https://doi.org/10.15407/apmm2023.21.21-29

УДК 512.546

Н. М. Пирч ✉

M-ЕКВІВАЛЕНТНІ ВІДОБРАЖЕННЯ, ПОВ'ЯЗАНІ З ДИСКРЕТНИМИ ПРОСТОРАМИ

Запропоновано серію класифікацій M-еквівалентних відображень з дискретною множиною значень або дискретним образом

***Ключові слова**: вільна топологічна група, M-еквівалентність просторів, M-еквівалентність відображень*

Вступ Нехай X – топологічний простір. Вільною топологічною групою $F(X)$ простору X називають топологічну групу з такими властивостями:

1. X *є підпростором в* $F(X)$,
2. X *є множиною твірних в* $F(X)$,
3. *Довільне неперервне відображення* $f : X \to H$ *з топологічного простору* X *у топологічну групу* H *допускає продовження до неперервного гомоморфізму* $f^* : F(X) \to H$.

Якщо в цьому означенні замінити всюди поняття топологічної групи на поняття абелевої топологічної групи чи локально опуклого простору, то отримаємо означення вільної абелевої топологічної групи $A(X)$ та вільного локально опуклого простору $L(X)$ над X.

Топологічні простори X *та* Y *називають* M*-еквівалентними, якщо їхні вільні топологічні групи* $F(X)$ *та* $F(Y)$ *є топологічно ізоморфними,* A*-еквівалентними – якщо вільні абелеві топологічні групи* $A(X)$ *та* $A(Y)$ *є топологічно ізоморфними (позн.* $X \overset{A}{\sim} Y$*), і* L*-еквівалентними, якщо вільні локально опуклі простори* $L(X)$ *та* $L(Y)$ *є лінійно гомеоморфними (позн.* $X \overset{L}{\sim} Y$*). У монографії* [3] *можна знайти найповніший на сьогодні перелік властивостей вільних топологічних груп. Статті* [4] *та* [5] *містять важливі результати про їх ізоморфізми. Всі простори, що розглядаються в публікації, є тихоновськими. Для топологічного простору* X *позначимо через* $FG(X)$ *вільну групу над* X *у сенсі Граєва* [3, ст. 421]. *Простори* X *та* Y *з топологічно ізоморфними групами* $FG(X)$ *та* $FG(Y)$ *називатимемо* M^*-еквівалентними.

Відображення $f : X_1 \to Y_1$ і $g : X_2 \to Y_2$ називають M*-еквівалентними*, якщо існують такі топологічні ізоморфізми $i : F(X_1) \to F(X_2)$ та $j : F(Y_1) \to F(Y_2)$, що $j \circ f^* = g^* \circ i$, де $f^* : F(X_1) \to F(Y_1)$ та $g^* : F(X_2) \to F(Y_2)$ – гомоморфізми, що продовжують відображення f і g, відповідно (позн. $f \overset{M}{\sim} g$). Аналогічно означають поняття A- та L-еквівалентних відображень. Під парою топологічних просторів (X, Y) розумітимемо топологічний об'єкт, що складається з топологічного простору X та його підпростору Y.

Для тихоновського простору X та його підпростору Y позначимо через $G(Y)$ підгрупу вільної топологічної групи $F(X)$, породжену множиною твірних Y. Скажемо, що пара (X, X_1) є M*-еквівалентною* до пари (Y, Y_1),

✉ pnazar@ukr.net

якщо існує такий топологічний ізоморфізм $h : F(X) \to F(Y)$, що $h\left(G\left(X_1\right)\right) = G\left(Y_1\right)$ (позн $\left(X, X_1\right) \overset{M}{\sim} \left(Y, Y_1\right)$). Для кардинала τ позначимо через D_τ дискретний простір потужності τ. Для топологічного простору X позначимо через X^+ простір, отриманий з X додаванням однієї ізольованої точки.

1. ***M*-еквівалентність сюр'єктивних і несюр'єктивних відображень**

Скажемо, що неперервне відображення $f : X \to Y$ *має праве обернене,* якщо існує таке неперервне відображення $g : Y \to X$, що $f \circ g = 1_Y$.

Твердження 1. *Нехай $f : X \to Y$ − неперервне відображення з топологічного простору X на дискретний топологічний простір Y. Тоді відображення $f : X \to Y$ має праве обернене.*

Доведення. Для кожного $y \in Y$ у множині $f^{-1}(y) \subseteq X$ виберемо довільну точку $g(y)$. З неперервності відображення f випливає, що всі простори $f^{-1}(y)$ є відкрито−замкненими в X, а отже, простір $g(Y) = \{g(y) : y \in Y\}$ є також дискретним і відображення $g : Y \to X$ є неперервним. За побудовою $f \circ g = 1_Y$.

Твердження 2. *Нехай $f_1 : X_1 \to Y_1$, $f_2 : X_2 \to Y_2$ − M-еквівалентні відображення. Тоді $\left(Y_1, f_1\left(X_1\right)\right) \overset{M}{\sim} \left(Y_2, f_2\left(X_2\right)\right)$.*

Доведення. Нехай $i : F\left(X_1\right) \to F\left(X_2\right)$, $j : F\left(Y_1\right) \to F\left(Y_2\right)$ − такі топологічні ізоморфізми, що $f_2^* \circ i = j \circ f_1^*$. Нехай $u \in f\left(X_1\right)$. Тоді існує таке $v \in X_1$, що $u = f\left(v\right)$. За побудовою $j(u) = f_2^* \circ i\left(v\right)$. Тобто, $j(u) \in G\left(f\left(X_2\right)\right)$.

Для неперервного відображення $f : X \to Y$ позначимо через $sf : X \to f(X)$ сюр'єктивне відображення, задане тією ж формулою, що і відображення f, образом якого є простір $f(X)$, з топологією, індукованою з Y. Нагадаємо, що підпростір Y топологічного простору X називають G-*ретрактом* цього простору, якщо довільне неперервне відображення f з топологічного простору Y у топологічну групу H допускає неперервне продовження на X.

Теорема 1. *Нехай $f_1 : X_1 \to Y_1$, $f_2 : X_2 \to Y_2$ − неперервні відображення з дискретних просторів X_1, X_2 у топологічні простори Y_1 та Y_2, відповідно, причому простір $f_i\left(X_i\right)$ є G-ретрактом в Y_i, $i = 1,2$. Тоді такі умови є еквівалентними:*

1) $f_1 \overset{M}{\sim} f_2$;

2) $sf_1 \overset{M}{\sim} sf_2$ *і* $Y_1 / f_1(X_1) \overset{M^*}{\sim} Y_2 / f_2(X_2)$.

Доведення. $(1 \Rightarrow 2)$ Нехай $f_1 \overset{M}{\sim} f_2$, тоді $\left(Y_1, f_1(X_1)\right) \overset{M}{\sim} \left(Y_2, f_2(X_2)\right)$. За твердженням 4 з праці [2] матимемо, що $Y_1 / f_1(X_1) \overset{M^*}{\sim} Y_2 / f_2(X_2)$. Нехай $i : F(X_1) \to F(Y_1)$ і $j : F(X_2) \to F(Y_2)$ − такі топологічні ізоморфізми, що $j \circ f_1^* = f_2^* \circ i$. Оскільки $f_i\left(X_i\right)$ є G-ретрактом у Y_i, то підгрупа $G\left(f_i\left(X_i\right)\right)$ в $F(Y_i)$ є топологічно ізоморфною $F\left(f_i\left(X_i\right)\right)$, а тому звуження ізоморфізму j

на підгрупу $G\left(f_1\left(X_1\right)\right)$ можна розглядати як ізоморфізм між вільними топологічними групами $F\left(f_1\left(X_1\right)\right)$ та $F\left(f_2\left(X_2\right)\right)$. За побудовою $j_S \circ f_1^* = f_2^* \circ i$.

$(2 \Rightarrow 1)$ Нехай $i : F(X_1) \to F(X_2)$ і $j : F(f_1(X_1)) \to F(f_2(X_2))$ – такі топологічні ізоморфізми, що $j \circ sf_1^* = sf_2^* \circ i$. Ізоморфізм j можна розглядати як ізоморфізм $j : G\left(f_1\left(X_1\right)\right) \to G\left(f_2\left(X_2\right)\right)$. За теоремою 3 з праці [2] існує такий топологічний ізоморфізм $j_1 : F(Y_1) \to F(Y_2)$, що $j_1|_{G(f_1(X_1))} = j$. За побудовою $j_1 \circ f_1^* = f_2^* \circ i$, тобто відображення f_1 і f_2 є M-еквівалентними.

Нагадаємо, що підпростір Y тихоновського простору X називають *P-вкладеним* у простір X, якщо довільна неперервна псевдометрика, задана на Y, допускає продовження до неперервної псевдометрики на X. Підпростір Y тихоновського простору X є P-вкладеним у X тоді і тільки тоді, коли підгрупа $G(Y)$ в $F(X)$ є топологічно ізоморфною $F(Y)$.

Твердження 3. *Нехай $f_1 : X_1 \to Y_1$, $f_2 : X_2 \to Y_2$ – M-еквівалентні відображення, причому підпростір $f_i\left(X_i\right)$ є P-вкладеним в Y_i, $i = 1,2$. Тоді* $sf_1 \overset{M}{\sim} sf_2$.

Д о в е д е н н я. Нехай $i : F(X_1) \to F(X_2)$ і $j : F(Y_1) \to F(Y_2)$ – такі топологічні ізоморфізми, що $j \circ f_1^* = f_2^* \circ i$. Нехай $j_1 = j|_{G(Y_1)}$. Через P-вкладеність підпросторів $f_i\left(X_i\right)$ можемо розглядати ізоморфізм j_1 як ізоморфізм між вільними топологічними групами $F\left(f_1\left(X_1\right)\right)$ та $F\left(f_2\left(X_2\right)\right)$, для якого виконується рівність $j_1 \circ f_1^* = f_2^* \circ i$, тобто, $sf_1 \overset{M}{\sim} sf_2$.

Для відображення $f : X \to Y$ означимо відношення еквівалентності $\sim$, поклавши $x \sim y$, якщо $f(x) = f(y)$. У кожному класі еквівалентності виберемо по одній точці і утворимо з них множину H. *Ін'єктивністю* $i(f)$ відображення f назвемо потужність множини $X \setminus H$. Для довільного відображення f виконується рівність $i(f) = i(sf)$. Для неперервного відображення $f : X \to Y$ ядро продовження f до гомоморфізму вільних абелевих топологічних груп $f^* : A(X) \to A(Y)$ є алгебрично вільною абелевою групою з множиною твірних потужності $i(f)$. Тому для довільних A-еквівалентних відображень f і g маємо, що $i(f) = i(g)$.

Твердження 4. *Нехай $f_1 : X_1 \to Y_1$, $f_2 : X_2 \to Y_2$ – відображення між дискретними просторами. Тоді такі умови є еквівалентними:*

1) $f_1 \overset{M}{\sim} f_2$;

2) $|X_1| = |X_2|$, $|Y_1 \setminus f_1(X_1)| = |Y_2 \setminus f_2(X_2)|$, $|f_1(X_1)| = |f_2(X_2)|$, $i(f_1) = i(f_2)$.

Д о в е д е н н я. $(1 \Rightarrow 2)$ З означення M-еквівалентних відображень випливає, що $|X_1| = |X_2|$ і $|Y_1| = |Y_2|$. З того, що $f_1 \overset{M}{\sim} f_2$, випливає, що $i(f_1) = i(f_2)$. За теоремою 1 маємо, що $Y_1 / f(X_1) \overset{M^*}{\sim} Y_2 / f(X_2)$. Звідси $|Y_1 \setminus f_1(X_1)| = |Y_1 / f_1(X_1)| - 1 = |Y_2 / f_2(X_2)| - 1 = |Y_2 \setminus f_2(X_2)|$.

$(2 \Rightarrow 1)$ За теоремою 1 умова $f_1 \overset{M}{\sim} f_2$ еквівалентна кон'юнкції умов $sf_1 \overset{M}{\sim} sf_2$ та $Y_1 / f(X_1) \overset{M^*}{\sim} Y_2 / f(X_2)$. Зважаючи на дискретність просторів $Y_i / f(X_i)$, умова $Y_1 / f(X_1) \overset{M^*}{\sim} Y_2 / f(X_2)$ еквівалентна умові $\left|Y_1 / f_1(X_1)\right| = \left|Y_2 / f_2(X_2)\right|$, яку отримують з ланцюжка рівностей

$$\left|Y_1 / f_1(X_1)\right| = \left|Y_1 \setminus f_1(X_1)\right| + 1 = \left|Y_2 \setminus f_2(X_2)\right| + 1 = \left|Y_2 / f_2(X_2)\right|.$$

Доведемо тепер, що $sf_1 \overset{M}{\sim} sf_2$. Відображення sf_i є топологічно еквівалентним до ретракції $r_i : X \to T_i$ з дискретного простору X потужності $|X_1| = |X_2|$, де простір $D_{|X_i|} / T_i$ має потужність $i(f_i)$.

Зважаючи, що для сюр'єктивного $f : X \to Y$ відображення виконується рівність $f(X) = Y$, отримаємо такий наслідок.

Наслідок 1. *Нехай* $f_1 : X_1 \to Y_1$, $f_2 : X_2 \to Y_2$ *– сюр'єктивні відображення між дискретними просторами. Тоді такі умови є еквівалентними:*

1) $f_1 \overset{M}{\sim} f_2$;
2) $|X_1| = |X_2|$, $i(f_1) = i(f_2)$, $|Y_1| = |Y_2|$.

Зважаючи на те, що для ін'єктивного відображення виконується рівність $i(f) = 0$, отримаємо такий наслідок.

Наслідок 2. *Нехай* $f_1 : X_1 \to Y_1$, $f_2 : X_2 \to Y_2$ *– вкладення дискретних просторів. Тоді такі умови є еквівалентними:*

1) $f_1 \overset{M}{\sim} f_2$;
2) $|X_1| = |X_2|$, $\left|Y_1 \setminus f_1(X_1)\right| = \left|Y_2 \setminus f_2(X_2)\right|$, $\left|f_1(X_1)\right| = \left|f_2(X_2)\right|$.

Твердження 5. *Нехай* $f_1 : X_1 \to Y_1$, $f_2 : X_2 \to Y_2$ *– відображення з дискретних просторів* X_1 *та* X_2 *у скінченні простори* Y_1 *та* Y_2*, відповідно. Тоді наступні умови є еквівалентними:*

1) $f_1 \overset{M}{\sim} f_2$;
2) $|X_1| = |X_2|$ і $\left|f_1(X_1)\right| = \left|f_2(X_2)\right|$, $\left|Y_1 \setminus f_1(X_1)\right| = \left|Y_2 \setminus f_2(X_2)\right|$.

Доведення. $(1 \Rightarrow 2)$. Випливає з твердження 2.

$(2 \Rightarrow 1)$. Якщо простір X_1 є нескінченним, то $i(f_1) = |X_1| = |X_2| = i(f_2)$, а якщо скінченний, то $i(f_1) = |X_1| - \left|f_1(X_1)\right| = |X_2| - \left|f_2(X_2)\right| = i(f_2)$. Далі застосовуємо твердження 2.

Наслідок 3. *Нехай* $f_1 : X \to Y_1$, $f_2 : X \to Y_2$ *– відображення з дискретного простору* X *на скінченні дискретні простори* Y_1, Y_2*. Тоді такі умови є еквівалентними:*

1) $f_1 \overset{M}{\sim} f_2$;
2) $\left|f_1(X_1)\right| = \left|f_2(X_2)\right|$, $|Y_1| = |Y_2|$.

Наслідок 4. *Нехай* $f_1 : X_1 \to Y_1$, $f_2 : X_2 \to Y_2$ *– відображення між дискретними просторами. Тоді такі умови є еквівалентними:*

1) $f_1 \overset{M}{\sim} f_2$;

2) $f_1 \overset{A}{\sim} f_2$;

3) $f_1 \overset{L}{\sim} f_2$.

2. **Класифікація відображень, що мають праві обернені**

Нагадаємо, що ретракції $r_1 : X \to K_1$ та $r_2 : X \to K_2$ топологічного простору X називають *паралельними* [5], якщо виконано умови $r_1 \circ r_2 = r_1$ і $r_2 \circ r_1 = r_2$. Образи простору X при паралельних ретракціях називають *паралельними ретрактами.*

Теорема 2. *Нехай* K_1, K_2 *– скінченні ретракти топологічного простору* X, $|K_1| = |K_2|$. *Тоді існують такі ретракції* $\rho_1 : X \to K_1$, $\rho_2 : X \to K_2$, *що* $\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_1$ *і* $\rho_2 \circ \rho_1 = \rho_2$.

Доведення. Нехай $K_1 = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, $K_2 = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$. Оскільки простір K_1 є ретрактом простору X, то всі точки a_i належать різним компонентам зв'язності простору X. Аналогічно усі точки b_i належать різним компонентам зв'язності простору X. Кожному елементу з $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ поставимо у відповідність деякий елемент з $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$. Якщо точки a_i та $b_{m(i)}$ належать одній компоненті, то єднаємо їх у одну пару. Так поєднаємо деякі точки з $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ із деякими точками з $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$. Після цього кожній точці a_j з множини $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, яка ще не має пари з $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$, ставимо у відповідність довільну точку $b_{m(j)}$ з множини тих $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$, які ще не отримали пару на попередньому кроці. На просторі X розглянемо відношення еквівалентності $\sim$, поклавши $a_i \sim b_{m(i)}$. Нехай $p : X \to X/\sim$ – фактор-відображення. Згідно зі запропонованим способом зівставлення між елементами множин $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ і $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$, можемо стверджувати, що усі елементи множини $p(K_1) = \{p(a_1), p(a_2), ..., p(a_n)\}$ належать різним компонентам простору $X/\sim$. А тому підпростір $p(K_1)$ є ретрактом простору $X/\sim$. Нехай $\rho : X/\sim \to p(K_1)$ – деяка ретракція. Покладемо $p_1 = p|_{K_1}$. Покажемо, що існує таке неперервне відображення $\rho_1 : X \to K_1$, що $p_1 \circ \rho_1 = \rho \circ p$. Нехай $u \in X$. Покладемо $\rho_1(u) = p_1^{-1}(\rho(p(u)))$. Коректність цього означення випливає з того, що відображення p_1 є гомеоморфізмом. Неперервність відображення ρ_1 випливає з того, що воно є гомеоморфізмом, а відображення p і ρ є неперервними і факторними. За побудовою $\rho_1(a_i) = a_i$ для всіх $i = 1, .., n$, тобто ρ_1 є ретракцією. Аналогічно можемо побудувати ретракцію $\rho_2 : X \to K_2$. Покажемо, що $\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_1$. Нехай $x \in X$. Якщо $\rho_1(x) = a_i$, то за побудовою $\rho_2(x) = b_{m(i)}$. Таким чином, $\rho_2 \circ \rho_1(x) = \rho_2(a_i) = \; = b_{m(i)} = \rho_2(x)$. Аналогічно доведемо, що $\rho_2 \circ \rho_1 = \rho_2$.

Відображення $f : X_1 \to Y_1$ і $g : X_2 \to Y_2$ називають *топологічно еквівалентними*, якщо існують такі гомеоморфізми $h_1 : X_1 \to X_2$ та $h_2 : Y_1 \to Y_2$, що $h_2 \circ f = g \circ h_1$.

Твердження 6. *Якщо* $\rho_1 : X \to K_1$, $\rho_2 : X \to K_2$ *– ретракції топологічного простору* X *на його паралельні ретракти* K_1 *та* K_2, *то* $\rho_1 \overset{M}{\sim} \rho_2$.

Д о в е д е н н я. Доведення виконаємо у два кроки. На першому покажемо, що довільні дві паралельні ретракції $r_1 : X \to K_1$ та $r_2 : X \to K_2$ топологічного простору X є топологічно еквівалентними відображеннями. Нехай $h_1 : X \to X$ – відображення, означене як $h_1(x) = x$ для всіх $x \in X$. Покладемо $h_2 = r_2 |_{K_1}$. З того, що виконуються умови $r_1 \circ r_2 = r_1$ і $r_2 \circ r_1 = r_2$, випливає, що відображення h_2 є гомеоморфізмом між просторами K_1 та K_2. Оскільки

$$h_2 \circ r_1(x) = r_2 \circ r_1(x) = r_2(x) = r_2 \circ h_1(x),$$

то відображення $r_1 : X \to K_1$ та $r_2 : X \to K_2$ є топологічно еквівалентними.

На другому кроці покажемо, що довільні ретракції $s_1 : X \to K$ та $s_2 : X \to K$ з топологічного простору X на його ретракт K Очевидно, $s_1 \circ s_2 = s_2$ і $s_2 \circ s_1 = s_1$. Розглянемо неперервне відображення $i : X \to F(X)$, означене як $i(x) = s_1(x) x^{-1} s_2(x)$. Продовжимо $i(x)$ до неперервного гомоморфізму $I : F(X) \to F(X)$. Тоді

$$\begin{aligned} I \circ i(x) &= s_1\left(s_1(x)x^{-1}s_2(x)\right) \cdot \left(s_1(x)x^{-1}s_2(x)\right)^{-1} \cdot s_2\left(s_1(x)x^{-1}s_2(x)\right) \cdot = \\ &= s_1 s_1(x) s_1(x)^{-1} s_1 s_2(x) s_2(x)^{-1} x s_1(x)^{-1} s_2 s_1(x) s_2(x)^{-1} s_2 s_2(x) = \\ &= s_1(x) s_1(x)^{-1} s_2(x) s_2(x)^{-1} x s_1(x)^{-1} s_1(x) s_2(x)^{-1} s_2(x) = x. \end{aligned}$$

Отже, $I \circ I = x$ для всіх $x \in F(X)$. Окрім того,

$$s_2 \circ i = s_2\left(s_1(x)x^{-1}s_2(x)\right) = s_2 s_1(x) s_2(x)^{-1} s_2 s_2(x) = s_1(x) s_2(x)^{-1} s_2(x) = s_1(x).$$

З останніх двох тотожностей випливає, що $s_1 \overset{M}{\sim} s_2$.

Нехай $\rho_1 : X \to K_1$, $\rho_2 : X \to K_2$ – ретракції топологічного простору X на його паралельні ретракти K_1 та K_2, а $r_1 : X \to K_1$, $r_2 : X \to K_2$ – відповідні паралельні ретракції. Тоді

$$\rho_1 \overset{M}{\sim} r_1 \overset{h}{\sim} r_2 \overset{M}{\sim} \rho_2.$$

Теорема 3. *Нехай* $f_1 : X \to Y_1$, $f_2 : X \to Y_2$ *– неперервні відображення з топологічного простору* X *у скінченні дискретні простори* Y_1, Y_2. *Тоді такі умови є еквівалентними:*

1) $f_1 \overset{M}{\sim} f_2$;
2) $\left|f_1(X)\right| = \left|f_2(X)\right|$, $\left|Y_1\right| = \left|Y_2\right|$.

Д о в е д е н н я. $(1 \Rightarrow 2)$. Виконується для довільних відображень.

$(2 \Rightarrow 1)$. Відображення $f_1 : X \to Y_1$ є топологічно еквівалентним до деякої ретракції $r_1 : X \to K_1$ на скінченний ретракт K_1, відображення $f_2 : X \to Y_2$ – до деякої ретракції $r_2 : X \to K_2$ на скінченний ретракт K_2, що має ту ж потужність, що і K_1. За теоремою 2 існують такі ретракції $\rho_1 : X \to K_1$, $\rho_2 : X \to K_2$, що $\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_1$ і $\rho_2 \circ \rho_1 = \rho_2$. Враховуючи твердження 6, отримаємо, що $f_1 \overset{h}{\sim} r_1 \overset{M}{\sim} \rho_1 \overset{h}{\sim} \rho_2 \overset{M}{\sim} r_2 \overset{h}{\sim} f_2$.

Твердження 7. *Нехай* X_1, X_2 *– топологічні простори,* $K_1 \subseteq X_1$, $K_2 \subseteq X_2$ *– їхні скінченні ретракти, такі, що* $|K_1| = |K_2|$. *Тоді такі умови є еквівалентними:*

1) $X_1 \overset{A}{\sim} X_2$;

2) $X_1 / K_1 \overset{A}{\sim} X_2 / K_2$.

Доведення. $(1 \Rightarrow 2)$ За теоремою 2.2 з праці [5] $X_1 \overset{A}{\sim} (X_1 / K_1) \oplus D_{|X_1|-1}$, $X_2 \overset{A}{\sim} (X_2 / K_2) \oplus D_{|X_2|-1}$. Звідси $(X_1 / K_1) \oplus D_{|X_1|-1} \overset{A}{\sim} (X_2 / K_2) \oplus D_{|X_2|-1}$. Як встановлено раніше [6], з умови $X^+ \overset{A}{\sim} Y^+$ випливає умова $X \overset{A}{\sim} Y$. Застосувавши це твердження $|X_1| - 1$ разів, отримаємо, що $X_1 / K_1 \overset{A}{\sim} X_2 / K_2$.

$(2 \Rightarrow 1)$ $X_1 \overset{A}{\sim} (X_1 / K_1) \oplus D_{|X_1|-1} \overset{A}{\sim} (X_2 / K_2) \oplus D_{|X_2|-1} \overset{A}{\sim} X_2$.

Твердження 8. *Нехай* X_1, X_2 *– топологічні простори,* $K_1 \subseteq X_1$, $K_2 \subseteq X_2$ *– їхні скінченні ретракти,* $r_i : X_i \to K_i$ *– відповідні ретракції. Тоді такі умови є еквівалентними:*

1) $r_1 \overset{A}{\sim} r_2$;

2) $X_1 \overset{A}{\sim} X_2$ *і* $|K_1| = |K_2|$.

Доведення. $(1 \Rightarrow 2)$ Випливає з означення A-еквівалентних відображень.

$(2 \Rightarrow 1)$ За твердженням 7 маємо, що $X_1 / K_1 \overset{A}{\sim} X_2 / K_2$. Як було встановлено у праці [1], умова $r_1 \overset{A}{\sim} r_2$ еквівалентна умові $X_1 / K_1 \overset{A}{\sim} X_2 / K_2$ і $K_1 \overset{A}{\sim} K_2$.

З теореми 2 з праці [1] випливає.

Наслідок 5. *Нехай* X_1, X_2 *– топологічні простори,* $K_1 \subseteq X_1$, $K_2 \subseteq X_2$ *– їхні скінченні ретракти. Тоді наступні умови є еквівалентними:*

1) $(X_1, K_1) \overset{A}{\sim} (X_2, K_2)$;

2) $X_1 \overset{A}{\sim} X_2$ *і* $|K_1| = |K_2|$.

З теореми 2 з праці [1] випливають такі наслідки.

Наслідок 6. *Нехай* X_1, X_2 *– топологічні простори,* $K_1 \subseteq X_1$, $K_2 \subseteq X_2$ *– їхні скінченні ретракти, такі, що* $e_i : K_i \to X_i$ *– відповідні вкладення. Тоді такі умови є еквівалентними:*

1) $e_1 \overset{A}{\sim} e_2$;

2) $X_1 \overset{A}{\sim} X_2$ *і* $|K_1| = |K_2|$.

Наслідок 7. *Нехай* $f_1 : X \to Y_1$, $f_2 : X \to Y_2$ *– неперервні відображення з топологічного простору* X *на скінченні простори* Y_1 *та* Y_2, *причому* $|Y_1| = |Y_2|$. *Тоді* $f_1 \overset{M}{\sim} f_2$.

Для топологічного простору X та його підпростору Y позначимо через $D_{X,Y}$ ін'єктивне відображення з дискретного простору потужності $|Y|$ у простір X, образом якого є підпростір Y.

Твердження 9. *Нехай* (X_1,Y_1), (X_2,Y_2) *– пари топологічних просторів. Тоді такі умови є еквівалентними:*

1) $(X_1,Y_1)\overset{M}{\sim}(X_2,Y_2)$;

2) $D_{X_1,Y_1}\overset{M}{\sim}D_{X_2,Y_2}$.

Доведення. $(1\Rightarrow 2)$ Нехай $h:F(X_1)\to F(X_2)$ – такий топологічний ізоморфізм, що $h\big(G(Y_1)\big)=G(Y_2)$. Покладемо $j=h_{G(Y_1)}$. Нехай $i:F\big(D_{|Y_1|}\big)\to F\big(D_{|Y_2|}\big)$ ізоморфізм, який задає та ж формула, що j, але відносно дискретних топологій. За побудовою $D^*_{X_2,Y_2}\circ i=j\circ D^*_{X_1,Y_1}$, тобто, $D_{X_1,Y_1}\overset{M}{\sim}D_{X_2,Y_2}$.

$(2\Rightarrow 1)$ Випливає з твердження 2.

Для неперервного відображення f позначимо через $M[f]$ клас всіх неперервних відображень, M-еквівалентних до f. Для пари (X,Y) топологічних просторів позначимо через $M[X,Y]$ клас всіх пар топологічних просторів, M-еквівалентних до пари (X,Y).

Твердження 10. *Для довільної пари топологічних просторів* (X,Y) *виконується рівність* $M\left[D_{X,Y}\right]=\left\{D_{X_1,Y_1}:(X_1,Y_1)\in M[X,Y]\right\}$.

Доведення. Включення $M\left[D_{X,Y}\right]\supseteq\left\{D_{X_1,Y_1}:(X_1,Y_1)\in M[X,Y]\right\}$ випливає з твердження 9.

Доведемо його. Нехай $g:T\to K$, $g\in M\left[D_{X,Y}\right]$. З того, що ін'єктивності M-еквівалентних відображень збігаються, випливає, що відображення g є ін'єктивним. З того, що $g\overset{M}{\sim}D_{X,Y}$, випливає, що $T\overset{M}{\sim}D_{|Y|}$, а отже, простір T є дискретним. Таким чином, відображення g є топологічно еквівалентним відображенню $D_{K,g(T)}$. За твердженням 9 матимемо, що $\big(K,g(T)\big)\in M[X,Y]$.

Як встановлено у праці [6], поняття A-еквівлентності та A^*-еквівалентності збігаються.

Твердження 11. *Нехай* $f_1:X_1\to Y_1$, $f_2:X_2\to Y_2$ *– неперервні відображення, причому підпростір* $f_i(X_i)$ *є скінченним ретрактом в* Y_i. *Тоді такі умови є еквівалентними:*

1) $f_1\overset{A}{\sim}f_2$;

2) $X_1\overset{A}{\sim}X_2$, $Y_1\overset{A}{\sim}Y_2$, $|f_1(X_1)|=|f_2(X_2)|$.

Доведення. $(1 \Rightarrow 2)$. Умови $X_1 \overset{A}{\sim} X_2$ і $Y_1 \overset{A}{\sim} Y_2$ випливають з означення A-еквівалентних відображень. За твердженням 3 $sf_1 \overset{A}{\sim} sf_2$, звідки $f_1(X_1) \overset{A}{\sim} f_2(X_2)$, тобто $|f_1(X_1)| = |f_2(X_2)|$.

$(2 \Rightarrow 1)$ За твердженням 5 матимемо, що $sf_1 \overset{A}{\sim} sf_2$. За твердженням 6, $Y_1 / f_1(X_1) \overset{A}{\sim} Y_2 / f_2(X_2)$, звідки за теоремою 1 отримаємо, що $f_1 \overset{A}{\sim} f_2$.

1. *Пирч Н. М. M*-еквівалентність пар і відображень // Мат. методи та фіз.-мех. поля – 2006 – 49. №2 – С. 21–26.
2. *Пирч Н. М.* Еквівалентність за Марковим пар невідокремлюваних просторів// Вісник ЛНУ Сер. Мех.-мат. – 2020 – 90. – С. 57–68.
3. *Arhangel'skii A. V., Tkachenko M. G.,* Topological Groups and Related Structures // Amsterdam-Paris, Atlantis Press; 2008. – 782 p.
4. *Baars J.* Equivalence of certain free topological groups // Comment. Math. Univ. Carolin. – 1992. – 33, No. 1. – P. 125–130.
5. *Okunev O. G.* A method for consructing examples of M-equivalent spaces // Topology and its Applications. – 1990. – 36. – P. 157–171; Correction: Topology and its Applications. – 1993. – 49. – P. 191–192.
6. *Pyrch N. M.* Orthogonal retractions and the relation of *M*-equivalence // Matematichni Studii. – 2003. – 20, No. 2 – P. 151–161.

M-EQUIVALENT MAPPINGS ASSOCIATED WITH DISCRETE SPACES

In the paper we propose the seria of isomorphic classifications of the M-equivalent mappings with discrete range or discrete image

Keywords: free topological group, M-equivalence

НУ «Львівська політехніка», Львів

Одержано 15.11.23