

ПРО ПОДАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ КВАЗИСТАТИЧНОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ БАГАТОШАРОВОГО ЦИЛІНДРА

Побудовано розв'язок квазістатичної задачі термопружності для довгого багатошарового порожнистого циліндра у вигляді суперпозиції залежностей, кожна з яких описує напружений стан, зумовлений відповідними тепловим або силовим чинниками. Проілюстровано його застосування до визначення термопружного стану для різних законів зміни температур довкілля і теплових потоків та асимптотичних режимів, а також до розв'язання обернених задач термопружності. При цьому використано знайдені точні суми рядів за власними функціями задачі теплопровідності для розгляданого циліндра. Проаналізовано три розподіли температури довкілля усередині дванадцятишарового порожнистого циліндра, які визначено за заданими розподілами, відповідно, переміщення, радіальної деформації і колового напруження на обмежувальній зовнішній поверхні.

Ключові слова: багатошаровий циліндр, нестационарне температурне поле, асимптотичний тепловий режим, ряди за власними функціями, термопружність, обернені задачі, узагальнені функції, функції Гріна, лінійні сплайни.

Вступ. Задачі про термопружність для багатошарових циліндрів, зокрема за сталих фізико-механічних характеристик (ФМХ) шарів, розглядали в багатьох працях. Інтерес до них зумовлений як необхідністю дослідження термомеханічної поведінки поширених циліндричних елементів конструкцій, так і використанням їх розв'язків до визначення термопружного стану за математичними моделями, що враховують, наприклад, залежність ФМХ від координати і температури. Один з підходів до розв'язання відповідних задач на основі таких моделей передбачає [8, 9] їх зведення до інтегроалгебричних рівнянь для переміщень та відшукання їх методом послідовних наближень, обмеженим щонайбільше першим наближенням. При цьому нульовим наближенням є переміщення, знайдені із задачі термопружності для багатошарового циліндра за сталих ФМХ. Крім того, розв'язки прямих задач необхідні для розв'язання обернених і оптимізаційних задач термопружності. Обернені задачі і методи їх розв'язання для однорідних, функціонально-градієнтних та двошарових циліндрів розглянуто в працях [1, 4, 11–13, 15].

З аналізу літературних джерел випливає, що розв'язки прямих задач подані, як правило, у вигляді інтегральних залежностей від температурного поля.

Мета цієї статті – отримати для багатошарового циліндра зі сталими ФМХ шарів формули для квазістатичних переміщень, деформацій і напружень у вигляді виокремлених залежностей від розподілів теплових і силових чинників за урахування осьової деформації та проілюструвати ефективність цих формул.

1. **Формулювання задачі термопружності.** Розглянемо віднесений до циліндричної системи координат $\tilde{r}, \varphi, \tilde{z}$ довгий порожнистий циліндр, складений із n концентричних шарів, кожен з яких займає область $\tilde{r}_{p-1} \leq \tilde{r} \leq \tilde{r}_p$ ($p = 1, 2, \dots, n$). Вважаємо, що обмежувальні поверхні $\tilde{r} = \tilde{r}_0$ та $\tilde{r} = \tilde{r}_n$ перебувають під дією залежних від часу τ теплових потоків густини $\tilde{q}_0 \dot{q}_0^*(\tau)$ та

✉ dept19@iapmm.lviv.ua

$\tilde{q}_n \tilde{q}_n^*(\tau)$ і навантажень $E^* \sigma_0^*(\tau)$ та $E^* \sigma_n^*(\tau)$. Через ці ж поверхні відбувається конвективний теплообмін зі середовищами температур $\tilde{t}_{c0} \tilde{t}_{c0}^*(\tau)$ та $\tilde{t}_{cn} \tilde{t}_{cn}^*(\tau)$. Шари, які ідеально контактують і мають початкову температуру $t_0^{(p)}(\tilde{r})$, нагріваються внутрішніми джерелами тепла густини $w_0^{(p)} w_t^{(p)}(\tilde{r}, \tau)$. Торцеві поверхні циліндра теплоізовані і перебувають під дією зусиль, рівнодійна яких дорівнює $P_0^*(\tau)$. Тут множники біля функцій мають розмірності відповідних величин.

2. Подання розв'язку задачі теплопровідності. Для визначення температурного поля $\bar{t}(r, Fo)$ використовуємо рівняння теплопровідності

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \bar{\lambda}_t(r) \frac{\partial \bar{t}}{\partial r} \right] = \bar{c}_V(r) \frac{\partial \bar{t}}{\partial Fo} - Po(r) \bar{w}_t(r, Fo), \quad (1)$$

граничні і початкову умови

$$\left(\bar{\lambda}_t^{(1)} \frac{\partial \bar{t}}{\partial r} - Bi_0 \bar{t} \right) \Big|_{r=r_0} = -Q_0(Fo), \quad \left(\bar{\lambda}_t^{(n)} \frac{\partial \bar{t}}{\partial r} + Bi_n \bar{t} \right) \Big|_{r=r_n} = Q_n(Fo), \quad (2)$$

$$\bar{t} \Big|_{Fo=0} = \bar{t}_0(r), \quad (3)$$

де $\bar{\lambda}_t(r)$, $\bar{c}_V(r)$, $Po(r)$, $\bar{t}(r, Fo)$, $\bar{t}_0(r)$ і $w_t(r, Fo)$ мають вигляд

$$\bar{p}(r) = \bar{p}_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (\bar{p}_{i+1} - \bar{p}_i) S(r - r_i); \quad (4)$$

$$\bar{t}(r, Fo) = \bar{t}_1(r, Fo) + \sum_{i=1}^{n-1} [\bar{t}_{i+1}(r, Fo) - \bar{t}_i(r, Fo)] S(r - r_i),$$

$$\bar{t}_0(r) = \bar{t}_0^{(1)}(r) + \sum_{i=1}^{n-1} [\bar{t}_0^{(i+1)}(r) - \bar{t}_0^{(i)}(r)] S(r - r_i),$$

$$\bar{w}_t(r, Fo) = \bar{w}_t^{(1)}(r, Fo) + \sum_{i=1}^{n-1} [\bar{w}_t^{(i+1)}(r, Fo) - \bar{w}_t^{(i)}(r, Fo)] S(r - r_i);$$

$$Q_j(Fo) = Bi_j \bar{t}_{cj} t_{cj}(Fo) + Ki_j q_j(Fo), \quad \bar{t} = \frac{t}{t_s}, \quad r = \frac{\tilde{r}}{\ell}, \quad r_0 = \frac{\tilde{r}_0}{\ell}, \quad r_p = \frac{\tilde{r}_p}{\ell}, \quad Fo = \frac{\lambda_t^* \tau}{c_V^* \ell^2},$$

$$[q_j(Fo), t_{cj}(Fo), \sigma_j(Fo), P_0^*(Fo)] = [q_j^*(\tau), t_{cj}^*(\tau), \sigma_j^*(\tau), P_0^*(\tau)], \quad Bi_j = \frac{\alpha_j \ell}{\lambda_t^*}, \quad \bar{t}_{cj} = \frac{\tilde{t}_{cj}}{t_s},$$

$$Ki_j = \frac{\ell \tilde{q}_j}{\lambda_t^* t_s}, \quad \bar{\lambda}_t^{(p)} = \frac{\lambda_t^{(p)}}{\lambda_t^*}, \quad \bar{c}_V^{(p)} = \frac{c_V^{(p)}}{c_V^*}, \quad Po_p = \frac{\ell^2 w_0^{(p)}}{\lambda_t^* t_s}, \quad \bar{t}_0^{(p)}(r) = \frac{t_0^{(p)}(\tilde{r})}{t_s},$$

$\bar{w}_t^{(p)}(r, Fo) = w_t^{(p)}(\tilde{r}, \tau)$, $p = 1, \dots, n$, $j = 0, n$; $\lambda_t^{(p)}$ і $c_V^{(p)}$ – коефіцієнт теплопровідності і об'ємна теплоємність p -го шару; t_s – характерна температура; α_j – коефіцієнти тепловіддачі; ℓ , λ_t^* і c_V^* – параметри, що мають розмірності одиниці довжини, коефіцієнта теплопровідності і об'ємної теплоємності; $S(\cdot)$ – функція Гевісайда; похідна по r – узагальнена.

Розв'язок задачі (1)–(3) знаходимо [9], використовуючи функцію Гріна

$$G(r, \rho, Fo) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi(r, \mu_m) \Phi(\rho, \mu_m)}{N(\mu_m)} e^{-\mu_m^2 Fo}, \quad (5)$$

яка задовольняє рівняння

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \bar{\lambda}_t(r) \frac{\partial G}{\partial r} \right] = \bar{c}_V(r) \frac{\partial G}{\partial F_0},$$

граничні та початкову умови

$$\left(\bar{\lambda}_t^{(1)} \frac{\partial G}{\partial r} - \text{Bi}_0 G \right) \Big|_{r=r_0} = 0, \quad \left(\bar{\lambda}_t^{(n)} \frac{\partial G}{\partial r} + \text{Bi}_n G \right) \Big|_{r=r_n} = 0;$$

$$G|_{F_0=0} = \frac{1}{\rho \bar{c}_V(\rho)} \delta(r - \rho). \quad (6)$$

Тут

$$\mu^2 N(\mu) = \left(\frac{\text{Bi}_n^2}{\bar{\lambda}_t^{(n)}} + \bar{\lambda}_t^{(n)} \varepsilon_n^2 \right) r_n^2 \Phi_n^2(r_n, \mu) - \left(\frac{\text{Bi}_0^2}{\bar{\lambda}_t^{(1)}} + \bar{\lambda}_t^{(1)} \varepsilon_1^2 \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} r_i^2 \left\{ \left[\bar{\lambda}_t^{(i)} (1 - K_\lambda^{(i+1)}) \right] [\Phi_i'(r_i, \mu)]^2 + (\bar{c}_V^{(i)} - \bar{c}_V^{(i+1)}) \mu^2 \Phi_i^2(r_i, \mu) \right\};$$

$$\Phi(r, \mu) = \Phi_1(r, \mu) + \sum_{i=1}^{n-1} [\Phi_{i+1}(r, \mu) - \Phi_i(r, \mu)] S(r - r_i);$$

$$\Phi_1(r, \mu) = \frac{\text{Bi}_0}{\bar{\lambda}_t^{(1)}} \Psi_{00}(\varepsilon_1, r_0, r) + \Psi_{10}(\varepsilon_1, r_0, r),$$

$$\Phi_1'(r, \mu) = - \left[\frac{\text{Bi}_0}{\bar{\lambda}_t^{(1)}} \Psi_{01}(\varepsilon_1, r_0, r) + \varepsilon_1^2 \Psi_{11}(\varepsilon_1, r_0, r) \right];$$

$$\Phi_p(r, \mu) = r_{p-1} \left[\Phi_{p-1}(r_{p-1}, \mu) \Psi_{10}(\varepsilon_p, r_{p-1}, r) + \right.$$

$$\left. + K_\lambda^{(p)} \Phi_{p-1}'(r_{p-1}, \mu) \Psi_{00}(\varepsilon_p, r_{p-1}, r) \right],$$

$$\Phi_p'(r, \mu) = -r_{p-1} \left[\Phi_{p-1}(r_{p-1}, \mu) \varepsilon_p^2 \Psi_{11}(\varepsilon_p, r_{p-1}, r) \right.$$

$$\left. + K_\lambda^{(p)} \Phi_{p-1}'(r_{p-1}, \mu) \Psi_{01}(\varepsilon_p, r_{p-1}, r) \right],$$

$$\Psi_{k,j}(\varepsilon_p, x, y) = \frac{\pi}{2} \varepsilon_p^{k-j} \left[J_k(\varepsilon_p x) Y_j(\varepsilon_p y) - Y_k(\varepsilon_p x) J_j(\varepsilon_p y) \right], \quad k, j = 0, 1,$$

$$\varepsilon_p = \mu \sqrt{\bar{c}_V^{(p)} / \bar{\lambda}_t^{(p)}}, \quad p = 1, \dots, n; \quad K_\lambda^{(p)} = \bar{\lambda}_t^{(p-1)} / \bar{\lambda}_t^{(p)}, \quad p = 2, \dots, n;$$

μ_m – корені трансцендентного рівняння

$$\left[\bar{\lambda}_t^{(n)} \Phi_n'(r, \mu) + \text{Bi}_n \Phi_n(r, \mu) \right] \Big|_{r=r_n} = 0; \quad (7)$$

$J_k(x)$, $Y_k(x)$ – функції Бесселя k -го порядку; $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака; штрихом позначено похідну по r .

На основі цього розв'язку розподіл температурного поля в p -му шарі подаємо у вигляді

$$\bar{T}_p(r, F_0) = r_0 Q_{0p}(r, F_0) + r_n Q_{np}(r, F_0) + Q_{wp}(r, F_0) + Q_{t_0p}(r, F_0),$$

$$p = 1, \dots, n, \quad (8)$$

де $Q_{jp}(r, F_0)$ ($j = 0, n, w, t_0$) визначали за такими залежностями:

$$Q_{jp}(r, F_0) = \int_0^{F_0} G_p(r, r_j, F_0 - \xi) Q_j(\xi) d\xi, \quad j = 0, n; \quad (9)$$

$$Q_{wp}(r, F_0) = \int_0^{r_n} \int_0^{F_0} G_p(r, \rho, F_0 - \xi) w_t(\rho, \xi) \rho d\xi d\rho,$$

$$Q_{t_0p}(r, F_0) = \int_0^{r_n} G_p(r, \rho, F_0) \bar{c}_v(\rho) t_0(\rho) \rho d\rho;$$

$$G_p(r, \rho, F_0) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_p(r, \mu_m) \Phi(\rho, \mu_m)}{N(\mu_m)} e^{-\mu_m^2 F_0}. \quad (10)$$

3. Подання розв'язку задачі термопружності. Для визначення температурних переміщень і напружень використовуємо рівняння з узагальненими похідними [8]

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[c(r) \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda(r) \frac{\bar{u}}{r} \right] + 2\mu(r) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\bar{u}}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} [c^*(r) \alpha_t(r) t] - \bar{\varepsilon}_z \frac{d\lambda(r)}{dr}, \quad (11)$$

граничні умови

$$\bar{\sigma}_r|_{r=r_0} = -\sigma_0(F_0), \quad \bar{\sigma}_r|_{r=r_n} = -\sigma_n(F_0), \quad 2\pi \int_0^{r_n} r \bar{\sigma}_z dr = \frac{1}{\ell^2} P_0(F_0) \quad (12)$$

та співвідношення

$$\bar{\sigma}_r = c(r) \bar{\varepsilon}_r + \lambda(r) \left(\frac{\bar{u}}{r} + \bar{\varepsilon}_z \right) - c^*(r) \alpha_t(r) t,$$

$$\bar{\sigma}_\varphi = \lambda(r) (\bar{\varepsilon}_r + \varepsilon_z) + c(r) \frac{\bar{u}}{r} - c^*(r) \alpha_t(r) t,$$

$$\bar{\sigma}_z = c(r) \bar{\varepsilon}_z + \lambda(r) \left(\bar{\varepsilon}_r + \frac{\bar{u}}{r} \right) - c^*(r) \alpha_t(r) t.$$

Тут переміщення $\bar{u}(r, F_0)$ відносимо до ℓ ; $\bar{\varepsilon}_r(r, F_0) = \frac{\partial \bar{u}(r, F_0)}{\partial r}$ – радіальна деформація; функції $c(r) = \lambda(r) + 2\mu(r)$, $c^*(r) = \frac{E(r)}{1 - 2\nu(r)}$, $\mu(r) = \frac{E(r)}{2[1 + \nu(r)]}$, $\lambda(r) = \frac{E(r)\nu(r)}{[1 + \nu(r)][1 - 2\nu(r)]}$ мають вигляд таких, як і функція (4); функції $E(r)$, $\nu(r)$ і $\alpha_t(r)$ у межах ρ -го шару збігаються, відповідно, зі сталими модулями пружності \bar{E}_ρ , коефіцієнтами Пуассона $\bar{\nu}_\rho$ і температурними коефіцієнтами лінійного розширення $\bar{\alpha}_{t\rho}$; ε_z – осьова деформація.

На основі розв'язку задачі (11), (12), отриманого раніше [9] з використанням функції Гріна задачі пружності для багатошарового циліндра, та подання (8) розподіли для визначення переміщень, деформацій і напружень у ρ -му шарі подамо у вигляді

$$\left[\bar{u}_\rho(r, F_0), \bar{\varepsilon}_{r\rho}(r, F_0), \frac{1}{E} \bar{\sigma}_{r\rho}(r, F_0), \frac{1}{E} \bar{\sigma}_{\varphi\rho}(r, F_0), \frac{1}{E} \bar{\sigma}_{z\rho}(r, F_0) \right] = \left[\bar{U}_{1\rho}(r, F_0), \bar{U}_{2\rho}(r, F_0), 2\bar{\mu}_\rho \bar{U}_{3\rho}(r, F_0), 2\bar{\mu}_\rho \bar{U}_{4\rho}(r, F_0), 2\bar{\mu}_\rho \bar{U}_{5\rho}(r, F_0) \right], \quad (13)$$

де

$$\bar{U}_{kp}(r, F_0) = \chi_{kp}^t(r, F_0) + \chi_{kp}^y(r, F_0) + \chi_{kp}^e(r, F_0), \quad k = 1, 2, 3, 4, 5; \quad (14)$$

$$\chi_{kp}^t(r, F_0) = r_0 \chi_{kp}^0(r, F_0) + r_n \chi_{kp}^n(r, F_0) + \chi_{kp}^w(r, F_0) + \chi_{kp}^{t_0}(r, F_0); \quad (15)$$

$$\chi_{kp}^j(r, F_0) = \bar{U}_{kp}^j(r, F_0) - \varepsilon_z^j(F_0) U_{kp}^e(r); \quad (16)$$

$$\varepsilon_z^0(F_0) = \frac{2}{b} \sum_{p=1}^n \bar{\mu}_p U_{5p}^{*0}(F_0), \quad \varepsilon_z^n(F_0) = \frac{2}{b} \sum_{p=1}^n \bar{\mu}_p U_{5p}^{*n}(F_0),$$

$$\varepsilon_z^w(F_0) = \frac{2}{b} \sum_{p=1}^n \bar{\mu}_p U_{5p}^{*w}(F_0), \quad \varepsilon_z^{t_0}(F_0) = \frac{2}{b} \sum_{p=1}^n \bar{\mu}_p U_{5p}^{*t_0}(F_0);$$

$$U_{kp}^j(r, F_0) = \frac{1}{2Q} [\varphi_{2k,p}(r) \bar{R}_{1p}^j(F_0) - \varphi_{2k-1,p}(r) \bar{R}_{2p}^j(F_0)] + \bar{K}_p^* \omega_{kp}^j(r, F_0);$$

$$\omega_{1p}^j(r, F_0) = \frac{1}{r} Q_{jp}^*(r, F_0), \quad \omega_{2p}^j(r, F_0) = Q_{jp}(r, F_0) - \frac{1}{r^2} Q_{jp}^*(r, F_0),$$

$$\omega_{3p}^j(r, F_0) = -\frac{1}{r^2} Q_{jp}^*(r, F_0), \quad \omega_{4p}^j(r, F_0) = -\omega_{2p}^j(r, F_0), \quad \omega_{5p}^j(r, F_0) = -Q_{jp}(r, F_0);$$

$$U_{5p}^{*j}(F_0) = \frac{1}{2Q} [\beta_{2p} \bar{R}_{1p}^j(F_0) - \beta_{1p} \bar{R}_{2p}^j(F_0)] h_p(r_p) - \bar{K}_p^* Q_{jp}^*(r_p, F_0);$$

$$\bar{R}_{1p}^j(F_0) = \sum_{i=1}^{p-1} M_{1i}^+ \frac{\bar{c}_i \bar{K}_i^*}{\bar{c}_p} Q_{ji}^*(r_i, F_0), \quad \bar{R}_{2p}^j(F_0) = \sum_{i=p}^n M_{2i}^- \frac{\bar{K}_i^*}{r_i^2} Q_{ji}^*(r_i, F_0);$$

$$\bar{K}_p^* = t_s \bar{\alpha}_{tp} \frac{1 + \bar{\nu}_p}{1 - \bar{\nu}_p}, \quad p = 1, 2, \dots, n;$$

$$Q_{jp}^*(r, F_0) = \int_{r_{p-1}}^r \rho Q_{jp}(\rho, F_0) d\rho, \quad j = 0, n, w, t_0; \quad (17)$$

$$\chi_{kp}^y(r, F_0) = \frac{1}{2QE^*} [\chi_{kp}^{y0}(r) \sigma_0(F_0) - \chi_{kp}^{yn}(r) \sigma_n(F_0)],$$

$$\chi_{kp}^{y0}(r) = \frac{2r_0^2}{\bar{c}_p} \varphi_{2k,p}(r) - \varepsilon_z^{y0} U_{kp}^e(r),$$

$$\chi_{kp}^{yn}(r) = \frac{1}{\bar{c}_n} \varphi_{2k-1,p}(r) - \varepsilon_z^{yn} U_{kp}^e(r);$$

$$\varepsilon_z^{y0} = \frac{2}{b} \sum_{p=1}^n \bar{\mu}_p U_{5p}^{y0} h_p(r_p), \quad \varepsilon_z^{yn} = \frac{2}{b} \sum_{p=1}^n \bar{\mu}_p U_{5p}^{yn} h_p(r_p), \quad b = 2 \sum_{p=1}^n \bar{\mu}_p U_{5p}^e h_p(r_p);$$

$$U_{5p}^{y0} = \beta_{2p} \frac{2r_0^2}{r_p^2 \bar{c}_p}, \quad U_{5p}^{yn} = \beta_{1p} \frac{1}{\bar{c}_n}, \quad h_p(r) = \frac{r^2 - r_{p-1}^2}{2};$$

$$\chi_{kp}^e(r, F_0) = \frac{1}{2\pi b l^2 E^*} U_{kp}^e(r) P_0(F_0),$$

$$U_{kp}^e(r) = \frac{1}{2Q} [\bar{R}_{1p}^e \varphi_{2k,p}(r) - \bar{R}_{2p}^e \varphi_{2k-1,p}(r)] + \omega_{kp}^e(r),$$

$$\omega_{1p}^e(r) = \frac{1}{r} I_p^e(r), \quad \omega_{2p}^e(r) = \bar{\nu}_p^* \frac{r^2 + r_{p-1}^2}{2r^2},$$

$$\omega_{3p}^\varepsilon(r) = -\frac{1}{r^2} I_p^\varepsilon(r), \quad \omega_{4p}^\varepsilon(r) = -\omega_{2p}^\varepsilon(r), \quad \omega_{5p}^\varepsilon(r) = -\frac{1}{1-\bar{v}_p};$$

$$\bar{R}_{1p}^{\varepsilon*} = \sum_{j=1}^{p-1} M_{1j}^+ I_j^\varepsilon(r_j) \frac{\bar{c}_j}{\bar{c}_p}, \quad \bar{R}_{2p}^{\varepsilon*} = \sum_{j=p}^n M_{2j}^- I_j^\varepsilon(r_j) \frac{1}{r_j^2}, \quad I_p^\varepsilon(r) = \bar{v}_p^* h_p(r);$$

$$\varphi_{1p}(r) = M_{1p}^+ r + M_{1p}^- \frac{r_{p-1}^2}{r}, \quad \varphi_{2p}(r) = M_{2p}^+ \frac{1}{r} - M_{2p}^- \frac{r}{r_p^2},$$

$$\varphi_{3p}(r) = M_{1p}^+ - M_{1p}^- \left(\frac{r_{p-1}}{r} \right)^2, \quad \varphi_{4p}(r) = -M_{2p}^+ \frac{1}{r^2} - M_{2p}^- \frac{1}{r_p^2},$$

$$\varphi_{5p}(r) = \frac{M_{1p}^+}{1-2\bar{v}_p} - M_{1p}^- \frac{r_{p-1}^2}{r^2}, \quad \varphi_{6p}(r) = -\frac{M_{2p}^+}{r^2} - \frac{M_{2p}^-}{1-2\bar{v}_p} \frac{1}{r_p^2},$$

$$\varphi_{7p}(r) = \frac{M_{1p}^+}{1-2\bar{v}_p} + M_{1p}^- \frac{r_{p-1}^2}{r^2}, \quad \varphi_{8p}(r) = \frac{M_{2p}^+}{r^2} - \frac{M_{2p}^-}{1-2\bar{v}_p} \frac{1}{r_p^2},$$

$$\varphi_{9p}(r) = \beta_{1p} = 2M_{1p}^+ \frac{\bar{v}_p}{1-2\bar{v}_p}, \quad \varphi_{10p}(r) = \beta_{2p} = -\frac{2M_{2p}^-}{r_p^2} \frac{\bar{v}_p}{1-2\bar{v}_p};$$

$$\bar{Q} = \bar{\Phi}_n^{(1)}(r_n) + \bar{v}_n^* \bar{\Phi}_n^{(0)}(r_n);$$

$$M_{1p}^\pm = 2(1 \mp \bar{v}_1^*), \quad M_{1p}^\pm = \bar{\Phi}_{p-1}^{(0)}(r_{p-1})(1 \pm K_p) \pm \bar{\Phi}_{p-1}^{(1)}(r_{p-1})K_{cp};$$

$$\bar{\Phi}_1^{(m)}(r) = 1 - \bar{v}_1^* + (-1)^m (1 + \bar{v}_1^*) \left(\frac{r_0}{r} \right)^2;$$

$$\bar{\Phi}_p^{(m)}(r) = \bar{\Phi}_{p-1}^{(0)}(r_{p-1}) f_{p1}^{(m)}(r) + \bar{\Phi}_{p-1}^{(1)}(r_{p-1}) f_{p2}^{(m)}(r),$$

$$f_{p1}^{(m)}(r) = \frac{1}{2} \left[1 + K_p + (-1)^m (1 - K_p) \left(\frac{r_{p-1}}{r} \right)^2 \right],$$

$$f_{p2}^{(m)}(r) = \frac{K_{cp}}{2} \left[1 - (-1)^m \left(\frac{r_{p-1}}{r} \right)^2 \right], \quad m = 0, 1,$$

$$K_p = K_{cp} \bar{v}_{p-1}^* - \bar{v}_p^*, \quad K_{cp} = \frac{\bar{c}_{p-1}}{\bar{c}_p}, \quad p = 2, 3, \dots, n;$$

$$M_{2p}^\pm = \kappa_{np}^{(2)} + \bar{v}_n^* \kappa_{np}^{(1)} \pm (\kappa_{np}^{(4)} + \bar{v}_n^* \kappa_{np}^{(3)}), \quad p = 1, 2, \dots, n;$$

$$\kappa_{ii}^{(1)} = \kappa_{ii}^{(4)} = 1, \quad \kappa_{ii}^{(2)} = \kappa_{ii}^{(3)} = 0,$$

$$\kappa_{n,i}^{(1)} = f_{n1}^{(0)}(r_n) \kappa_{n-1,i}^{(1)} + f_{n2}^{(0)}(r_n) \kappa_{n-1,i}^{(2)},$$

$$\kappa_{n,i}^{(2)} = f_{n1}^{(1)}(r_n) \kappa_{n-1,i}^{(1)} + f_{n2}^{(1)}(r_n) \kappa_{n-1,i}^{(2)},$$

$$\kappa_{n,i}^{(3)} = f_{n1}^{(0)}(r_n) \kappa_{n-1,i}^{(3)} + f_{n2}^{(0)}(r_n) \kappa_{n-1,i}^{(4)},$$

$$\kappa_{n,i}^{(4)} = f_{n1}^{(1)}(r_n) \kappa_{n-1,i}^{(3)} + f_{n2}^{(1)}(r_n) \kappa_{n-1,i}^{(4)}, \quad i = n, n-1, \dots, 1;$$

$$\bar{c}_p = 2\bar{\mu}_p \frac{1 - \bar{\nu}_p}{1 - 2\bar{\nu}_p}, \quad \bar{\mu}_p = \frac{\bar{E}_p}{2E^*(1 + \bar{\nu}_p)}, \quad \bar{\nu}_p^* = \frac{\bar{\nu}_p}{1 - \bar{\nu}_p};$$

E^* – деяке значення модуля пружності.

Отже, визначення термопружного стану, зумовленого заданими тепловими чинниками, звели до обчислення інтегралів (9) і (17).

Наведемо вирази для інтегралів $Q_{jp}(r, Fo)$ і $Q_{jp}^*(r, Fo)$ ($j = 0, n$), в яких функції $Q_j(Fo)$ описують широкий спектр розподілів температури довкілля і інтенсивності теплового потоку (розподіли початкової температури і джерел тепла залишалися незмінними). При цьому використовуватимемо функції $g_{k+1}^{(p)}(r, r_j)$, $k = 1, 2, \dots$, які є сумами рядів, наведених у додатку, та функції

$$g_{k+1}^{*(p)}(r, r_j) = \int_{r_{p-1}}^r x g_{k+1}^{(p)}(x, r_j) dx.$$

1. Нехай функції $Q_j(Fo)$ змінюються за періодичним законом:

$$Q_j(Fo) = A_{1j} \sin \omega_j Fo + A_{2j} \cos \omega_j Fo,$$

де A_{1j} і A_{2j} – сталі. Тоді згідно з формулами (9) і (17) матимемо:

$$Q_{jp}(r, Fo) = Q_{jp}^{st}(r, Fo) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_p(r, \mu_m) \Phi(r_j, \mu_m)}{N(\mu_m)} \frac{A_{1j} \omega_j - A_{2j} \mu_m^2}{\mu_m^4 + \omega_j^2} e^{-\mu_m^2 Fo}; \quad (18)$$

$$Q_{jp}^*(r, Fo) = Q_{jp}^{*st}(r, Fo) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_p^*(r, \mu_m) \Phi(r_j, \mu_m)}{N(\mu_m)} \frac{A_{1j} \omega_j - A_{2j} \mu_m^2}{\mu_m^4 + \omega_j^2} e^{-\mu_m^2 Fo}, \quad (19)$$

де

$$Q_{jp}^{st}(r, Fo) = (A_{1j} \sin \omega_j Fo + A_{2j} \cos \omega_j Fo) 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_p(r, \mu_m) \Phi(r_j, \mu_m)}{N(\mu_m)} \frac{\mu_m^2}{\mu_m^4 + \omega_j^2} + \omega_j (A_{2j} \sin \omega_j Fo - A_{1j} \cos \omega_j Fo) 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_p(r, \mu_m) \Phi(r_j, \mu_m)}{N(\mu_m)} \frac{1}{\mu_m^4 + \omega_j^2}; \quad (20)$$

$$Q_{jp}^{*st}(r, Fo) = (A_{1j} \sin \omega_j Fo + A_{2j} \cos \omega_j Fo) 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_p^*(r, \mu_m) \Phi(r_j, \mu_m)}{N(\mu_m)} \frac{\mu_m^2}{\mu_m^4 + \omega_j^2} + \omega_j (A_{2j} \sin \omega_j Fo - A_{1j} \cos \omega_j Fo) 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_p^*(r, \mu_m) \Phi(r_j, \mu_m)}{N(\mu_m)} \frac{1}{\mu_m^4 + \omega_j^2}; \quad (21)$$

$$\Phi_p^*(r, \mu) = \frac{r_{p-1} \Phi_p'(r_{p-1}, \mu) - r \Phi_p'(r, \mu)}{\varepsilon_p^2}.$$

Використавши подання

$$\frac{1}{\mu^4 + \omega_j^2} = \sum_{k=0}^{\eta_j - 1} (-1)^k \frac{\omega_j^{2k}}{\mu^{4(k+1)}} + \frac{\omega_j^{\eta_j}}{\mu^{4\eta_j}} \frac{(-1)^{\eta_j}}{\mu^4 + \omega_j^2},$$

де η_j – деяке ціле число, співвідношення (20) і (21) запишемо так:

$$\begin{aligned}
Q_{jp}^{st}(r, Fo) = & (A_{1j} \sin \omega_j Fo + A_{2j} \cos \omega_j Fo) \left[\sum_{k=0}^{\eta_j-1} (-1)^k \omega_j^{2k} g_{4k+2}^{(p)}(r, r_j) + \right. \\
& \left. + 2\omega_j^{2\eta_j} (-1)^{\eta_j} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_p(r, \mu_m) \Phi(r_j, \mu_m)}{N(\mu_m) \mu_m^{4\eta_j-2} (\mu_m^4 + \omega_j^2)} \right] + \\
& + \omega_j (A_{2j} \sin \omega_j Fo - A_{1j} \cos \omega_j Fo) \left[\sum_{k=0}^{\eta_j-1} (-1)^k \omega_j^{2k} g_{4k+4}^{(p)}(r, r_j) + \right. \\
& \left. + 2\omega_j^{2\eta_j} (-1)^{\eta_j} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_p(r, \mu_m) \Phi(r_j, \mu_m)}{N(\mu_m) \mu_m^{4\eta_j} (\mu_m^4 + \omega_j^2)} \right]; \quad (22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{jp}^{*st}(r, Fo) = & (A_{1j} \sin \omega_j Fo + A_{2j} \cos \omega_j Fo) \left[\sum_{k=0}^{\eta_j-1} (-1)^k \omega_j^{2k} g_{4k+2}^{*(p)}(r, r_j) + \right. \\
& \left. + 2\omega_j^{2\eta_j} (-1)^{\eta_j} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_p^*(r, \mu_m) \Phi(r_j, \mu_m)}{N(\mu_m) \mu_m^{4\eta_j-2} (\mu_m^4 + \omega_j^2)} \right] + \\
& + \omega_j (A_{2j} \sin \omega_j Fo - A_{1j} \cos \omega_j Fo) \left[\sum_{k=0}^{\eta_j-1} (-1)^k \omega_j^{2k} g_{4k+4}^{*(p)}(r, r_j) + \right. \\
& \left. + 2\omega_j^{2\eta_j} (-1)^{\eta_j} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_p^*(r, \mu_m) \Phi(r_j, \mu_m)}{N(\mu_m) \mu_m^{4\eta_j} (\mu_m^4 + \omega_j^2)} \right]. \quad (23)
\end{aligned}$$

Тут, на відміну від співвідношень (20) і (21), для обчислення суми рядів достатньо обмежитися (через наявність множників μ_m у відповідних степенях у знаменниках) кількома першими коренями рівняння (7). Якщо перший корінь $\mu_1 > 1$, то вплив рядів на розподіли (22) і (23) можна знехтувати. В цьому випадку характер цих розподілів по координаті описуватимуть функції $g_{4k+2}(r, r_j)$ і $g_{4k+4}(r, r_j)$, $k = 0, 1, \dots, \eta_j - 1$.

Для усталеного теплового режиму ($Fo \rightarrow \infty$) із (18) і (19) знайдемо:

$$Q_{jp}(r, Fo) = Q_{jp}^{st}(r, Fo), \quad Q_{jp}^*(r, Fo) = Q_{jp}^{*st}(r, Fo),$$

де $Q_{jp}^{st}(r, Fo)$ і $Q_{jp}^{*st}(r, Fo)$ мають вигляд (22) і (23).

Зауважимо, що задачі теплопровідності для двошарового циліндра за періодичного усталеного теплового режиму розглядали раніше [2, 7]. Їх розв'язок виражено через функції Кельвіна $ber_\nu(z)$, $bei_\nu(z)$, $ker_\nu(z)$, $kei_\nu(z)$, $\nu = 0, 1$.

2. Розглянемо функції $Q_j(Fo)$, для яких справджуються подання

$$\begin{aligned}
Q_{jp}(r, Fo) = & \sum_{k=0}^{\eta_j-1} (-1)^k g_{k+1}^{(p)}(r, r_j) \frac{d^k Q_j(Fo)}{dFo^k} - \sum_{k=0}^{\eta_j-1} (-1)^k \frac{d^k Q_j(0)}{dFo^k} H_{k+1}^{(p)}(r, r_j, Fo) + \\
& + (-1)^{\eta_j} 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_p(r, \mu_m) \Phi(r_j, \mu_m)}{\mu_m^{2\eta_j} N(\mu_m)} \int_0^{Fo} \frac{d^{\eta_j} Q_j(\xi)}{d\xi^{\eta_j}} e^{-\mu_m^2(Fo-\xi)} d\xi; \quad (24)
\end{aligned}$$

$$Q_{jp}^*(r, Fo) = \sum_{k=0}^{\eta_j-1} (-1)^k g_{k+1}^{*(p)}(r, r_j) \frac{d^k Q_j(Fo)}{dFo^k} - \sum_{k=0}^{\eta_j-1} (-1)^k \frac{d^k Q_j(0)}{dFo^k} H_{k+1}^{*(p)}(r, r_j, Fo) +$$

$$+ (-1)^{\eta_j} 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_p^*(r, \mu_m) \Phi(r_j, \mu_m)}{\mu_m^{2\eta_j} N(\mu_m)} \int_0^{Fo} \frac{d^{\eta_j} Q_j(\xi)}{d\xi^{\eta_j}} e^{-\mu_m^2(Fo-\xi)} d\xi. \quad (25)$$

Тут і далі

$$H_{k+1}^{(p)}(r, \rho, Fo) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_p(r, \mu_m) \Phi(\rho, \mu_m)}{\mu_m^{2(k+1)} N(\mu_m)} e^{-\mu_m^2 Fo},$$

$$H_{k+1}^{*(p)}(r, \rho, Fo) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_p^*(r, \mu_m) \Phi(\rho, \mu_m)}{\mu_m^{2(k+1)} N(\mu_m)} e^{-\mu_m^2 Fo},$$

$$\Phi_p^*(r, \mu) = \frac{r_{p-1} \Phi_p'(r_{p-1}, \mu) - r \Phi_p'(r, \mu)}{\varepsilon_p^2};$$

η_j – кількість інтегрувань за частинами у залежності (9).

Якщо $Q_j(Fo)$ є поліноміальними функціями степеня η_j , то, вибравши час Fo , починаючи з якого можна у виразах (24) і (25) знехтувати ряди $H_{k+1}^{(p)}(r, r_j, Fo)$ і $H_{k+1}^{*(p)}(r, r_j, Fo)$ ($k=0, 1, \dots, \eta_j$), отримаємо співвідношення для $Q_{jp}(r, Fo)$ і $Q_{jp}^*(r, Fo)$, які відповідатимуть асимптотичному тепловому режиму:

$$Q_{jp}(r, Fo) = \sum_{k=0}^{\eta_j} (-1)^k g_{k+1}^{(p)}(r, r_j) \frac{d^k Q_j(Fo)}{dFo^k},$$

$$Q_{jp}^*(r, Fo) = \sum_{k=0}^{\eta_j} (-1)^k g_{k+1}^{*(p)}(r, r_j) \frac{d^k Q_j(Fo)}{dFo^k}.$$

Іншим способом температурні поля і напруження в одно-і двошарових тілах за асимптотичного теплового режиму, коли температуру довіклля описують поліноміальні функції, визначено в працях [2, 5, 6]. Задачі про розподіл температури зведено до розв'язання рекурентної системи рівнянь стаціонарної теплопровідності, порядок якої і, відповідно, порядок системи алгебричних рівнянь для знаходження сталих інтегрування залежать від степеня полінома і кількості шарів.

3. За імпульсної теплової дії

$$Q_j(Fo) = \sum_{i=0}^{m^*-1} [S(Fo - \bar{b}_i) - S(Fo - \bar{b}_i - Fo_a)],$$

де m^* – кількість імпульсів, $\bar{b}_i = (i-1)(Fo_a + Fo_b)$, $Fo_a = \frac{\lambda_t^* \tau_a}{c_V^* \ell^2}$, $Fo_b = \frac{\lambda_t^* \tau_b}{c_V^* \ell^2}$,

τ_a, τ_b – тривалість, відповідно, імпульсу і паузи, матимемо:

$$Q_{jp}(r, Fo) = g_1^{(p)}(r, r_j) Q_j(Fo) -$$

$$- \sum_{i=0}^{m^*-1} [H_1^{(p)}(r, r_j, Fo - \bar{b}_i) S(Fo - \bar{b}_i) - H_1^{(p)}(r, r_j, Fo - \bar{b}_i - Fo_a) S(Fo - \bar{b}_i - Fo_a)];$$

$$Q_{jp}^*(r, Fo) = g_1^{*(p)}(r, r_j) Q_j(Fo) -$$

$$- \sum_{i=0}^{m^*-1} \left[H_1^{*(p)}(r, r_j, Fo - \bar{b}_i) S(Fo - \bar{b}_i) - H_1^{*(p)}(r, r_j, Fo - \bar{b}_i - Fo_a) S(Fo - \bar{b}_i - Fo_a) \right].$$

4. Нехай функції $Q_j(Fo)$ апроксимовані лінійними сплайнами:

$$Q_j(Fo) \approx s_{j,1}^{(1)} Fo + s_{j,1}^{(0)} + \sum_{q=1}^{K-1} (s_{j,q+1}^{(1)} Fo + s_{j,q+1}^{(0)} - s_{j,q}^{(1)} Fo - s_{j,q}^{(0)}) S(Fo - Fo_q), \quad (26)$$

де

$$s_{j,q}^{(1)} = \frac{Q_j(Fo_q) - Q_j(Fo_{q-1})}{\Delta Fo_q}, \quad s_{j,q}^{(0)} = \frac{Q_j(Fo_{q-1}) Fo_q - Q_j(Fo_q) Fo_{q-1}}{\Delta Fo_q},$$

$$Fo_0 = 0, \quad \Delta Fo_q = Fo_q - Fo_{q-1}, \quad q = 1, 2, \dots, K.$$

Якщо $\eta_j = 2$, з формул (24) і (25) одержимо:

$$\begin{aligned} Q_{jp}(r, Fo) = & Q_j(Fo) g_1^{(p)}(r, r_j) - \\ & - s_{j,1}^{(0)} H_1^{(p)}(r, r_j, Fo) - \left[s_{j,1}^{(1)} + \sum_{k=1}^{K-1} (s_{j,k+1}^{(1)} - s_{j,k}^{(1)}) S(Fo - Fo_k) \right] g_2^{(p)}(r, r_j) + \\ & + s_{j,1}^{(1)} H_2^{(p)}(r, r_j, Fo) + \sum_{k=1}^{K-1} (s_{j,k+1}^{(1)} - s_{j,k}^{(1)}) H_2^{(p)}(r, r_j, Fo - Fo_k) S(Fo - Fo_k); \quad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{jp}^*(r, Fo) = & Q_j(Fo) g_1^{*(p)}(r, r_j) - \\ & - s_{j,1}^{(0)} H_1^{*(p)}(r, r_j, Fo) - \left[s_{j,1}^{(1)} + \sum_{k=1}^{K-1} (s_{j,k+1}^{(1)} - s_{j,k}^{(1)}) S(Fo - Fo_k) \right] g_2^{*(p)}(r, r_j) + \\ & + s_{j,1}^{(1)} H_2^{*(p)}(r, r_j, Fo) + \sum_{k=1}^{K-1} (s_{j,k+1}^{(1)} - s_{j,k}^{(1)}) H_2^{*(p)}(r, r_j, Fo - Fo_k) S(Fo - Fo_k). \quad (28) \end{aligned}$$

Співвідношеннями (27) і (28) можна скористатися тоді, коли функції $Q_j(Fo)$ задані таблично або складними формулами, а також для розв'язання, зокрема, обернених задач.

5. Для закону $Q_j(Fo) = \ln(B_j Fo + 1)$, згідно з яким змінюється, зокрема, температура довкілля під час пожежі [3], у формулі (24), якщо $\eta_j = 2$, апроксимуємо другу похідну лінійними з рівномірно розташованими вузлами сплайнами (26), в яких

$$s_{j,q}^{(1)} = \frac{Q_j''(Fo_q) - Q_j''(Fo_{q-1})}{\Delta Fo}, \quad s_{j,q}^{(0)} = \frac{Q_j''(Fo_{q-1}) Fo_q - Q_j''(Fo_q) Fo_{q-1}}{\Delta Fo}.$$

Після відповідних перетворень матимемо:

$$\begin{aligned} Q_{jp}(r, Fo) = & Q_j(Fo) g_1^{(p)}(r, r_j) - B_j \left[\varphi_j(Fo) g_2^{(p)}(r, r_j) - \right. \\ & \left. - H_2^{(p)}(r, r_j, Fo) \right] - B_j^2 \left[g_3^{(p)}(r, r_j) \varphi_j^2(Fo) - H_3^{(p)}(r, r_j, Fo) \right] - \\ & - \left[s_{j,1}^{(1)} + \sum_{k=1}^{K-1} (s_{j,k+1}^{(1)} - s_{j,k}^{(1)}) S(Fo - Fo_k) \right] g_4^{(p)}(r, r_j) + s_{j,1}^{(1)} H_4^{(p)}(r, r_j, Fo) - \\ & - 2B_j^4 \Delta Fo \sum_{k=1}^{K-1} d_k H_4^{(p)}(r, r_j, Fo - Fo_k) S(Fo - Fo_k); \quad (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{jp}^*(r, F_0) = & Q_j(F_0)g_1^{*(p)}(r, r_j) - B_j \left[\varphi_j(F_0)g_2^{*(p)}(r, r_j) - \right. \\
 & \left. - H_2^{*(p)}(r, r_j, F_0) \right] - B_j^2 \left[g_3^{*(p)}(r, r_j)\varphi_j^2(F_0) - H_3^{*(p)}(r, r_j, F_0) \right] - \\
 & - \left[s_{j,1}^{(1)} + \sum_{k=1}^{K-1} (s_{j,k+1}^{(1)} - s_{j,k}^{(1)})S(F_0 - F_{0_k}) \right] g_4^{*(p)}(r, r_j) + s_{j,1}^{(1)}H_4^{*(p)}(r, r_j, F_0) - \\
 & - 2B_j^4 \Delta F_0 \sum_{k=1}^{K-1} d_k H_4^{*(p)}(r, r_j, F_0 - F_{0_k})S(F_0 - F_{0_k}), \quad (30)
 \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
 d_k = & \varphi_j(F_{0_{k-1}})\varphi_j(F_{0_k})\varphi_j(F_{0_{k+1}}) \left[\varphi_j(F_{0_{k-1}}) + \varphi_j(F_{0_k}) + \varphi_j(F_{0_{k+1}}) \right], \\
 s_{j,k}^{(1)} = & B_j^3 \varphi_j(F_{0_{k-1}})\varphi_j(F_{0_k}) \left[\varphi_j(F_{0_{k-1}}) + \varphi_j(F_{0_k}) \right], \quad \varphi_j(F_0) = \frac{1}{B_j F_0 + 1}.
 \end{aligned}$$

За великих часів співвідношення (29) і (30) спрощуються і набувають вигляду

$$\begin{aligned}
 Q_{jp}(r, F_0) = & Q_j(F_0)g_1^{(p)}(r, r_j) - B_j \varphi_j(F_0)g_2^{(p)}(r, r_j) - \\
 & - B_j^2 g_3^{(p)}(r, r_j)\varphi_j^2(F_0) - \left[s_{j,1}^{(1)} + \sum_{k=1}^{K-1} (s_{j,k+1}^{(1)} - s_{j,k}^{(1)})S(F_0 - F_{0_k}) \right] g_4^{(p)}(r, r_j), \\
 Q_{jp}^*(r, F_0) = & Q_j(F_0)g_1^{*(p)}(r, r_j) - B_j \varphi_j(F_0)g_2^{*(p)}(r, r_j) - \\
 & - B_j^2 g_3^{*(p)}(r, r_j)\varphi_j^2(F_0) - \left[s_{j,1}^{(1)} + \sum_{k=1}^{K-1} (s_{j,k+1}^{(1)} - s_{j,k}^{(1)})S(F_0 - F_{0_k}) \right] g_4^{*(p)}(r, r_j).
 \end{aligned}$$

Зазначимо, що, комбінуючи вище наведеними виразами для $Q_{jp}(r, F_0)$ і $Q_{jp}^*(r, F_0)$ ($j = 0, n$), можна отримати розв'язки ще низки задач термопружності.

Проілюструємо застосування подань (13)–(16) до розв'язання обернених задач. Нехай необхідно знайти функції $Q_0(F_0)$ або $Q_n(F_0)$ за припущення, що відомий на відповідних протилежних обмежувальних поверхнях один з розподілів: переміщення, радіальної деформації чи колового напруження.

У цьому випадку для функцій $Q_j(F_0)$ ($j = 0, n$) використаємо апроксимації (26). Для знаходження значень $Q_j(F_{0_q})$ у залежностях (27) і (28) покладемо $F_0 = F_{0_q}$ і запишемо їх у вигляді

$$\begin{aligned}
 Q_{jp}(r, F_{0_q}) = & Q_j(F_{0_q})P_{jp}(r) + \Psi_{j\rho q}(r), \\
 Q_{jp}^*(r, F_{0_q}) = & Q_j(F_{0_q})P_{jp}^*(r) + \Psi_{j\rho q}^*(r), \quad q = 1, 2, \dots, K, \quad (31)
 \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
 P_{jp}(r) = & g_{1p}(r, r_j) + d_{jp}(r); \\
 \Psi_{j\rho 1}(r) = & -Q_j(0)[H_{1p}(r, r_j, F_{0_1}) + d_{jp}(r)]; \\
 \Psi_{j\rho q}(r) = & -Q_j(0)H_{1p}(r, r_j, F_{0_q}) - Q_j(F_{0_{q-1}})d_{jp}(r) + s_{j,1}^{(1)}H_{2p}(r, r_j, F_{0_q}) - \\
 & - s_{j,q-1}^{(1)}H_{2p}(r, r_j, F_{0_1}) + \sum_{k=1}^{q-2} (s_{j,k+1}^{(1)} - s_{j,k}^{(1)})H_{2p}(r, r_j, F_{0_q} - F_{0_k}),
 \end{aligned}$$

$q = 2, 3, \dots, K$;

$$d_{jp}(r) = \frac{H_{2p}(r, r_j, F_{0_1}) - g_{2p}(r, r_j)}{F_{0_1}} ;$$

$$P_{jp}^*(r) = \int_{r_{p-1}}^r \eta P_{jp}(\eta) d\eta = g_{1p}^*(r, r_j) + d_{jp}^*(r) ;$$

$$\Psi_{j\rho 1}^*(r) = \int_{r_{p-1}}^r \eta \Psi_{j\rho 1}(\eta_j) d\eta = -Q_j(0)[H_{1p}^*(r, r_j, F_{0_1}) + d_{jp}^*(r)] ;$$

$$\begin{aligned} \Psi_{j\rho q}^*(r) &= \int_{r_{p-1}}^r \eta \Psi_{j\rho q}(\eta_j) d\eta = \\ &= -Q_j(0)H_{1p}^*(r, r_j, F_{0_q}) - Q_j(F_{0_{q-1}})d_{jp}^*(r) + s_{j,1}^{(1)}H_{2p}^*(r, r_j, F_{0_q}) - \\ &- s_{j,q-1}^{(1)}H_{2p}^*(r, r_j, F_{0_1}) + \sum_{k=1}^{q-2} (s_{j,k+1}^{(1)} - s_{j,k}^{(1)})H_{2p}^*(r, r_j, F_{0_q} - F_{0_k}) , \quad q = 2, 3, \dots, K ; \end{aligned}$$

$$d_{jp}^*(r) = \frac{H_{2p}^*(r, r_j, F_{0_1}) - g_{2p}^*(r, r_j)}{F_{0_1}} ;$$

$$g_{2p}^*(r, r_j) = \frac{1}{D} Z_1^{(n)}(r_j) [X_{np}^*(r) - X_{n,p-1}^*(r_{p-1})] - g_{12}^{*(p)}(r, r_j) ,$$

$$\begin{aligned} g_{12}^{*(p)}(r, r_0) &= \left(Y_{12}^{(p-1)}(r_{p-1}) - \frac{1}{\lambda_t^{(p)}} Y_{11}^{*(p-1)}(r_{p-1}) \right) \frac{r^2 - r_{p-1}^2}{2D} + \\ &+ \frac{\bar{Y}_{12}^{*(p-1)}(r) - \bar{Y}_{12}^{*(p-1)}(r_{p-1})}{D} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{12}^{*(p)}(r, r_n) &= \left(X_{12}^{(p-1)}(r_{p-1}) - \frac{1}{\lambda_t^{(p)}} X_{11}^{*(p-1)}(r_{p-1}) \right) \frac{r^2 - r_{p-1}^2}{2D} + \\ &+ \frac{\bar{X}_{12}^{*(p-1)}(r) - \bar{X}_{12}^{*(p-1)}(r_{p-1})}{D} ; \end{aligned}$$

Решта позначень наведена в додатку.
З урахуванням співвідношень (31) та

$$\bar{R}_{1p}^j(F_{0_q}) = Q_j(F_{0_q})\bar{R}_{1p}^{jP} + \bar{R}_{1p}^{j\Psi} , \quad \bar{R}_{2p}^j(F_{0_q}) = Q_j(F_{0_q})R_{2p}^{jP} + R_{2p}^{j\Psi} ,$$

де

$$\bar{R}_{1p}^{jP} = \sum_{i=1}^{p-1} M_{1i}^+ \frac{\bar{c}_i \bar{k}_i^*}{\bar{c}_p} P_{ji}^*(r_i) , \quad \bar{R}_{1p}^{j\Psi} = \sum_{i=1}^{p-1} M_{1i}^+ \frac{\bar{c}_i \bar{k}_i^*}{\bar{c}_p} \Psi_{jiq}^*(r_i) ,$$

$$\bar{R}_{2p}^{jP} = \sum_{i=p}^n M_{2i}^- \frac{\bar{k}_i^*}{r_i^2} P_{ji}^*(r_i) , \quad \bar{R}_{2p}^{j\Psi} = \sum_{i=p}^n M_{2i}^- \frac{\bar{k}_i^*}{r_i^2} \Psi_{jiq}^*(r_i) ,$$

формули для $U_{kp}^j(r, F_{0_q})$ при $k = 1, 2, 3, 4, 5$ і $U_{5p}^j(F_{0_q})$ подамо так:

$$U_{kp}^j(r, F_{0_q}) = Q_j(F_{0_q})a_{kp}^j(r) + b_{kpq}^j(r) ,$$

$$U_{5p}^j(F_{0_q}) = Q_j(F_{0_q})a_{5p}^j + b_{5pq}^j , \quad j = 0, n , \quad (32)$$

де

$$\begin{aligned}
 a_{kp}^j(r) &= \frac{1}{2Q} \left[\varphi_{2k,p}(r) \bar{R}_{1p}^{jP} - \varphi_{2k-1,p}(r) \bar{R}_{2p}^{jP} \right] + \bar{k}_p^* \omega_{jkp}^P(r); \\
 b_{kpq}^j &= \frac{1}{2Q} \left[\varphi_{2k,p}(r) \bar{R}_{1p}^{j\Psi} - \varphi_{2k-1,p}(r) \bar{R}_{2p}^{j\Psi} \right] + \bar{k}_p^* \omega_{jkpq}^\Psi(r); \\
 \omega_{j1p}^P(r) &= \frac{1}{r} P_{jp}^*(r), \quad \omega_{j2p}^P(r) = P_{jp}(r) - \frac{1}{r^2} P_{jp}^*(r), \quad \omega_{j4p}^P(r) = -\omega_{j2p}^P(r); \\
 \omega_{j1pq}^\Psi(r) &= \frac{1}{r} \Psi_{j pq}^*(r), \quad \omega_{j2pq}^\Psi(r) = \Psi_{j pq}(r) - \frac{1}{r^2} \Psi_{j pq}^*(r), \quad \omega_{j4pq}^\Psi(r) = -\omega_{j2pq}^\Psi(r); \\
 a_{5p}^{*j} &= \frac{1}{2Q} \left(\beta_{2p} \bar{R}_{1p}^{jP} - \beta_{1p} \bar{R}_{2p}^{jP} \right) h_p(r_p) - \bar{k}_p^* P_{1p}^*(r_p); \\
 b_{5pq}^{*j} &= \frac{1}{2Q} \left(\beta_{2p} \bar{R}_{1pq}^{j\Psi} - \beta_{1p} \bar{R}_{2pq}^{j\Psi} \right) h_p(r_p) - \bar{k}_p^* \Psi_{j pq}^*(r_p).
 \end{aligned}$$

Далі конкретизуємо задачу. Вважатимемо, що невідомими є значення $Q_0(F_0q)$. Тоді залежно від того, що задано на поверхні $r = r_n$, їх визначитимемо із таких систем рекурентних алгебричних рівнянь, отриманих з урахуванням співвідношень (13)–(16) і (32):

$$A_1 Q_0(F_0q) = V_1(F_0q) - B_{1q}, \tag{33}$$

якщо задано значення переміщення $V_1(F_0q)$;

$$A_2 Q_0(F_0q) = V_2(F_0q) - B_{2q}, \tag{34}$$

якщо задано значення радіальної деформації $V_2(F_0q)$;

$$A_4 Q_0(F_0q) = V_4(F_0q) - B_{4q}, \tag{35}$$

якщо задано значення колового напруження $V_4(F_0q)$.

Тут

$$\begin{aligned}
 A_k &= r_0 \left[a_{kn}^0(r_n) - \frac{2}{b} U_{kn}^\varepsilon(r_n) \sum_{p=1}^n \bar{\mu}_p a_{5p}^{*0} \right]; \\
 B_{kq} &= r_0 \left[b_{knq}^0(r_n) - \frac{2}{b} U_{kn}^\varepsilon(r_n) \sum_{p=1}^n \bar{\mu}_p b_{5pq}^{*0} \right] + r_n \chi_{kn}^n(r_n, F_0q) + \\
 &\quad + \chi_{kn}^w(r_n, F_0q) + \chi_{kn}^i(r_n, F_0q) + \chi_{kn}^y(r_n, F_0q) + \chi_{kn}^\varepsilon(r_n, F_0q), \quad k = 1, 2, 4.
 \end{aligned}$$

Враховавши, що

$$Q_0(0) = - \left(\bar{\lambda}_t^{(1)} \frac{\partial \bar{t}_0}{\partial r} - \text{Vi}_0 \bar{t}_0 \right) \Big|_{r=r_0},$$

із рівнянь (33)–(35) послідовно знайдемо значення $Q_0(F_01)$, $Q_0(F_02)$, ..., $Q_0(F_0K)$ за формулою

$$Q_0(F_0q) = \frac{V_k(F_0q) - B_{kq}}{A_k}, \quad q = 1, 2, \dots, K; \quad k = 1, 2, 4. \tag{36}$$

Тепер переміщення, деформації та напруження у фіксовані моменти часу визначаємо на основі подань (13)–(16), в яких треба прийняти

$$U_{kp}^0(r, Fo_q) = Q_0(Fo_q) a_{kp}^0(r) + b_{kpq}^0(r), \quad k = 1, 2, 3, 4, 5;$$

$$U_{5p}^{*0}(Fo_q) = Q_0(Fo_q) a_{5p}^{*0} + b_{5pq}^{*0}.$$

4. **Числові результати.** Розглянемо за відсутності джерел тепла і силових навантажень пряму і три обернені задачі для дванадцятишарового циліндра ($n = 12$) з такими радіусами поверхонь поділу

$$\tilde{r}_i = \tilde{r}_0 + ih, \quad \tilde{r}_{4+i} = x_1 + ih, \quad \tilde{r}_{8+i} = x_2 + ih$$

та ФМХ шарів

$$\bar{\rho}_i = \bar{\rho}_1 \left(\frac{\tilde{r}_{i-1} + \tilde{r}_i}{2} \right), \quad \bar{\rho}_{4+i} = \bar{\rho}_2 \left(\frac{\tilde{r}_{4+i-1} + \tilde{r}_{4+i}}{2} \right), \quad \bar{\rho}_{8+i} = \bar{\rho}_3 \left(\frac{\tilde{r}_{8+i-1} + \tilde{r}_{8+i}}{2} \right).$$

Тут $i = 1, 2, 3, 4$; $\tilde{r}_0 = 0.1$ м, $x_1 = 0.104$ м, $x_2 = 0.108$ м, $x_3 = 0.112$ м;

$$\bar{\rho}_1(\tilde{r}) = \rho^{(c)} + (\rho^{(m)} - \rho^{(c)}) \left(\frac{\tilde{r} - \tilde{r}_0}{\tilde{r}_1 - \tilde{r}_0} \right)^4, \quad \bar{\rho}_2(\tilde{r}) = \rho^{(m)} + (\rho^{(c)} - \rho^{(m)}) \left(\frac{\tilde{r} - \tilde{r}_1}{\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1} \right)^4,$$

$$\bar{\rho}_3(\tilde{r}) = \rho^{(m)} + (\rho^{(c)} - \rho^{(m)}) \left(\frac{\tilde{r} - \tilde{r}_2}{\tilde{r}_3 - \tilde{r}_2} \right)^{0.2};$$

відповідні характеристики з індексами «с» і «m» збігаються зі значеннями температурозалежних коефіцієнтів теплопровідності, об'ємних теплоємностей, модулів пружності, коефіцієнтів Пуассона та коефіцієнтів лінійного розширення кераміки ZrO_2 і металу $Ti-6Al-4V$ [14], взятих при $400^\circ C$:

$$\lambda_t^{(c)} = 1.904 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ C), \quad \lambda_t^{(m)} = 12.541 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ C),$$

$$c_V^{(c)} = 2.11 \cdot 10^6 \text{ Вт} \cdot c / (\text{м}^3 \cdot ^\circ C), \quad c_V^{(m)} = 2.775 \cdot 10^6 \text{ Вт} \cdot c / (\text{м}^3 \cdot ^\circ C),$$

$$E^{(c)} = 94.68 \text{ ГПа}, \quad E^{(m)} = 85.012 \text{ ГПа}, \quad \nu^{(c)} = 0.33, \quad \nu^{(m)} = 0.31,$$

$$\alpha_t^{(c)} = 63.32 \cdot 10^{-7} \text{ } ^\circ C^{-1}, \quad \alpha_t^{(m)} = 99.53 \cdot 10^{-7} \text{ } ^\circ C^{-1}.$$

Крім того, приймали:

$$\lambda_t^* = 7.22 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ C), \quad c_V^* = 2.66 \cdot 10^6 \text{ Вт} \cdot c / (\text{м}^3 \cdot ^\circ C), \quad \alpha_t^* = 81.43 \cdot 10^{-7} \text{ } ^\circ C^{-1},$$

$$E^* = 89.845 \text{ ГПа}, \quad \tilde{q}_0 = \tilde{q}_n = 0, \quad Bi_0 = 20, \quad Bi_n = 10, \quad \ell = \tilde{r}_n, \quad t_s = \tilde{t}_\infty = 600^\circ C,$$

$$\tilde{t}_{cn} = 20^\circ C, \quad t_{cj}^*(\tau) = 1 - e^{-k_j^* \tau}, \quad j = 0, n, \quad K_0^* = 0.2 \text{ с}^{-1}, \quad k_n^* = 2 \text{ с}^{-1}.$$

В обернених задачах закон зміни температури довіклля у середині циліндра знаходили за заданими розподілами переміщення $\hat{U} = \frac{\bar{U}_n^t}{\alpha_t^* t_s}$,

альної деформації $\hat{\varepsilon} = \frac{\bar{\varepsilon}_n^t}{\alpha_t^* t_s}$ та колового напруження $\hat{\sigma} = \frac{\bar{\sigma}_{\varphi n}^t}{E^* \alpha_t^* t_s}$ на поверхні

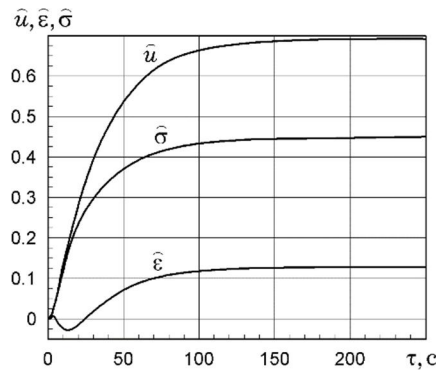
$r = r_n$ (див. рисунок). Їх отримали з розв'язку (13) прямої задачі, в якій

$$Q_{jp}(r, Fo) = \bar{t}_{cj} Bi_j \hat{Q}_{jp}(r, Fo), \quad Q_{jp}^*(r, Fo) = \bar{t}_{cj} Bi_j \hat{Q}_{jp}^*(r, Fo),$$

де

$$\hat{Q}_{jp}(r, Fo) = g_{1p}(r, r_j) - H_{1p}(r, r_j, Fo) - e^{-k_j Fo} \left[g_{1p}(r, r_j) + k_j g_{2p}(r, r_j) + k_j^2 \frac{2}{r_0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_p(r, \mu_m) \Phi_\mu(r_n, \mu_m)}{\mu_m^4 (\mu_m^2 - k_j) N(\mu_m)} \right] +$$

$$\begin{aligned}
 &+H_{1p}(r, r_j, Fo) + k_j H_{2p}(r, r_j, Fo) + k_j^2 \frac{2}{r_0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_p(r, \mu_m) \Phi_\mu(r_n, \mu_m)}{\mu_m^4 (\mu_m^2 - k_j)} N(\mu_m) e^{-\mu_m^2 Fo}, \\
 \widehat{Q}_{jp}^*(r, Fo) &= g_{1p}^*(r, r_j) - H_{1p}^*(r, r_j, Fo) - \\
 &- e^{-k_j Fo} \left[g_{1p}^*(r, r_j) + k_j g_{2p}^*(r, r_j) + k_j^2 \frac{2}{r_0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_p^*(r, \mu_m) \Phi_\mu(r_n, \mu_m)}{\mu_m^4 (\mu_m^2 - k_j)} N(\mu_m) \right] + \\
 &+ H_{1p}^*(r, r_j, Fo) + k_j H_{2p}^*(r, r_j, Fo) + k_j^2 \frac{2}{r_0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_p^*(r, \mu_m) \Phi_\mu(r_n, \mu_m)}{\mu_m^4 (\mu_m^2 - k_j)} N(\mu_m) e^{-\mu_m^2 Fo}, \\
 j = 0, n; \quad k_j &= k_j \ell^2 c_V^* / \lambda_t^*.
 \end{aligned}$$



Числові дослідження засвідчили, що відповідні безрозмірні значення температури, підраховані за формулою (36) при $k = 1, 2, 4$ з кроком сітки сплайнів $\Delta\tau = 0.125$ с та за заданим у прямій задачі законом зміни температури $t_{c0}^*(\tau)$ довкілля усередині циліндра, відрізняються, якщо $0 \leq \tau \leq 250$ с, щонайбільше на 0.0004.

Оцінювали також похибку числових результатів залежно від кроку сітки. У таблиці наведено значення температури довкілля усередині циліндра, обчислені за формулою (36) при $k = 4$ у вузлах сплайнів за різних кроків сітки. В крайньому рядку для порівняння подано відповідні значення, обчислені за формулою для $t_{c0}^*(\tau)$.

τ, c	$\Delta\tau, c$				$t_{c0}^*(\tau)$
	0.250	0.125	0.0625	0.03125	
0.03125				0.006233	0.006231
0.0625			0.012444	0.012425	0.012422
0.125		0.024785	0.024696	0.024693	0.024691
0.250	0.049153	0.048781	0.048779	0.048774	0.048771
0.5	0.095191	0.095179	0.095173	0.095166	0.095163
1.0	0.181317	0.181294	0.181280	0.181272	0.181269
2.0	0.329748	0.329708	0.329689	0.329682	0.329680
4.0	0.550740	0.550694	0.550677	0.550673	0.550671
8.0	0.798143	0.798114	0.798106	0.798104	0.798103
10.0	0.864692	0.864772	0.864666	0.864665	0.864665
12.5	0.917932	0.917919	0.917916	0.917915	0.917915

Як бачимо, найбільша похибка є на початковій стадії нагріву при $\Delta\tau = 0.250$ с. Зі згущенням сітки вона зменшується.

Висновки. Отримано замкнений аналітичний розв'язок квазістатичної задачі термопружності для довгого багат шарового порожнистого циліндра за дії поверхневих і об'ємних джерел тепла та урахування початкового розподілу температури, конвективного теплообміну, осьової деформації і силових навантажень. Зі зміною характеру поведінки теплового чинника необхідно у виокремлених залежностях для визначення переміщень, деформацій та напружень замінити лише відповідні інтеграли. Обчислено такі інтеграли для широкого спектра розподілів температури довкілля і інтенсивності теплового потоку усередині та зовні циліндра, що дає можливість записати розв'язки низки нових задач термопружності. Визначення термопружного стану за асимптотичних теплових режимів зведено до обчислення інтегралів від кусково-неперервних функцій, які є точними сумами знайдених відповідних рядів. Напружений стан, зумовлений силовими чинниками, описують їх лінійні комбінації.

Проілюстровану методику розв'язання обернених задач термопружності, ефективність якої підтверджено числовими дослідженнями, буде поширено на обернені задачі термопружності для багат шарових циліндрів з ортотропними складниками.

ДОДАТОК

Обчислення суми рядів $2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi(r, \mu_m) \Phi(\rho, \mu_m)}{N_m \mu_m^{2(k+1)}}$, $N_m = N(\mu_m)$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Нехай

$$2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi(r, \mu_m) \Phi(\rho, \mu_m)}{N_m \mu_m^{2k}} = g_k(r, \rho). \quad (Д.1)$$

Домножимо обидві частини рівності (Д.1) на $r \bar{c}_V(r)$. Після інтегрування по r від r_0 до r і низки перетворень з урахуванням співвідношень

$$r_0 \Phi(r_0, \mu) = 1 \text{ і } \mu^2 \int_{r_0}^r x c(x) \Phi(x, \mu) dx = -r \bar{\lambda}_t(r) \Phi'(r, \mu) + \text{Bi}_0$$

одержимо:

$$-2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi'(r, \mu_m) \Phi(\rho, \mu_m)}{N_m \mu_m^{2(k+1)}} + \frac{\text{Bi}_0}{r \bar{\lambda}_t(r)} 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi(\rho, \mu_m)}{N_m \mu_m^{2(k+1)}} = \frac{1}{r \bar{\lambda}_t(r)} g_{k1}(r, \rho), \quad (Д.2)$$

де

$$g_{k1}(r, \rho) = \int_{r_0}^r x \bar{c}_V(x) g_k(x, \rho) dx. \quad (Д.3)$$

Проінтегрувавши (Д.2) по r від r_0 до r , дістанемо:

$$-2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi(r, \mu_m) \Phi(\rho, \mu_m)}{N_m \mu_m^{2(k+1)}} + \left[\frac{1}{r_0} + \text{Bi}_0 [f(r) - f(r_0)] \right] 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi(\rho, \mu_m)}{N_m \mu_m^{2(k+1)}} = g_{k2}(r, \rho), \quad (Д.4)$$

де

$$f(r) = \frac{1}{\bar{\lambda}_t^{(1)}} \ln r + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\bar{\lambda}_t^{(i+1)}} - \frac{1}{\bar{\lambda}_t^{(i)}} \right) \ln \frac{r}{r_i} S(r - r_i);$$

$$g_{k2}(r, \rho) = \int_{r_0}^r \frac{1}{x \bar{\lambda}_t(x)} g_{k1}(x, \rho) dx. \quad (Д.5)$$

Додамо рівності (Д.2) і (Д.4), якщо $r = r_n$, попередньо домноживши їх, відповідно, на $\bar{\lambda}_t^{(n)}$ і Bi_n . Враховуючи рівняння (7), знаходимо:

$$2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi(\rho, \mu_m)}{N_m \mu_m^{2(k+1)}} = \frac{r_0}{D} [g_{k1}(r_n, \rho) + r_n \text{Bi}_n g_{k2}(r_n, \rho)], \quad (Д.6)$$

де

$$D = r_0 \text{Bi}_0 + r_n \text{Bi}_n X_n(r_n), \quad X_n(r) = 1 + r_0 \text{Bi}_0 [f(r) - f(r_0)].$$

Підставивши (Д.6) в (Д.4), остаточно одержимо:

$$2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi(r, \mu_m) \Phi(\rho, \mu_m)}{N_m \mu_m^{2(k+1)}} = g_{k+1}(r, \rho), \quad (Д.7)$$

де

$$g_{k+1}(r, \rho) = \frac{1}{D} [g_{k1}(r_n, \rho) + r_n \text{Bi}_n g_{k2}(r_n, \rho)] X_n(r) - g_{k2}(r, \rho). \quad (Д.8)$$

Для обчислення суми ряду (Д.1) при $k = 1$ скористаємося тим, що з початкової умови (6), виразу для функції Гріна (5) при $F_0 = 0$ та рівності (Д.1), якщо $k = 0$, випливає:

$$g_0(r, \rho) = \frac{1}{\rho \bar{c}_V(\rho)} \delta(r - \rho).$$

Тоді на основі співвідношень (Д.3) і (Д.5) матимемо:

$$g_{01}(r, \rho) = \int_{r_0}^r x \bar{c}_V(x) \frac{1}{\rho \bar{c}_V(\rho)} \delta(x - \rho) dx = S(r - \rho),$$

$$g_{02}(r, \rho) = \int_{r_0}^r \frac{1}{x \bar{\lambda}_t(x)} S(x - \rho) dx = [f(r) - f(\rho)] S(r - \rho).$$

Підставивши вирази для $g_{01}(r, \rho)$ і $g_{02}(r, \rho)$ у (Д.8), одержимо:

$$g_1(r, \rho) = \frac{1}{D} X_n(r) X_0(\rho) - [f(r) - f(\rho)] S(r - \rho), \quad (Д.9)$$

де

$$X_0(r) = 1 + r_n \text{Bi}_n [f(r_n) - f(r)].$$

Зауважимо, що функція $g_1(r, \rho)$, яку можна записати ще у вигляді

$$g_1(r, \rho) = \frac{1}{D} [X_n(\rho) X_0(r) S(r - \rho) + X_n(r) X_0(\rho) S(\rho - r)], \quad (Д.10)$$

задовольняє рівняння

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[r \bar{\lambda}_t(r) \frac{\partial G}{\partial r} \right] = -\delta(r - \rho)$$

і граничні умови

$$\left(\bar{\lambda}_t^{(1)} \frac{\partial G}{\partial r} - \text{Bi}_0 G \right) \Big|_{r=r_0} = 0, \quad \left(\bar{\lambda}_t^{(n)} \frac{\partial G}{\partial r} + \text{Bi}_n G \right) \Big|_{r=r_n} = 0.$$

Тобто $g_1(r, \rho)$ є функцією Гріна стаціонарної задачі теплопровідності для багат шарового циліндра, через обмежувальні поверхні якого відбувається конвективний теплообмін.

При $\rho = r_j$ ($j = 0, n$) зі співвідношень (Д.8) і (Д.10), якщо $r_{p-1} < r < r_p$ ($p = 1, 2, \dots, n$), враховуючи, що

$$S(r-a) = \begin{cases} 1, & r \rightarrow a+0 \\ 0, & r \rightarrow a-0 \end{cases} \text{ та } S(a-r) = \begin{cases} 0, & r \rightarrow a+0 \\ 1, & r \rightarrow a-0 \end{cases}$$

отримуємо:

$$g_{k+1}^{(p)}(r, r_j) = \frac{1}{D} Z_k^{(n)}(r_j) X_n^{(p)}(r) - g_{k2}^{(p)}(r, r_j), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (\text{Д.11})$$

де

$$\begin{aligned} Z_k^{(n)}(r_j) &= g_{k1}^{(n)}(r_n, r_j) + r_n \text{Bi}_n g_{k2}^{(n)}(r_n, r_j); \\ g_{k1}^{(p)}(r, r_j) &= g_{k1}^{(p-1)}(r_{p-1}, r_j) + \bar{g}_{k1}^{(p)}(r, r_j), \quad g_{k1}^{(0)}(r_0, r_j) = 0; \\ g_{k2}^{(p)}(r, r_j) &= g_{k2}^{(p-1)}(r_{p-1}, r_j) + \bar{g}_{k2}^{(p)}(r, r_j), \quad g_{k2}^{(0)}(r_0, r_j) = 0; \\ \bar{g}_{k1}^{(p)}(r, r_j) &= \bar{c}_V^{(p)} \int_{r_{p-1}}^r x g_k^{(p)}(x, r_j) dx, \quad \bar{g}_{k2}^{(p)}(r, r_j) = \frac{1}{\lambda_t^{(p)}} \int_{r_{p-1}}^r \frac{1}{x} g_{k1}^{(p)}(x, r_j) dx; \\ g_1^{(p)}(r, r_0) &= \frac{X_0^{(p)}(r)}{D}, \quad g_1^{(p)}(r, r_n) = \frac{X_n^{(p)}(r)}{D}; \\ X_0^{(p)}(r) &= 1 + r_n \text{Bi}_n [f_n(r_n) - f_p(r)], \quad X_n^{(p)}(r) = 1 + r_0 \text{Bi}_0 [f_p(r) - f_1(r_0)], \\ f_p(r) &= \frac{1}{\lambda_t^{(p)}} \ln r - \Lambda_p; \quad \Lambda_1 = 0, \quad \Lambda_p = \Lambda_{p-1} + \left(\frac{1}{\lambda_t^{(p)}} - \frac{1}{\lambda_t^{(p-1)}} \right) \ln r_{p-1}, \quad p = 2, 3, \dots, n. \end{aligned}$$

Наведемо в замкненій формі співвідношення для $g_{k1}^{(p)}(r, r_j)$ і $g_{k2}^{(p)}(r, r_j)$, $k = 1, 2$, які необхідні для визначення функцій $g_2^{(p)}(r, r_j)$ і $g_3^{(p)}(r, r_j)$, $j = 0, n$ за формулами (Д.11):

$$\begin{aligned} g_{11}^{(p)}(r, r_0) &= \frac{1}{D} Y_{11}^{(p)}(r), \quad Y_{11}^{(p)}(r) = Y_{11}^{(p-1)}(r_{p-1}) + \bar{Y}_p(r), \quad Y_{11}^{(0)}(r_0) = 0; \\ \bar{Y}_p(r) &= \bar{c}_V^{(p)} [X_{0p}^*(r) - X_{0p}^*(r_{p-1})], \quad X_{0p}^*(r) = \frac{1}{2} r^2 \left(\gamma_{np} - \frac{r_n \text{Bi}_n}{\lambda_t^{(p)}} \ln r \right); \\ g_{12}^{(p)}(r, r_0) &= \frac{1}{D} Y_{12}^{(p)}(r), \quad Y_{12}^{(p)}(r) = Y_{12}^{(p-1)}(r_{p-1}) + \bar{Y}_{12}^{(p)}(r), \quad Y_{12}^{(0)}(r_0) = 0; \\ \bar{Y}_{12}^{(p)}(r) &= \frac{1}{\lambda_t^{(p)}} [Y_{11}^{(p)}(r) - Y_{11}^{(p)}(r_{p-1})]; \\ Y_{11}^{(p)}(r) &= [Y_{11}^{(p-1)}(r_{p-1}) - \bar{c}_V^{(p)} X_{0p}^*(r_{p-1})] \ln r + \frac{\bar{c}_V^{(p)}}{4} r^2 \left[\gamma_{np} + \frac{r_n \text{Bi}_n}{\lambda_t^{(p)}} (0.5 - \ln r) \right]; \\ g_{11}^{(p)}(r, r_n) &= \frac{1}{D} X_{11}^{(p)}(r), \\ X_{11}^{(p)}(r) &= X_{11}^{(p-1)}(r_{p-1}) + \bar{X}_p(r), \quad X_{11}^{(0)}(r_0) = 0; \quad \bar{X}_p(r) = \bar{c}_V^{(p)} [X_{np}^*(r) - X_{np}^*(r_{p-1})], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X_{np}^*(r) &= \frac{1}{2} r^2 \left(\gamma_{0p} + \frac{r_0 \text{Bi}_0}{\lambda_t^{(p)}} \ln r \right); \\
 g_{12}^{(p)}(r, r_n) &= \frac{1}{D} X_{12}^{(p)}(r), \\
 X_{12}^{(p)}(r) &= X_{12}^{(p-1)}(r_{p-1}) + \bar{X}_{12}^{(p)}(r), \quad X_{12}^{(0)}(r_0) = 0; \\
 \bar{X}_{12}^{(p)}(r) &= \frac{1}{\lambda_t^{(p)}} \left[X_{11}^*(r) - X_{11}^*(r_{p-1}) \right], \\
 X_{11}^*(r) &= \left[X_{11}^{(p-1)}(r_{p-1}) - \bar{c}_V^{(p)} X_{np}^*(r_{p-1}) \right] \ln r + \\
 &\quad + \frac{\bar{c}_V^{(p)}}{4} r^2 \left[\gamma_{0p} - \frac{r_0 \text{Bi}_0}{\lambda_t^{(p)}} (0.5 - \ln r) \right]; \\
 \gamma_{np} &= 1 + r_n \text{Bi}_n \left(\frac{1}{2\lambda_t^{(p)}} + \Lambda_p + f_n(r_n) \right), \quad \gamma_{0p} = 1 - r_0 \text{Bi}_0 \left(\frac{1}{2\lambda_t^{(p)}} + \Lambda_p + f_1(r_0) \right); \\
 g_{21}^{(p)}(r, r_0) &= \frac{1}{D} \left[Z_1^{(n)}(r_0) X_{11}^{(p)}(r) - Y_{21}^{(p)}(r) \right], \\
 Y_{21}^{(p)}(r) &= Y_{21}^{(p-1)}(r_{p-1}) + \bar{Y}_{21}^{(p)}(r), \quad Y_{21}^{(0)}(r_0) = 0; \\
 \bar{Y}_{21}^{(p)}(r) &= \bar{c}_V^{(p)} \left[Y_{12}^*(r) - Y_{12}^*(r_{p-1}) \right], \\
 Y_{12}^*(r) &= \frac{r^2}{2} \left[Y_{12}^{(p-1)}(r_{p-1}) - \frac{1}{\lambda_t^{(p)}} Y_{11}^*(r_{p-1}) \right] + \bar{Y}_{12}^{(p)}(r), \\
 \bar{Y}_{12}^{(p)}(r) &= \frac{1}{2\lambda_t^{(p)}} \left[Y_{11}^{(p-1)}(r_{p-1}) - \bar{c}_V^{(p)} X_{0p}^*(r_{p-1}) \right] r^2 \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) + \\
 &\quad + \frac{\bar{c}_V^{(p)}}{16\lambda_t^{(p)}} r^4 \left[\gamma_{np} + \frac{r_n \text{Bi}_n}{\lambda_t^{(p)}} \left(\frac{3}{4} - \ln r \right) \right]; \\
 g_{22}^{(p)}(r, r_0) &= \frac{1}{D} \left[Z_1^{(n)}(r_0) X_{12}^{(p)}(r) - Y_{22}^{(p)}(r) \right], \\
 Y_{22}^{(p)}(r) &= Y_{22}^{(p-1)}(r_{p-1}) + \bar{Y}_{22}^{(p)}(r), \quad Y_{22}^{(0)}(r_0) = 0; \\
 \bar{Y}_{22}^{(p)}(r) &= \frac{1}{\lambda_t^{(p)}} \left[Y_{21}^*(r) - Y_{21}^*(r_{p-1}) \right], \\
 Y_{21}^*(r) &= \left[Y_{21}^{(p-1)}(r_{p-1}) - \bar{c}_V^{(p)} Y_{12}^*(r_{p-1}) \right] \ln r + \\
 &\quad + \frac{\bar{c}_V^{(p)}}{4} r^2 \left\{ Y_{12}^{(p-1)}(r_{p-1}) - \frac{1}{\lambda_t^{(p)}} Y_{11}^*(r_{p-1}) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\lambda_t^{(p)}} \left[Y_{11}^{(p-1)}(r_{p-1}) - \bar{c}_V^{(p)} X_{0p}^*(r_{p-1}) \right] (\ln r - 1) \right\} + \\
 &\quad + \frac{\bar{c}_V^{(p)2}}{64\lambda_t^{(p)}} r^4 \left[\gamma_{np} + \frac{r_n \text{Bi}_n}{\lambda_t^{(p)}} (1 - \ln r) \right]; \\
 g_{21}^{(p)}(r, r_n) &= \frac{1}{D} \left[Z_1^{(n)}(r_n) X_{11}^{(p)}(r) - X_{21}^{(p)}(r) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_{21}^{(p)}(r) &= X_{21}^{(p-1)}(r_{p-1}) + \bar{X}_{21}^{(p)}(r), \quad X_{21}^{(0)}(r_0) = 0; \\
\bar{X}_{21}^{(p)}(r) &= \bar{c}_V^{(p)} \left[X_{12}^{*(p)}(r) - X_{12}^{*(p)}(r_{p-1}) \right], \\
X_{12}^{*(p)}(r) &= \frac{r^2}{2} \left[X_{12}^{(p-1)}(r_{p-1}) - \frac{1}{\bar{\lambda}_t^{(p)}} X_{11}^{*(p)}(r_{p-1}) \right] + \bar{X}_{12}^{*(p)}(r), \\
\bar{X}_{12}^{*(p)}(r) &= \frac{1}{2\bar{\lambda}_t^{(p)}} \left[X_{11}^{(p-1)}(r_{p-1}) - \bar{c}_V^{(p)} X_{np}^*(r_{p-1}) \right] r^2 \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) + \\
&\quad + \frac{\bar{c}_V^{(p)}}{16\bar{\lambda}_t^{(p)}} r^4 \left[\gamma_{0p} - \frac{r_0 \text{Bi}_0}{\bar{\lambda}_t^{(p)}} \left(\frac{3}{4} - \ln r \right) \right]; \\
g_{22}^{(p)}(r, r_n) &= \frac{1}{D} \left[Z_1^{(n)}(r_n) X_{12}^{(p)}(r) - X_{22}^{(p)}(r) \right], \\
X_{22}^{(p)}(r) &= X_{22}^{(p-1)}(r_{p-1}) + \bar{X}_{22}^{(p)}(r), \quad X_{22}^{(0)}(r_0) = 0; \\
\bar{X}_{22}^{(p)}(r) &= \frac{1}{\bar{\lambda}_t^{(p)}} \left[X_{21}^{*(p)}(r) - X_{21}^{*(p)}(r_{p-1}) \right], \\
X_{21}^{*(p)}(r) &= \left[X_{21}^{(p-1)}(r_{p-1}) - \bar{c}_V^{(p)} X_{12}^{*(p)}(r_{p-1}) \right] \ln r + \\
&\quad + \frac{\bar{c}_V^{(p)}}{4} r^2 \left\{ X_{12}^{(p-1)}(r_{p-1}) - \frac{1}{\bar{\lambda}_t^{(p)}} X_{11}^{*(p)}(r_{p-1}) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\bar{\lambda}_t^{(p)}} \left[X_{11}^{(p-1)}(r_{p-1}) - \bar{c}_V^{(p)} X_{np}^*(r_{p-1}) \right] (\ln r - 1) \right\} + \\
&\quad + \frac{\bar{c}_V^{(p)2}}{64\bar{\lambda}_t^{(p)}} r^4 \left[\gamma_{0p} - \frac{r_0 \text{Bi}_0}{\bar{\lambda}_t^{(p)}} (1 - \ln r) \right].
\end{aligned}$$

Зауважимо, що в праці [10] обчислено суми рядів (Д.7) за фіксованих значень ρ . Для цього отримали відповідні аналоги формули (Д.8).

1. Вигак В. М. Управление температурными напряжениями и перемещениями. – Київ: Наук. думка, 1988. – 312 с.
2. Гриліцький Д. В. Термопружні контактні задачі в трибології: Навч. пос. – Київ: Ін-т змісту і методів навчання МОУ, 1996. – 204 с.
3. *Захист від пожежі. Будівельні конструкції. Метод випробування на вогнестійкість. Загальні вимоги.* ДСТУ Б.В.1.1-4-98 – Київ: Держбуд України, 1999. – 22 с.
4. *Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл/ Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: в 5-ти т. – Т. 5: Оптимізація і індентифікація в термомеханіці неоднорідних тіл.* Кушнір Р. М., Попович В. С., Ясінський А. В. – Львів: Сполом, 2011. – 256 с.
5. *Підстригач Я. С. Вибрані праці.* – Київ: Наук. думка, 1995. – 460 с.
6. *Пляцко Г. В. Нестационарные задачи теплопроводности и термоупругости с приложением к расчету элементов теплосиловых установок.* – Київ: Изд-во АН УССР, 1969. – 106 с.
7. *Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры.* – Москва: Наука, 1984. – 368 с.
8. *Процюк Б. В. Термопружний стан кусково-неоднорідного ортотропного термочутливого циліндра // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2019. – 62, № 3. – С. 57–73.*
 The same: *Protsiuk B. V. Thermoelastic state of a piecewise inhomogeneous orthotropic thermosensitive cylinder // J. Math. Sci. – 2022. – 263, No. 1. – P. 62–83. – <https://doi.org/10.1007/s10958-022-05907-8>.*
9. *Процюк Б. В. Квазістатичний термопружний стан шаруватого функціонально градієнтного циліндра за урахування теплового випромінювання// Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2022. – 65, № 1-2. – С. 146–157.*

10. Процюк Б. В., Сянюта В. М. Температурне поле багатощарового циліндра при асимптотичному тепловому режимі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – 40, № 4 – С. 162–169.
11. Сергиєнко І. В., Дейнека В. С. Ідентифікація градієнтними методами теплового і термонапруженого состояний двухслойного циліндра по известным перемещениям // Доп. НАН України. – 2009. – № 7. – С. 42–48.
12. Blanc G., Raynaud M. Solution of the inverse heat conduction problem from thermal strain measurements // J. Heat Transfer. – 1996. – 118, No. 4. – P. 842–849. – <https://doi.org/10.1115/1.2822579>.
13. Segall A. E., Engels D., Drapace C. Inverse determination of thermal boundary conduction from transient surface temperature and strains in stabs and tubes // Mater. Manuf Proc. – 2012. – 27, No. 8. – P. 860–868. – <https://doi.org/10.1080/10426914.2012.663130>.
14. Tanigawa Y., Akai T., Kawamura R., Oka N. Transient heat conduction and thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature-dependent material properties // J. Therm. Stresses. – 1996. – 19, No. 1. – P. 77–102. – <https://doi.org/10.1080/01495739608946161>.
15. Yasinsky A, Tokova L. Inverse problem on the identification of temperature and thermal stresses in an FGM hollow cylinder by the surface displacements // J. Therm. Stresses. – 2017. – 40, No. 12. – P. 1771–1483. – <https://doi.org/10.1080/01495739.2017.1357455>.

ON THE REPRESENTATION OF A SOLUTION TO THE QUASISTATIC PROBLEM OF THERMAL ELASTICITY FOR A MULTILAYER CYLINDER

The solution of the quasi-static problem of thermoelasticity for a long multi-layered hollow cylinder is constructed in the form of a superposition of dependencies, each of which describes a stressed state caused by a corresponding thermal or force factor. Its application to the determination of the thermoelastic state for various laws of environmental temperature change and heat fluxes and asymptotic regimes, as well as to the solution of inverse problems of thermoelasticity, is illustrated. At the same time, the found exact sums of the series of the eigenfunctions of the thermal conductivity problem for the considered cylinder were used. Three distributions of the ambient temperature inside a twelve-layered hollow cylinder were analyzed, which were determined by the specified distributions of displacement, radial deformation, and ring stress on the limiting outer surface, respectively.

Keywords: multilayer cylinder, non-stationary temperature field, asymptotic thermal regime, series of eigenfunctions, thermoelasticity, inverse problems generalized functions, Green's functions, linear splines.