z})$, $V \in GL_{16}(\mathbb{Z})$, що

$$U\begin{Vmatrix} A_1\otimes E & A_2k\otimes E & E\otimes A_1 & -E\otimes A_2k \\ A_2\otimes E & A_1\otimes E & -E\otimes A_2 & E\otimes A_1 \end{Vmatrix}V =$$

$$=\begin{Vmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{Vmatrix}.$$

Отже, з рівняння (19) отримаємо рівняння

$$\begin{Vmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{Vmatrix} V^{-1}\begin{Vmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_2\\ \mathbf{y}_1\\ \mathbf{y}_2\end{Vmatrix} = U\begin{Vmatrix}2\\3\\3\\3\\-2\\-3\\2\\0\end{Vmatrix}.$$

Звідси

$$\begin{Vmatrix}x_1\\ x_2\\ y_1\\ y_2\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}
t_1-4t_2-2t_3-3t_4-t_5-t_6+3t_7+3t_8\\
-2+2t_1-3t_2-3t_4-t_6+2t_7-t_8\\
1+2t_3-3t_4+3t_6\\
3-t_1+t_3-2t_4-t_5+2t_6+2t_7+t_8\\
-2+2t_1+t_2+2t_3+t_5+t_6\\
t_2+t_3+t_6+t_7+t_8\\
t_3\\
t_2+2t_4\\
-2+3t_1+3t_4+t_5-t_6+t_7-t_8\\
-1+3t_2+3t_4+t_6+3t_8\\
-2+2t_1-2t_2-t_4-t_6+2t_7\\
t_1+2t_2+t_3+2t_4+t_5-2t_7+t_8\\
t_5-t_6-2t_7-t_8\\
t_6\\
t_7\\
t_8
\end{Vmatrix},$$

де t_i, $i = 1,\ldots,8$ – довільні числа з кільця $\mathbb{Z}$.

Запишемо загальний розв'язок матричного рівняння (17):

$$X = \begin{Vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{Vmatrix}, \qquad Y = \begin{Vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{Vmatrix},$$

де

$$x_{11} = t_1 - 4t_2 - 2t_3 - 3t_4 - t_5 - t_6 + 3t_7 + 3t_8 + (-2 + 2t_1 + t_2 + 2t_3 + t_5 + t_6)\sqrt{-2};$$

$$x_{12} = -2 + 2t_1 - 3t_2 - 3t_4 - t_6 + 2t_7 - t_8 + (t_2 + t_3 + t_6 + t_7 + t_8)\sqrt{-2};$$

$$x_{21} = 1 + 2t_3 - 3t_4 + 3t_6 + t_3\sqrt{-2};$$

$$x_{22} = 3 - t_1 + t_3 - 2t_4 - t_5 + 2t_6 + 2t_7 + t_8 + (t_2 + 2t_4)\sqrt{-2};$$

$$y_{11} = -2 + 3t_1 + 3t_4 + t_5 - t_6 + t_7 - t_8 + (t_5 - t_6 - 2t_7 - t_8)\sqrt{-2};$$

$$y_{12} = -1 + 3t_2 + 3t_4 + t_6 + 3t_8 + t_6\sqrt{-2};$$

$$y_{21} = -2 + 2t_1 - 2t_2 - t_4 - t_6 + 2t_7 + t_7\sqrt{-2};$$

$$y_{22} = t_1 + 2t_2 + t_3 + 2t_4 + t_5 - 2t_7 + t_8 + t_8\sqrt{-2}.$$

Якщо $t_1 = 2$, $t_i = 1$, $i = 2,\ldots,8$, тоді розв'язком ріняння (17) є такі матриці:

$$X = \begin{Vmatrix} -9 + 7\sqrt{-2} & -4 + 5\sqrt{-2} \\ 3 + \sqrt{-2} & 4 + 3\sqrt{-2} \end{Vmatrix}, \qquad Y = \begin{Vmatrix} 7 - 3\sqrt{-2} & 9 + \sqrt{-2} \\ \sqrt{-2} & 7 + \sqrt{-2} \end{Vmatrix}$$

Теорема 4. Нехай у матричному рівнянні (5) матриця C є ∇-симетричною, а матриця A задовольняє умову (15). Тоді єдиним цілочисловим розв'язком рівняння (5) є розв'язок $X = X_0$, $Y = X_0^T$.

Доведення. Нехай у рівнянні (5) матриця C є ∇-симетричною, тобто $C^\nabla = C$. Для такої матриці в зображенні як (6) чи (7) цілочислова матриця C_1 є симетричною, а матриця C_2 – кососиметричною. Якщо $X_0, Y_0 \in M_n(\mathbb{Z})$ – цілочисловий розв'язок рівняння (5), то

$$AX_0 + Y_0 A^\nabla = C.$$

Застосуємо до обидвох частин цієї рівності інволюцію ∇. Тоді

$$X_0^\nabla A^\nabla + A Y_0^\nabla = C^\nabla.$$

Звідси, враховуючи, що $C^\nabla = C$, одержимо:

$$AY_0^\nabla + X_0^\nabla A^\nabla = C,$$

тобто пара матриць Y_0^∇, X_0^∇ є розв'язком рівняння (5). Враховуючи теорему 3, бачимо, що єдиний розв'язок рівняння (5) задовольняє умову $X_0 = Y_0^\nabla$. Оскільки $X_0, Y_0 \in M_n(\mathbb{Z})$, то $X_0 = Y_0^T$ чи $Y_0 = X_0^T$. Отже, розв'язком рівняння (5) є пара матриць X_0, X_0^T. Теорему доведено.

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – Москва: Наука, 1967. – 576 с
2. *Зеліско В. Р.* Матриці та матричні рівняння над кільцем многочленів з інволюцією // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2010. – Вип. 8. – С. 18–22.

3. *Зеліско В. Р., Кучма М. І.* Зв'язок між різними типами інволюцій у кільцях матриць // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2009. – Вип. 7. – С. 56–61.
4. *Зеліско В. Р., Кучма М. І.* Про існування єдиних розв'язків лінійних матричних рівнянь над кільцями з інволюціями // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2015. – Вип. 13. – С. 7–10.
5. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2015. – 282 с.
6. *Ладзоришин Н. Б.* Цілочислові розв'язки матричних лінійних односторонніх і різносторонніх рівнянь над квадратичними кільцями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – 58, № 2 – С. 47–54.
   Те саме: *Ladzoryshyn N. B.* The integral solutions of matrix linear unilateral and bilateral equations over quadratic rings // J. Math. Sci. – 2017. – 223, No. 1. – P. 50–59.
   https://doi.org/10.1007/s10958-017-3337-0
7. *Ладзоришин Н. Б., Петричкович В. М.* Матричні лінійні одно- та двобічні рівняння над квадратичними кільцями // Вісн. Львівськ. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2018. – Вип. 85.– С. 47–54.
8. *Любачевский Б. Д.* Факторизация симметрических матриц с элементами из кольца с инволюцией // Сибирск. матем. журн. – 1973. – 14, № 3. – С. 337–356.
9. *Родосский К. А.* Алгоритм Евклида. – Москва: Наука, 1988. – 240 с.
10. *Drensky I., Veselin S., Grianbruno A.* On the * – polynomial identities of minimal degree for matrices with involution // Bull. Un. Math. Ital. – 1995. –A(7) 9, No. 3. – P. 471–482.
11. *Dzhaliuk N. S., Petrychkovych V. M.* The matrix linear unilateral and bilateral equations with two variables over commutative rings // Int. Scholarly Research Network. ISRN Algebra. – 2012. – Article ID 205478. – 14 p.
12. *Dzhaliuk N. S., Petrychkovych V. M.* Solutions of the matrix linear bilateral polynomial equation and their structure // Algebra Discrete Math. – 2019. – 27, No. 2. – P. 243–251.
13. *Gustafson W.* Roth's theorems over commutative rings // Linear Algebra and Appl. – 1979. – 23 – P. 245–251.
    https://dx.doi.org/10.1016/0024-3795(79)90106-X
14. *Kaczorek T.* Polynomial and rational matrices. Applications in dynamical systems theory. – London: Springer, 2007. – 504 p.
    https://doi:10.1007/978-1-84628-605-6
15. *Knus M.-A., Merkurjev A., Rost M., Tignol J.-P.* The Book of Involutions // AMS. – 1998. – Coll. Vol. 44. – 593 p.
    https://doi.org/10.1090/coll/044
16. *Ladzoryshyn N. B., Petrychkovych V. M., Zelisko H. V.* Matrix Diophantine equations over quadratic rings and their solutions // Carpathian Math. Publ. – 2020. – 12, No. 2 – P. 368–375.
    https://doi.org/10.15330/cmp.12.2.368-375
17. *Lancaster P., Tismenetsky M.* The Theory of Matrices. (2nd.ed.) – ComputerbScience and Applied Mathematics. – Academic Press, Orlando, Fla, USA, 1985. – 570p.
18. *Petrichkovich V. M.* Cell-triangular and cell-diagonal factorizations of cell-triangular and cell-diagonal polynomial matrices // Math. Notes. – 1985. – 37, No. 6. – P. 431–435. https://doi.org/10.1007/BF01157677.
19. *Rashkova T.* Nilpotency in involution matrix algebras over algebras with involution // Math. and education in mathematics, 2009. Proceedings of the Thirty Eighth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians. Borovetz, April 1–5, 2009. – P. 143–150.

20. *Roth W. E.* The equations AX - YB = C and AX - XB = C in matrices // Proc. Amer. Math. Soc. – 1952. – 3, No. 3. – P. 392–396.
https://doi.org/10.1137/0132058
21. *Silvester J. R.* Determinants of block matrices // Math. Gazette. – 2000. – 84, No. 501. – P. 460–467.
http://dx.doi.org/10.2307/3620776
22. *Tumurbat S., Wiegandt R.* A-radicals of involution rings // Southeast Asian Bull. Math. – 2005. – 29, No. 2. – P. 393–399.
23. *Zhou B., Yan Z.-B., Duan G.-R.* Unified parametrization for the solutions to the polynomial Diophantine matrix equation and the generalized Sylvester matrix equation // Int. J. Control Autom. Syst. – 2010. – 8, No. 1. – P. 29–35.
https://doi.org/10.1007/s12555-010-0104-0

LINEAR MATRIX TWO-SIDED EQUATIONS OVER QUADRATIC RINGS WITH INVOLUTION

Necessary and sufficient conditions for the existence of the Sylvester-type solutions of linear matrix equations over quadratic rings $K = \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$ *with involution are established. The criterion of the existence and uniqueness of integer solutions, that is, solutions over the ring of integers* $\mathbb{Z}$ *of such equations, is indicated. The conditions are given in terms of the equivalence of matrices with elements from the ring of integers, which are constructed from the coefficients of the matrix equation using the Kronecker product of matrices.*

Keywords: *quadratic ring, involution, Kronecker product of matrices, equivalence of matrices, matrix equation, solution of the equation.*

[1] Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів
[2] Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
01.10.23