

## ТЕМПЕРАТУРНІ НАПРУЖЕННЯ В БІМЕТАЛЕВИХ КОНТАКТНИХ ТЕРМОПЕРЕТВОРЮВАЧАХ ПІД ЧАС ЕКСПЛУАТАЦІЇ

*Температурні напруження порушують міцність зчеплення між пластинами біметалевого термоперетворювача і спричиняють часткове розшарування або повний розрив між ними. Запропоновано конструкцію термоперетворювача, в якій між пластинами є проміжок, а пластину з більшим коефіцієнтом температурного розширення виконано у вигляді секцій, які впираються в бурти пластини з меншим його значенням. Досліджено міцність запропонованого біметалевого термоперетворювача. Встановлено, що він зберігає цілісність до температур порядку 760°C.*

**Ключові слова:** термоперетворювач, температурні напруження, міцність, коефіцієнт температурного розширення, конструкція.

**Вступ.** Біметалевий контактний термоперетворювач під час нагрівання деформується, і ці деформації є інформативні, щоб доволі точно визначати температуру досліджуваних об'єктів за невисокої вартості та незначних затрат на обслуговування.

Більшість термометричних біметалевих систем та їх аналогів є кусково-однорідними тілами, що складаються з металів з різними фізико-механічними характеристиками. Внаслідок цього в них за умов експлуатації можуть виникати значні температурні напруження, які спричиняють розтріскування, порушення зчеплення між окремими пластинами, частковий або повний розрив між ними, відшарування різних кристалічних напівпровідникових структур і виникнення тріщин під час закріплення в корпусах тих чи інших конструкційних складників і, врешті-решт, – вихід з ладу основного конструкційного елемента.

Тому актуально підвищити міцність існуючих термометричних систем і створити нові надійніші. Дослідження термомеханічних процесів у приладах контактної термометрії за умов експлуатації з використанням адекватних засобів математичного та комп'ютерного моделювання має вирішальне значення для оцінювання їх надійності та визначення допустимих меж функціонування.

У цій праці запропоновано версію надійнішого біметалевого термоперетворювача [4, 5] під час довготривалого циклічного теплового навантаження і досліджено його напружено-деформований стан (НДС) в умовах експлуатації з використанням розробленого програмного забезпечення [3].

Часто вживаний в інженерній практиці термочутливий елемент містить дві з'єднані в один пакет пластини з різних металів [1]. Внаслідок різних фізико-механічних характеристик його складників, передусім коефіцієнта температурного розширення, біметалевий термоперетворювач під час нагрівання відхиляється в бік елемента з меншим його значенням.

Такі термочутливі елементи достатньо точно визначають температуру досліджуваних об'єктів. Однак істотний їх недолік – недостатня надійність, позаяк температурні напруження, що виникають під час їх експлуатації, призводять до порушення міцності зчеплення між пластинами і часткового або повного розриву між ними.

Аби уникнути швидкого виходу з ладу біметалевого термоперетворювача, запропоновано таку його конструкцію [4, 5], за якої пластина з більшим коефіцієнтом лінійного температурного розширення виконана із окре-

---

✉ drobenko@ukr.net

мих сегментів, а інша – на одній із бокових сторін містить бурти (див. рис. 1; 1 та 2 – пластини з більшим і меншим коефіцієнтом лінійного температурного розширення, відповідно; 3 – бурти; 4 – проміжки між пластинами; а і б – вид збоку, в – згори). За такої будови сегменти пластини з більшим коефіцієнтом лінійного температурного розширення встановлені між буртами пластини з меншим. Для пом'якшення контакту між пластинами передбачено проміжки (можливі конфігурації ілюструють рис. 1а і 1б); водночас торцеві поверхні буртів пластини з меншим коефіцієнтом лінійного температурного розширення та сегменти пластини з більшим, які до них прилягають, виконано конічними з однаковими кутами нахилу  $\alpha$ , які вибирають з умови збереження цілісності термоперетворювача за його згину під час експлуатації внаслідок робочих деформацій. Лімітований проміжок 4 між пластинами 1 та 2 усуває тертя між ними.

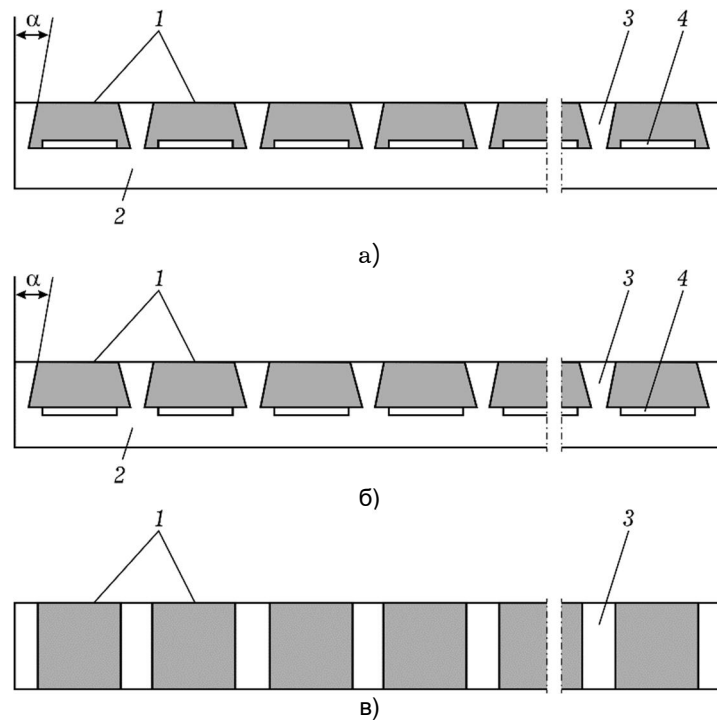


Рис. 1

Дослідимо НДС такого термоперетворювача.

1. **Формулювання задачі.** Розглянемо контактний термоперетворювач загальної довжини  $L$ , що займає область  $\Omega$  з неперервною за Ліпшицем поверхнею  $\Gamma$ , в середовищі з температурою  $T$ . Віднесемо його до декартової системи координат  $O_{XYZ}$  (рис. 2 і 3; на рис. 3 подано розрахункову область  $\Omega$  у площині  $XY$ ). Сегменти з матеріалу з більшим коефіцієнтом лінійного температурного розширення висотою  $h_1$  (в напрямі координати  $Y$ ) мають довжину  $l_0$ . Висота пластини з меншим коефіцієнтом температурного розширення  $h_2$ , а ширина бурта  $h_0$ . Товщина термоперетворювача (в напрямі координати  $Z$ )  $H$ . Проміжок між пластинами  $\delta_0$ .

Температурне поле  $T(x, y, z, t)$  у тривимірному тілі  $\Omega$  описує рівняння теплопровідності [3]

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \bar{\nabla} \cdot (\lambda \bar{\nabla} T) + Q, \quad (x, y, z) \in \Omega, \quad t \in [0, \tau_*], \quad (1)$$

де  $t$  – час, що змінюється від 0 до  $\tau_*$ ;  $c$  – об'ємна теплоємність (добуток питомої теплоємності та густини);  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності;  $Q$  – потужність джерел тепла;  $\bar{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  – оператор Гамільтона.

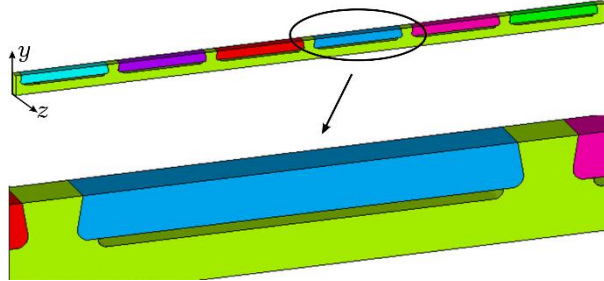


Рис. 2

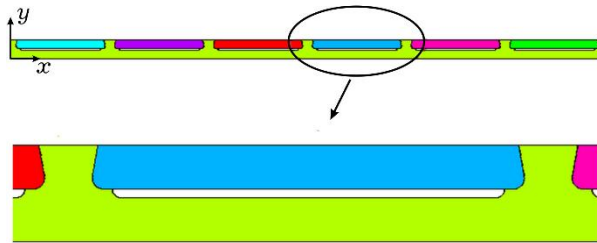


Рис. 3

Температура тіла у початковий момент часу задана. Тоді початкова умова для задачі теплопровідності набуває вигляду

$$T(x, y, z, 0) = T_0(x, y, z), \quad (2)$$

де  $T_0(x, y, z)$  – задана функція.

Вважатимемо, що тіло перебуває за умов конвективного теплообміну з довкіллям через поверхню  $\Gamma$ :

$$-\lambda \bar{\nabla} T n = \beta(T - T_S), \quad (x, y, z) \in \Gamma, \quad (3)$$

де  $n = (n_x, n_y, n_z)$  – вектор одиничної зовнішньої нормалі до поверхні  $\Gamma$ ;

$\beta$  – коефіцієнт тепловіддачі;  $T_S$  – температура зовнішнього середовища.

На межі  $\Gamma_{m_l}$  підобластей  $\Omega_m$  і  $\Omega_l$  з різними теплофізичними характеристиками задаємо умови ідеального теплового контакту, зокрема умову рівності температур

$$T_m(x, y, z, t) = T_l(x, y, z, t) \quad (4)$$

і теплових потоків

$$(-\lambda \bar{\nabla} T n)_m = (-\lambda \bar{\nabla} T n)_l, \quad \forall (x, y, z) \in \Gamma_{m_l}. \quad (5)$$

Таким чином, задачу про визначення температури в області термодинамічно розглядуваного формулювання зводимо до розв'язу-

вання рівняння теплопровідності (1) за початкової умови (2), крайової умови (3) та умов ідеального теплового контакту (4) та (5) на поверхнях контакту підобластей з різними теплофізичними характеристиками.

За наявності розподілів температури в тілі  $\Omega$  його НДС досліджували в межах загальної теорії пружності, повну систему рівнянь якої у квазістатичному формулюванні можна записати у матрично-векторному вигляді [9]

$$\{\varepsilon\} = [B]u; \quad (6)$$

$$[B]^* \{\sigma\} + F = 0; \quad (7)$$

$$\{\sigma\} = [G](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_T\}); \quad (8)$$

на множині

$$U = \{u = (u_x, u_y, u_z)^* : u = u_0, (x, y, z) \in \Gamma_u, u_x, u_y, u_z \in H^1(\Omega)\}, \quad (9)$$

де зірочкою позначено операцію транспонування, а компоненти тензорів деформацій та напружень об'єднано у вектори

$$\{\varepsilon\} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{23})^* \text{ та } \{\sigma\} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23})^*$$

Тут

$$[B] = \begin{bmatrix} \nabla_x & 0 & 0 & \nabla_y & \nabla_z & 0 \\ 0 & \nabla_y & 0 & \nabla_x & 0 & \nabla_z \\ 0 & 0 & \nabla_z & 0 & \nabla_x & \nabla_y \end{bmatrix}^* -$$

матриця геометричних співвідношень теорії пружності;

$$[G] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} -$$

матриця пружних сталей ( $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона);  $F$  – вектор об'ємних сил;  $\{\varepsilon_T\} = (\alpha_T T, \alpha_T T, \alpha_T T, 0, 0, 0)^*$  – температурні деформації ( $\alpha_T$  – коефіцієнт лінійного температурного розширення);  $u_0$  – заданий вектор переміщень на частині  $\Gamma_u$  поверхні  $\Gamma$ ;  $H^1(\Omega)$  – простір Соболева інтегрованих з квадратом за Лебегом на  $\Omega$  функцій з частинними похідними (в розумінні узагальнених функцій) першого порядку.

Задачу теорії пружності часто формулюють у переміщеннях. Тоді ключові рівняння для переміщень тіла отримують шляхом підставлення співвідношень (8) та (6) у рівняння рівноваги (7), внаслідок чого одержують три диференціальних рівняння еліптичного типу другого порядку для трьох компонент переміщень. У матрично-векторному вигляді рівняння рівноваги у переміщеннях набувають вигляду

$$[B]^* [G] ([B] u - \{\varepsilon_T\}) + F = 0. \quad (10)$$

Оскільки розглядуване тіло складається зі структурних елементів з різних матеріалів, задачу розв'язували з розривними коефіцієнтами у всій області тіла (для кожного структурного елемента – свої характеристики), а на межі підобластей з різними фізико-механічними характеристиками ста-

вили умови ідеального контакту (рівності переміщень та нормальних до поверхні поділу напружень).

Визначивши переміщення з рівняння (10) на множині (9), можна обчислити деформації за геометричними співвідношеннями (6) та напруження – за феноменологічними співвідношеннями (8).

У такому наближенні задачу про визначення НДС тіла за дії температурного навантаження формулюємо у два етапи. На першому – будуємо рівняння, що описує температурні розподіли в тілі. На другому – записуємо співвідношення (6), (8), (10), які окреслюють переміщення, деформації та напруження у тілі за відповідних крайових умов.

Зазначимо, що таке формулювання задачі теорії пружності у матрично-векторному вигляді є загальним і залишається без змін для всіх часткових випадків, зокрема для осесиметричної й плоскої задач. Тому під час числової реалізації загальна структура побудови розв'язку єдина як для тривимірних за просторовими змінними задач, так і для двовимірних. Змінюються лише блоки, які відповідають за обчислення конкретних часткових матриць і векторів. Наприклад, за плоского напруженого стану за відомих умов закріплення на частині поверхні  $\Gamma_U$  визначають переміщення  $U = (u_x, u_y)^*$ , деформації  $\{\epsilon\} = (\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, 2\epsilon_{xy})^*$  та напруження  $\{\sigma\} = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})^*$  зі співвідношень (6), (8), (10), де матриці диференціального оператора геометричних співвідношень теорії пружності та пружних сталей набувають вигляду [3]

$$[B]^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix},$$

$$[G] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}.$$

**2. Методика розв'язування.** Запишемо вихідні співвідношення для числового розв'язування задачі теплопровідності (1)–(5).

Відповідно до стандартної процедури методу зважених залишків [8] домножимо рівняння (1), що описує температурне поле в тілі, на довільну вагову функцію  $w_0$ , що належить вибраному функціональному простору  $H^1(\Omega)$ , і проінтегруємо отримане співвідношення за областю визначення. Тоді

$$\int_{\Omega} \left( c \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla(\lambda \nabla T) - Q \right) w_0 \, dv = 0 \quad \forall w_0 \in H^1(V). \quad (11)$$

Застосуємо до виразу (11) формулу Остроградського–Гауса, записану так [2, 7]:

$$\int_{\Omega} \bar{\nabla}(\lambda \bar{\nabla} T) w_0 \, dv = \int_{\Gamma} \lambda (\bar{\nabla} T \cdot \mathbf{n}) w_0 \, ds - \int_{\Omega} \lambda \bar{\nabla} T \cdot \bar{\nabla} w_0 \, dv. \quad (12)$$

Після підставлення співвідношення (12) в (11) маємо:

$$\int_{\Omega} \left( c \frac{\partial T}{\partial t} w_0 + \lambda \bar{\nabla} T \cdot \bar{\nabla} w_0 - Q w_0 \right) dv - \int_{\Gamma} \lambda (\bar{\nabla} T \cdot \mathbf{n}) w_0 \, ds = 0. \quad (13)$$

Для кусково-однорідного тіла, що містить  $M$  складників з різними теплофізичними характеристиками, умова рівності теплових потоків виконується природно. Адже співвідношення (13) тут має вигляд

$$\sum_{m=1}^M \int_{\Omega_m} \left( c \frac{\partial T}{\partial t} w_0 + \lambda \vec{\nabla} T \cdot \vec{\nabla} w_0 - Q w_0 \right) dv - \sum_{m=1}^M \int_{\Gamma_m} \lambda (\vec{\nabla} T \cdot \mathbf{n}) w_0 ds = 0 \quad \forall w_0 \in H^1(\Omega), \quad (14)$$

де  $\Omega_m$  – область евклідового простору, зайнята складником тіла з номером  $m$ ;  $\Gamma_m$  – поверхня області  $\Omega_m$ . Частина поверхні  $\Gamma_m$  може збігатись із частиною зовнішньої поверхні тіла  $\Gamma$ , а частина  $\Gamma_{ml}$  – бути поверхнею поділу між підобластю  $\Omega_m$  та іншою підобластю  $\Omega_l$  тіла з іншими теплофізичними характеристиками. Тоді після застосування формули Остроградського-Гауса для кожної з підобластей тіла співвідношення (14) міститимуть пари

$$\int_{\Gamma_{ml}} (-\lambda (\vec{\nabla} T \mathbf{n}) w_0)_m ds - \int_{\Gamma_{ml}} (-\lambda (\vec{\nabla} T \mathbf{n}) w_0)_l ds$$

для частин поверхонь підобластей тіла, які є поверхнями поділу між двома різними підобластями  $\Omega_m$  і  $\Omega_l$ . Оскільки  $\mathbf{n}$  – внутрішня (щодо  $\Omega_l$ ) нормаль до поверхні  $\Gamma_{ml}$ , біля другого доданку з'являється знак „мінус“ через умову (5) і довільність вагової функції  $w_0$ :

$$\int_{\Gamma_{ml}} (-\lambda (\vec{\nabla} T \mathbf{n}) w_0)_m ds - \int_{\Gamma_{ml}} (-\lambda (\vec{\nabla} T \mathbf{n}) w_0)_l ds = 0.$$

З урахуванням умови теплообміну (3) рівняння (14) для кусково-однорідного тіла набуває вигляду

$$\sum_{m=1}^M \int_{\Omega_m} \left( c \frac{\partial T}{\partial t} w_0 + \lambda \vec{\nabla} T \cdot \vec{\nabla} w_0 - Q w_0 \right) dv - \int_{\Gamma} (\beta (T - T_S) w_0) ds = 0 \quad \forall w_0 \in H^1(\Omega) \quad (15)$$

за умов (4) на межі підобластей, які враховуватимемо, вводячи відповідні апроксимації для шуканої функції  $T$  в області  $\Omega$ . Тож для кусково-однорідного тіла практично розв'язуватимемо те ж рівняння (1) з розривними коефіцієнтами у всій області  $\Omega$ .

Співвідношення (15) беремо за основу під час використання скінченно-елементного підходу до числового визначення температури у тілі. Зазначимо, що під час побудови цього співвідношення використали крайову умову (3), яка природно виконується для довільної геометричної конфігурації поверхні тіла, неперервної за Ліпшицем.

Після скінченно-елементної дискретизації співвідношення (15) за просторовими змінними отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь для невідомих значень температури у фіксованих точках тіла (які згідно з концепцією методу скінченних елементів називають вузлами) за початкової умови (2) і умов (4) на межах поділу.

Згідно з концепцією методу скінченних елементів [7, 9] подамо область  $\Omega$  як об'єднання скінченної кількості підобластей, які називатимемо скінченними елементами, щоб виконувались такі властивості:

- 1)  $\Omega = \bigcup_{e=1}^{n_e} \Omega_e$ ;
- 2)  $\forall e: e = 1 \div n_e \quad \Omega_e$  – замкнений і множина його внутрішніх точок

не є порожньою;

$$3) \forall e, m: e = 1 \div n_e; m = 1 \div n_e \quad \overset{\circ}{\Omega}_e \cap \overset{\circ}{\Omega}_m = \emptyset, \quad e \neq m;$$

$$4) \forall \Omega_e \text{ його межа } \partial\Omega_e \text{ неперервна за Лїпшицем};$$

5) довільно вибрана грань будь-якого скінченного елемента  $\Omega_e$  є або підмножиною поверхні області, або гранню іншого елемента  $\Omega_m$ ;

6) межа  $\Gamma$ , яка відділяє тіло від довкілля, та межі поділу підобластей з різних матеріалів перебувають на сторонах відповідних скінчених елементів.

Введемо на кожному скінченному елементі  $\Omega_e$  апроксимації функцій  $T$  та  $w_0$  через їхні значення у вузлах елемента:

$$T = [N]\{T_h\}_e; \quad w_0 = [N]\{w_h^0\}_e, \quad (16)$$

де  $[N] = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_n]$  – матриця базисних функцій (функцій форми) елемента [9];  $n$  – кількість його вузлів;

$\{T_h\}_e = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}^*$ ,  $\{w_h^0\}_e = \{w_1^0, w_2^0, \dots, w_n^0\}^*$  – значення температури  $T$  та вагової функції  $w_0$ , відповідно, у вузлах елемента.

Унаслідок побудови апроксимацій (16) умови (4) виконуватимуться автоматично, оскільки вузли на поверхнях  $\Gamma_{m_l}$  одночасно належатимуть областям  $\Omega_m$  та  $\Omega_l$ , і значення температури в цих вузлах буде одне і те ж.

Після підставлення апроксимацій (16) у співвідношення (15) (унаслідок довільності вагової функції  $w_0$  [8]) приходимо до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$[L_1]\{\dot{T}_h(t)\} + [L_0]\{T_h(t)\} = \{f_T\}, \quad \{T_h(0)\} = \{T_h^0\}, \quad (17)$$

для невідомих значень температури у вузлах скінченно-елементного поділу розглядуваної області  $\Omega$ .

Матрично-векторні характеристики у співвідношенні (17) отримуємо шляхом підсумовування відповідних матрично-векторних характеристик окремих скінчених елементів, які знаходимо так:

$$[L_0]_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \lambda(\nabla_1 N_i \nabla_1 N_j + \nabla_2 N_i \nabla_2 N_j + \nabla_3 N_i \nabla_3 N_j) dv + \int_{\Gamma_e} \beta N_i N_j ds; \quad (18)$$

$$[L_1]_{ij}^e = \int_{V_e} c N_i N_j dv; \quad (19)$$

$$\{f_T\}_i^e = \int_{\Gamma_e} \beta' N_i ds; \quad i, j = 1 \div n. \quad (20)$$

Співвідношення (18)–(20) проінтегруємо за квадратурними формулами [9]. Отриману систему звичайних диференціальних рівнянь (17) розв'язуємо за допомогою сім'ї простих однокрокових багатопараметричних алгоритмів [10].

Для цього дискретизуємо часовий проміжок:  $t_{k+1} = t_k + \Delta_k t$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) і розглянемо процес обчислень шуканого вектора  $\{T_h(t)\}$  на  $k$ -му кроці (в момент часу  $t_{k+1}$ ) через відомі його значення в момент часу  $t = t_k$  (на першому кроці значення шуканого вектора при  $t = t_0$  відомі з початкових умов).

Зазначимо, що крок дискретизації  $\Delta_k t$  може змінюватись під час обчислень за переходу від одного кроку до іншого, що дає можливість суттєво скоротити час числового моделювання процесів, які швидко виходять

на усталений режим, коли можна отримувати точні значення температури з набагато більшими кроками, ніж у перехідній фазі.

Подемо шукану вектор-функцію на розглядуваному часовому кроці  $[t_k, t_{k+1}]$  у вигляді ряду Тейлора зі залишковим членом, який визначимо через похідну цієї функції порядку  $p$  за часом  $t$  ( $0 \leq t \leq \Delta_k t$ ):

$$\{T_h(t)\} = \sum_{q=0}^{p-1} T_k^{(q)} \frac{t^q}{q!} + \psi_k^{(p)} \frac{t^p}{p!}, \quad (21)$$

де  $T_k^{(q)}$  – похідна шуканої вектор-функції  $\{T_h(t)\}$  порядку  $q$  у момент часу  $t = t_k$ .

Припустимо, що значення шуканого вектора та всіх його похідних до порядку  $p-1$  включно є відомими на початку кроку (при  $t = t_k$ );  $\psi_k^{(p)}$  – невідомий вектор, з допомогою якого значення шуканої функції та її похідних до порядку  $p-1$  включно на кінці кроку обчислюємо за співвідношеннями

$$\begin{aligned} \{T_h(t)\}_{k+1} = T_{k+1} &= \sum_{q=0}^{p-1} T_k^{(q)} \frac{(\Delta_k t)^q}{q!} + \psi_k^{(p)} \frac{(\Delta_k t)^p}{p!}, \\ \{\dot{T}_h(t)\}_{k+1} = \dot{T}_{k+1} &= \sum_{q=1}^{p-1} T_k^{(q)} \frac{(\Delta_k t)^{q-1}}{(q-1)!} + \psi_k^{(p)} \frac{(\Delta_k t)^{p-1}}{(p-1)!}, \dots \end{aligned} \quad (22)$$

Для визначення  $\psi_k^{(p)}$  формулюємо співвідношення методу зважених залишків [8]. Домножимо рівняння (17) на довільну ненульову функцію і проінтегруємо на проміжку  $[0, \Delta_k t]$ . Тоді

$$\int_0^{\Delta_k t} W([L_1] \dot{T} + [L_0] T - f_T) dt = 0. \quad (23)$$

Підставимо розвинення (21) у співвідношення (23). Тоді

$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta_k t} W \left( [L_1] \left( \sum_{q=0}^{p-1} T_k^{(q)} \frac{t^{q-1}}{(q-1)!} + \psi_k^{(p)} \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \right) \right) dt + \\ + \int_0^{\Delta_k t} W \left( [L_0] \left( \sum_{q=0}^{p-1} T_k^{(q)} \frac{t^q}{q!} + \psi_k^{(p)} \frac{t^p}{p!} \right) \right) dt - \int_0^{\Delta_k t} W f_T dt = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Розділимо рівняння (24) на  $\int_0^{\Delta_k t} W dt$  і введемо позначення

$$\int_0^{\Delta_k t} W t^q dt \left( \int_0^{\Delta_k t} W dt \right)^{-1} = \Theta_q (\Delta_k t)^q. \quad (25)$$

Тоді

$$[L_1] \left( \sum_{q=1}^{p-1} T_k^{(q)} \frac{(\Delta_k t)^{q-1}}{(q-1)!} \Theta_{q-1} + \psi_k^{(p)} \frac{(\Delta_k t)^{p-1}}{(p-1)!} \Theta_{p-1} \right) +$$



$$+[L_0] \left( \sum_{q=0}^{p-1} T_k^{(q)} \frac{(\Delta_k t)^q}{q!} \Theta_q + \psi_k^{(p)} \frac{(\Delta_k t)^p}{p!} \Theta_p \right) - \tilde{f}_T = 0, \quad (26)$$

$$\text{де } \tilde{f}_T = \left( \int_0^{\Delta_k t} W f_T dt \right) \left( \int_0^{\Delta_k t} W dt \right)^{-1}.$$

Після простих перегрупувань отримаємо систему рівнянь

$$\left( \frac{(\Delta_k t)^{p-1}}{(p-1)!} \Theta_{p-1} [L_1] + \frac{(\Delta_k t)^p}{p!} \Theta_p [L_0] \right) \psi_k^{(p)} = (\tilde{f}_T - [L_1] \dot{T}_{k+1} - [L_0] T_{k+1}) \quad (27)$$

для визначення  $\psi_k^{(p)}$ . Тут

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= \sum_{q=0}^{p-1} T_k^{(q)} \frac{(\Delta_k t)^q}{q!} \Theta_q, \\ \dot{T}_{k+1} &= \sum_{q=1}^{p-1} T_k^{(q)} \frac{(\Delta_k t)^{q-1}}{(q-1)!} \Theta_{q-1} \end{aligned} \quad (28)$$

є певними наближеннями значень  $T, \dot{T}$  у момент часу  $t_{k+1} = t_k + \Delta_k t$ .

Таким чином, шукану вектор-функцію  $\{T_h(t)\}$  у момент часу  $t_{k+1}$  можна визначити за співвідношеннями (22), (27), (28), використовуючи її значення та її похідних у момент часу  $t = t_k$ .

Розглянутий алгоритм повністю визначений, якщо на початку (при  $t = 0$ ) задані значення шуканої функції та її похідних до  $p-1$ -го порядку включно. За таких умов розрахунки на кожному кроці за часом виконуємо в три етапи:

1. Обчислюємо значення  $T_{k+1}, \dot{T}_{k+1}$  за співвідношеннями (28) на основі значень шуканої функції та її похідних до  $p-1$ -го порядку на початку кроку (при  $t = t_k$ ).

2. Визначаємо  $\psi_k^{(p)}$ , використовуючи співвідношення (27).

3. За формулами (22) знаходимо шуканий розв'язок та його похідні в кінці кроку (при  $t = t_{k+1}$ ).

Далі повторюємо ці ж обчислення, але вже на наступному кроці. За такого підходу похибка обчислень на проміжку  $[t_k, t_{k+1}]$  є порядку  $O(\Delta_k t_k^{p+1})$  [10].

Для методів першого, другого та третього порядків, відповідно, матимемо:

$$\begin{aligned} \psi_k^{(1)} &= ([L_1] + \Theta \Delta_k t [L_0])^{-1} (\tilde{f}_T - [L_0] T_k); \\ \psi_k^{(2)} &= \left( [\Theta_1 \Delta_k t [L_1] + \Theta_2 \frac{(\Delta_k t)^2}{2} [L_0]] \right)^{-1} (\tilde{f}_T - [L_1] \dot{T}_k - [L_0] (T_k + \Theta_1 \Delta_k t \dot{T}_k)); \\ \psi_k^{(3)} &= \left( \Theta_2 \frac{(\Delta_k t)^2}{2} [L_1] + \Theta_3 \frac{(\Delta_k t)^3}{3!} [L_0] \right)^{-1} \times \\ &\quad \times \left( \tilde{f}_T - [L_1] \left( \dot{T}_k + \Theta_1 \Delta_k t \ddot{T}_k \right) - [L_0] \left( T_k + \Theta_1 \Delta_k t \dot{T}_k + \Theta_2 \frac{(\Delta_k t)^2}{2} \ddot{T}_k \right) \right). \end{aligned}$$

Отримане сімейство методів узагальнює добре відомі методи. Наприклад, задаючи конкретний числовий параметр  $\Theta$  у схемі першого порядку, одержуємо метод Кренк–Ніколсон ( $\Theta = 1/2$ ), Гальборкіна ( $\Theta = 2/3$ ), повністю неявну ( $\Theta = 1$ ) чи явну ( $\Theta = 0$ ) схеми.

Використовуючи розглянутий алгоритм крок за кроком, одержуємо історію зміни температури у кожній точці скінченно-елементного поділу розглядуваної області. Значення температурно залежних теплофізичних характеристик на кожному кроці за часом можна ітераційно уточнювати. Оскільки розглянуті алгоритми є однокроковими, під час обчислень можна змінювати крок дискретизації задачі за часом.

За відомих розподілів температури на другому етапі розв'язуємо систему рівнянь рівноваги (11) у переміщеннях. Для цього застосуємо такий самий підхід зважених залишків із використанням методу скінченних елементів, як і для задачі теплопровідності. Домножимо рівняння (10) на довільну ненульову в області  $\Omega$  вагову вектор-функцію  $W^* = (w_1, w_2, w_3)$  і застосуємо до отриманого співвідношення формулу Остроградського–Гауса. Тоді [2, 7]

$$\int_{\Omega} W^* ([B]^* [G] [B]) u \, dv = \int_{\Omega} W^* ([B]^* [G] \{\varepsilon_T\}) \, dv - F \, dv. \quad (29)$$

Виконаємо стандартну скінченно-елементну дискретизацію області тіла  $\Omega$ . З цією метою введемо на кожному скінченному елементі апроксимації функцій  $W$ ,  $u$  через їхні значення у вузлах елемента [9]:

$$u = [N]q^{el}; \quad W = [N]\{W_h\}^{el}, \quad (30)$$

де

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix};$$

$q^{el} = \{u_1^1, u_2^1, u_3^1, u_1^2, u_2^2, u_3^2, \dots, u_1^n, u_2^n, u_3^n\}^*$  – вектор переміщень вузлів скінченного елемента;  $\{W_h\}^{el} = \{W_1^1, W_2^1, W_3^1, W_1^2, W_2^2, W_3^2, \dots, W_1^n, W_2^n, W_3^n\}^*$  – вектор значень вагової функції  $W$  у вузлах елемента.

Після підставлення введених апроксимацій (30) у співвідношення (29) вихідні скінченно-елементні рівняння рівноваги в переміщеннях через довільність вагової функції набувають вигляду [9]

$$[K] \cdot Q = f, \quad (31)$$

де  $Q$  – глобальний вектор вузлових переміщень тіла (всі компоненти переміщень послідовно пронумерованих вузлів скінченно-елементного поділу конструкції);  $[K]$  та  $f$  – матриця жорсткості і вектор навантаження внаслідок підсумовування відповідних матрично-векторних характеристик окремих елементів:

$$[K^{(e)}] = \int_{\Omega^{(e)}} [N]^* [B]^* [G] [B] [N] \, dv; \quad (32)$$

$$f^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} [N]^* [B]^* [G] \{\varepsilon_T\} \, dv. \quad (33)$$

Таким чином, задачу про визначення вектора переміщень тіла зведено до розв'язування системи лінійних алгебричних рівнянь (31) з матрицею жорсткості  $[K]$  і вектором температурного навантаження  $f$  [9]. Після роз-

в'язування системи (31) напруження в межах довільного елемента  $\Omega_e$  обчислюємо за формулою

$$\{\sigma\} = [G] [B][N]q_{(e)}. \quad (34)$$

3. **Числові результати.** Комп'ютерне моделювання процесів деформування термоперетворювача у середовищі з температурою  $T$  виконали з допомогою біквадратичних ізопараметричних скінченних елементів [9].

Досліджували термоперетворювач з міді ( $\alpha_{T_1} = 17.4 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ;  $E_1 = 100 \text{ ГПа}$ ;  $\nu_1 = 0.34$ ) і сталі 45 ( $\alpha_{T_2} = 13.4 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ;  $E_2 = 195 \text{ ГПа}$ ,  $\nu_2 = 0.3$ ) [6] з геометричними параметрами:  $h_1 = h_2 = 0.0005 \text{ м}$ ;  $l_0 = 0.005 \text{ м}$ ;  $h_0 = 0.0005 \text{ м}$ ;  $\delta_0 = 0.001 \text{ м}$ ;  $H = 0.0005 \text{ м}$ .

Перебуваючи в середовищі з температурою  $5^\circ\text{C}$ , термоперетворювач деформується (рис. 4).

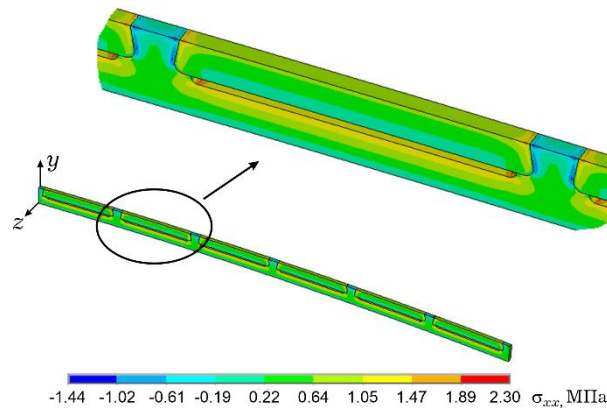


Рис. 4

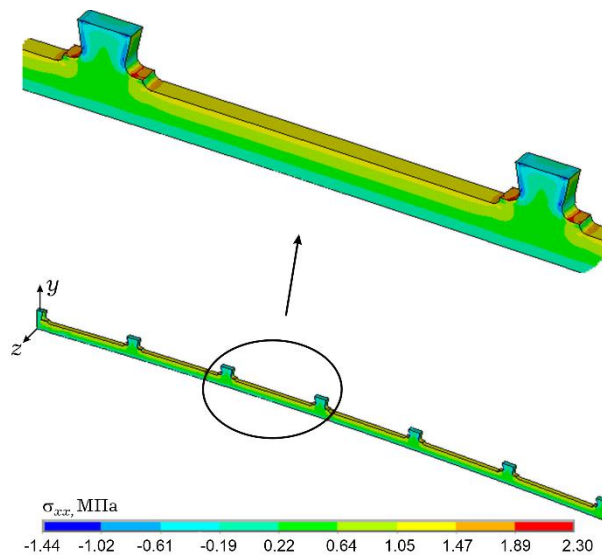


Рис. 5

Максимальні розтягальні напруження виникають у сталевій пластині у вузьких областях біля бортів (рис. 5). У мідних секціях вони суттєво нижчі,

що ілюструє рис. 6. Тут наведено розподіл осевих напружень у типовій мідній секції; напруження в інших секціях аналогічні, локальні їх максимуми в усіх секціях практично однакові. В центральних частинах мідних сегментів і поза околами буртів пластини сталі.

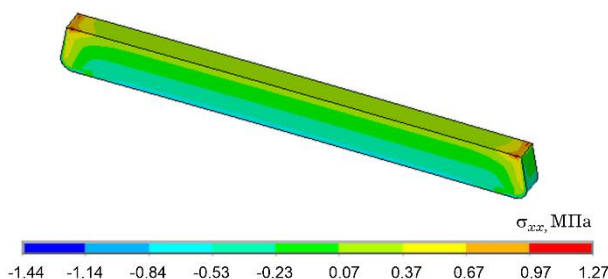


Рис. 6

Напруження по товщині термоперетворювача в перерізі  $z = 0$  поза околами буртів подано на рис. 7. На нижніх поверхнях пластин маємо стиск, на верхніх – розтяг. Через проміжок між пластинами напруження на внутрішній поверхні мідних секцій і верхній поверхні сталеві пластини не працюють на розрив. Завдяки такій конструкції термоперетворювач зберігає цілісність.

Зазначимо, що напружений стан у термоперетворювачі практично не залежить від кількості секцій (аналогічні результати отримані і для різної кількості секцій).

Під час дослідження температурних полів встановили, що за швидкостей зростання температури зовнішнього середовища до  $10^\circ\text{C}/\text{сек}$  розподіл температури в термоперетворювачі практично однорідний, наприклад, різниця між максимальною і мінімальною на п'ятій секунді (за температури докільця  $50^\circ\text{C}$ ) не перевищує  $0,2^\circ\text{C}$ .

Оскільки пластина тонка, задачу можна розв'язувати в межах моделі плоского напруженого стану.

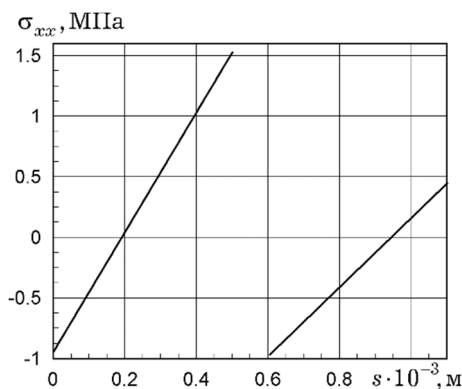


Рис. 7

Дуже важливо, аби термоперетворювач працював у пружній області, позаяк залишкові температурні деформації внаслідок його пластичного деформування можуть суттєво впливати на параметри роботи вимірювальної апаратури. Якщо він виготовлений з твердого сплаву міді, то за коливань температури зі швидкістю до  $10^\circ\text{C}/\text{сек}$  він функціонуватиме в пружній області до температур порядку  $760^\circ\text{C}$  (саме при такій температурі максимальні напруження в пластині досягають межі пластичності сталі).

**Висновки.** На основі математичного й комп'ютерного моделювання в межах теорії пружності досліджено напружено-деформований стан біметалевого термоперетворювача зі суттєво вищою надійністю та роботоздатністю за довготривалого циклічного теплового навантаження. Через проміжок між пластинами і бурти закріплення напруження на внутрішній поверхні мідних секцій з більшим коефіцієнтом лінійного температурного розширення і верхній поверхні сталеві пластили з буртами не працюють на розрив, тому термоперетворювач зберігає цілісність до температур порядку 760°C.

Досліджуючи термомеханічні процеси у приладах контактної термометрії за умов, що відповідають експлуатаційним, можна знаходити нові рішення під час конструювання та вдосконалення існуючих приладів.

1. *Браславский Д. А.* Приборы и датчики летательных аппаратов. - Москва: Машиностроение, 1980. - 392 с
2. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. - Москва: Наука, 1980. - 384 с.
3. *Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра. Т.4: Термомеханіка намагнечуваних електропровідних термочутливих тіл / О. Р. Гачкевич, Б. Д. Дробенко. - Львів: СПОЛОМ, 2010. - 256 с.*
4. *Патент на корисну модель № 119339. Термочутливий елемент / Бардин Т. П., Настишин Ю. А., Ванкевич П. І., Дробенко Б. Д. - Опубл. 25.09.2017, Бюл. № 18.*
5. *Патент на корисну модель № 119343. Термочутливий елемент / Бардин Т. П., Яковлев М. Ю., Ванкевич П. І., Дробенко Б. Д. - Опубл. 25.09.2017, Бюл. № 18.*
6. *Таблицы физических величин. Справ. / Под ред. акад. И. К. Кикоина. - Москва: Атомиздат, 1976. - 1008 с*
7. *Bathe K. J.* Finite Element Procedures Analysis. - Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1995. - 1038 p.
8. *Zienkiewicz O. C., Morgan K.* Finite elements and approximation. - UK, Swansea, University of Wales: John Wiley & Sons, 1983.
9. *Zienkiewicz O. C., Taylor R. L.* Finite Element Method: Vol. 1. The Basis. - London: Butterworth Heinemann, 2000. - 690 p.
10. *Zienkiewicz O. C., Wood W. L., Nine N. W.* A unified set of single step algorithm. Part 1: general formulation and applications // Int. J. for Num. Meth. in Eng. - 1984. - 20. - P. 1529-1552.

#### TEMPERATURE STRESSES IN BIMETALLIC CONTACT THERMOCONVERTERS DURING OPERATION

*Temperature stresses affect the bond strength between the component plates of the bimetallic thermoconverter and cause partial delamination or a complete break-off. The design of the thermoconverter is proposed, in which there is a gap between the plates, and the plate with a higher coefficient of thermal expansion is made in the form of sections that rest on the edges of the plate with a smaller coefficient of thermal expansion. The strength of such bimetallic thermoconverter is investigated. It is shown that due to such a design, the thermoconverter maintains its integrity up to temperatures of the order of 760°C.*

*Keywords: thermoconverter, thermal stresses, strength, deformability, structure.*