https://doi.org/10.15407/apmm2023.21.72-76

УДК 539.3

М. В. Марчук[1, 2], М. М. Хом'як[1, 3], В. С. Пакош ✉ [1, 2]

ВПЛИВ НЕІДЕАЛЬНОГО КОНТАКТУ ПОВЕРХНІ РОЗДІЛУ НА ДЕФОРМАТИВНІСТЬ ДВОШАРОВОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ЗА ДІЇ ВНУТРІШНЬОГО ТИСКУ

Наведено співвідношення варіанта уточненої теорії тонких циліндричних оболонок за вісесиметричного деформування. На їх основі запропоновано математичну модель механічної поведінки двошарової циліндричної оболонки за неідеального контакту на поверхні розділу складників за дії внутрішнього тиску. Отримано систему розв'язувальних рівнянь для узагальнених переміщень точок серединних поверхонь і контактних напружень на поверхнях розділу за ідеального та неідеального контакту (проковзування). Побудовано аналітичні розв'язки для обох випадків контакту складників. Оцінено вплив неідеального контакту на деформативність розглянутої оболонки.

***Ключові слова**: двошарова циліндрична оболонка, уточнена теорія, деформативність, внутрішній тиск, неідеальний міжшаровий контакт*

Вступ. Циліндричні оболонки із круговою та некруговою геометрією поперечного перерізу часто застосовують у різноманітних галузях машинобудування, авіакосмічній техніці та трубопровідних магістралях [2, 3, 5, 15–17]. У багатьох випадках для їх експлуатації необхідна шарувата за товщиною структура. Як правило, тоді кожен складник має своє специфічне функціональне призначення, а отже, і фізико-механічні властивості. Тому під час міцнісних розрахунків таких конструкцій слід дискретно розглядати кожен складник та окремо моделювати його напружено-деформований стан. Аналітичні методи дослідження шаруватих циліндричних оболонок, зокрема композитних, розглянуті та розвинені в працях [10, 11], а числовий підхід на основі методу скінченних елементів – у публікаціях [6, 7].

Тримкий ресурс шаруватих композитних структур суттєво залежить від стану контактної взаємодії на поверхні розділу складників [8], характер якої визначають як повнота дотримання вимог технологічних процесів виготовлення [1, 8, 14], так і тривала дія інтенсивних експлуатаційних силових і температурних навантажень [4, 12, 13]. Тому актуально отримати в межах теорій оболонок, що враховують основну властивість деформування тонкостінних композитних елементів – податливість до трансверсального зсуву, прості інженерні формули про вплив неідеального контакту на розрахункові параметри для прийняття рішень на стадії проєктування відповідальних конструкцій.

1. **Формулювання задачі та її розв'язання**. Розглянемо двошарову циліндричну оболонку, нормальний до її осі переріз якої зображений на рисунку.

Напружено-деформований стан i-го складника описуємо варіантом уточненої теорії, що дасть можливість врахувати граничні умови на лицевих поверхнях [10]:

а) рівняння рівноваги

$$N'_{(i)1} + 2\sigma^{-}_{(i)1} = 0;$$

$$N_{(i)2} / R_i - Q'_{(i)} + 2\sigma^{-}_{(i)3} = 0;$$

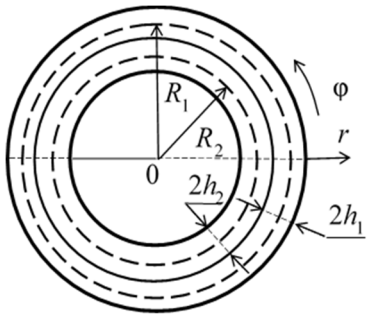
✉ v.pakosh@ukr.net

$$M'_{(i)} - Q_{(i)} + 2h_i\sigma^+_{(i)1} = 0\,, \tag{1}$$

де $N_{(i)1}, N_{(i)2}$ – осьове та кільцеве розтягальні (стискальні) зусилля; $M_{(i)}$ – осьовий згинальний момент; $Q_{(i)}$ – перерізувальне зусилля,

$$\sigma^{\pm}_{(i)1} = \frac{1}{2}(\sigma^+_{(i)13} \pm \sigma^-_{(i)13})\,, \quad \sigma^-_{(i)3} = \frac{1}{2}(\sigma^+_{(i)33} - \sigma^-_{(i)33})\,, \tag{2}$$

$\sigma^{\pm}_{(i)13} = \sigma_{(i)13}(\pm h_i)\,, \quad \sigma^{\pm}_{(i)33} = \sigma_{(i)33}(\pm h_i)$ – напруження на лицевих поверхнях i-го складника, $i = 1, 2$;



б) співвідношення пружності

$$N_{(i)1} = B_i(u'_i + \nu_i w_i \,/\, R_i)\,,$$

$$N_{(i)2} = B_i(w_i \,/\, R_i + \nu_i u'_i)\,,$$

$$M_{(i)} = D_i\gamma'_i\,, \quad Q_{(i)} = \Lambda_i(\gamma_i + w'_i)\,, \quad i = 1, 2\,, \tag{3}$$

де u_i – тангенціальне переміщення точок серединної поверхні $r = R_i$ i-го складника вздовж осі Ox; w_i – переміщення тих самих точок уздовж осі Or (прогини серединних поверхонь); γ_i – кути повороту нормальних перед деформуванням до серединних поверхонь елементів у напрямку осі Ox; $B_i = 2E_ih_i \,/\, (1 - \nu_i^2)$, $D_i = Bh_i^2 \,/\, 3$, $\Lambda_i = 2k'h_iG'_i$, E_i, ν_i, G'_i – модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона та трансверсальний модуль зсуву i-го складника оболонкової структури; $k' = 5 \,/\, 6$ – коефіцієнт зсуву [9–11].

Під час навантаження оболонки внутрішнім тиском P для напружень на лицевих поверхнях її складників маємо:

$$\sigma^+_{(1)13} = 0\,; \quad \sigma^-_{(1)13} = \tau\,; \quad \sigma^+_{(1)33} = 0\,; \quad \sigma^-_{(1)33} = \sigma\,;$$

$$\sigma^+_{(2)13} = \tau\,; \quad \sigma^-_{(2)13} = 0\,; \quad \sigma^+_{(2)33} = \sigma\,; \quad \sigma^-_{(2)33} = -P\,. \tag{4}$$

Тут σ і τ – нормальне та тангенціальне напруження на поверхні розділу $r = R_1 - h_1 = R_2 + h_2$.

Підставляючи формули (4) в (2) та результат

$$\sigma^+_{(1)1} = \tau \,/\, 2\,; \quad \sigma^-_{(1)1} = -\tau \,/\, 2\,; \quad \sigma^-_{(1)3} = -\sigma \,/\, 2\,;$$

$$\sigma^+_{(2)1} = \tau \,/\, 2\,; \quad \sigma^-_{(2)1} = \tau \,/\, 2\,; \quad \sigma^-_{(2)3} = (\sigma - P) \,/\, 2$$

у вирази (1), отримаємо систему рівнянь рівноваги для обох складників:

$$N'_{(1)1} - \tau = 0\,; \quad N'_{(2)1} + \tau = 0\,; \tag{5}$$

$$N_{(1)2} / R_1 - Q'_{(1)} - \sigma = 0; \quad N_{(2)2} / R_2 - Q'_{(2)} + \sigma - P = 0, \tag{6}$$

$$M'_{(1)} - Q_{(1)} + h_1\tau = 0; \quad M'_{(2)} - Q_{(2)} + h_2\tau = 0. \tag{7}$$

Система звичайних диференціальних рівнянь (5)–(7) після підставляння в неї співвідношень пружності (3) має дванадцятий порядок відносно узагальнених переміщень u_i, γ_i, w_i ($i = 1, 2$) і містить ще дві невідомі функції σ і τ контактних міжшарових напружень, що підлягають визначенню з умов взаємодії складників оболонкової структури на поверхні розділу $r = R_1 - h_1 = R_2 + h_2$.

Розглянемо видовжену циліндричну оболонку з двох ортотропних композитних шарів із однаковими фізико-механічними характеристиками та товщинами $h_1 = h_2 = h$. Тоді для жорсткісних характеристик отримаємо:

$$B_1 = B_2 = B; \quad D_1 = D_2 = D; \quad \Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda. \tag{8}$$

Якщо $h / R << 1$ ($i = 1, 2$), можемо вважати, що

$$R_1 = R_2 = R; \quad R = (R_1 + R_2) / 2. \tag{9}$$

Враховуючи, що функції прогину w_i ($i = 1, 2$) постійні за нормальною координатою до серединних поверхонь складників, а також припускаючи відсутність відриву їх один від одного на поверхні розділу, одержимо $w_1 = w_2$.

Підставляння (8) та R з (9) у рівняння рівноваги в узагальнених переміщеннях дає результат:

$$B(u''_1 + \nu w' / R) - \tau = 0; \quad B(u''_2 + \nu w' / R) + \tau = 0;$$

$$\frac{B}{R}(w / R + \nu u'_1) - \Lambda(\gamma'_1 + w'') - \sigma = 0;$$

$$\frac{B}{R}(w / R + \nu u'_2) - \Lambda(\gamma'_2 + w'') + \sigma - P = 0;$$

$$D\gamma''_1 - \Lambda(\gamma_1 + w') + h\tau = 0; \quad D\gamma''_2 - \Lambda(\gamma_2 + w') + h\tau = 0. \tag{10}$$

Для ідеального механічного контакту на поверхні розділу складників з умови рівності тангенціальних переміщень маємо:

$$u_1 - h_1\gamma_1 = u_2 - h_2\gamma_2. \tag{11}$$

З урахуванням (11) з рівнянь (10) отримуємо вирази для контактних напружень на поверхні розділу:

$$\tau = Bh(\gamma''_1 + \gamma''_2) / 2;$$

$$\sigma = P / 2 + B(1 - \nu^2)w / 2R - \Lambda(\gamma''_1 - \gamma''_2) / 2. \tag{12}$$

Увівши позначення для функції прогину $w = w_i$ та $\gamma_i = \gamma_1 + \gamma_2$ за ідеального контакту, отримуємо таку систему розв'язувальних рівнянь:

$$\frac{B(1 - \nu^2)}{R}\frac{2w_i}{R} - \frac{\nu C_1}{R} - \Lambda(\gamma'_i + 2w''_i) - P = 0;$$

$$4\gamma''_i - \kappa^2(\gamma_i + 2w''_i) = 0, \tag{13}$$

де $\kappa^2 = \Lambda / D$; $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$; $D = D_1 + D_2$; C_1 – стала інтегрування.

Аналогічно для неідеального механічного контакту по всій поверхні розділу за відсутності зчеплення в тангенціальному напрямку (проковзування, $\tau = 0$) маємо:

$$\frac{B(1-\nu^2)}{R}\frac{2w_n}{R}-\frac{\nu C_1}{R}-\Lambda(\gamma_n'+2w_n'')-P=0;$$

$$\gamma_n''-\kappa^2(\gamma_n+2w_n'')=0. \qquad (14)$$

Системи рівнянь (13), (14), як і під час розгляду одношарової циліндричної оболонки [9], зводимо до розв'язувальних рівнянь для функцій прогину w_i та w_n:

$$w_i^{IV}-2g^2w_i''+\frac{\lambda^4}{4}w_i=P_*/2D; \qquad (15)$$

$$w_n^{IV}-2g^2w_n''+\lambda^4w_n=P_*/8D, \qquad (16)$$

де $P_*=(P+\nu C_1/R)$, а для g^2 і λ^2 маємо такі ж вирази, що й у праці [9]: $2g^2=\frac{B(1-\nu^2)}{\Lambda R^2}$; $\lambda^4=\frac{B(1-\nu^2)}{DR^2}$.

Якщо $g^2<\lambda^2/2$, розв'язки рівнянь (15) і (16) подаємо у вигляді

$$w_i=e^{-\alpha_i x}(C_{i1}\cos\beta_i x+C_{i2}\sin\beta_i x)+e^{\alpha_i x}(C_{i3}\cos\beta_i x+C_{i4}\sin\beta_i x)+w_i^*; \qquad (17)$$

$$w_n=e^{-\alpha_n x}(C_{n1}\cos\beta_n x+C_{n2}\sin\beta_n x)+e^{\alpha_n x}(C_{n3}\cos\beta_n x+C_{n4}\sin\beta_n x)+w_n^*, \qquad (18)$$

де w_i^* та w_n^* – часткові розв'язки, відповідно;

$\alpha_i=\sqrt{(g^2+\lambda^2/2)/2}$; $\beta_i=\sqrt{(\lambda^2/2-g^2)/2}$;

$\alpha_n=\sqrt{(g^2+\lambda^2)/2}$; $\beta_n=\sqrt{(\lambda^2-g^2)/2}$ – коефіцієнти розв'язків відповідних характеристичних рівнянь

$$\mu_i^4-2g^2\mu_i^2+\frac{\lambda^4}{4}=0;$$

$$\mu_n^4-2g^2\mu_n^2+\lambda^4=0.$$

2. **Аналіз результатів і висновки**. Отримані розв'язки (17) та (18) за відомих умов закріплення двошарової циліндричної оболонки дають можливість знайти всі характеристики її напружено-деформованого стану та оцінити вплив на них проковзування на поверхні розділу складників, зокрема, на деформативність. Під нею розуміють максимальний прогин оболонки, який часто використовують як розрахунковий параметр на стадії проєктування. Запишемо оцінку

$$\Delta=\frac{\max w_i^*-\max w_n^*}{\max w_n^*}, \qquad (19)$$

де $\max w_i^*$ – деформативність двошарової циліндричної оболонки за ідеального механічного контакту на поверхні розділу, а $\max w_n^*$ – за умов проковзування по всій поверхні. Для видовженої оболонки за навантаження внутрішнім тиском вплив способу закріплення віддалених торців можна знехтувати [9]. Тоді за формулою (19) отримаємо $\Delta=0{,}7$, що свідчить про значний вплив проковзування між складниками на деформативність двошарової циліндричної оболонки.

1. *Верещака С. М., Жигилий Д. А.* Напряженное состояние цилиндров слоистой структуры с межфазными дефектами // Вісник нац. техн. ун-ту «Харківський політехнічний інститут». Тематичний вип.: Динаміка і міцність машин. – 2006. – № 21. – С. 41–49.

2. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д.* Расчет некруговых цилиндрических оболочек. – Киев: Наук. думка, 1977. – 104 с.
3. *Гузь А. Н.* Методы расчета оболочек: в 5-ти т. – Київ: Наук. думка, 1980.
4. *Зайцев Борис, Протасова Тетяна, Клименко Дмитро, Сіренко Володимир.* Динамічний аналіз композитного обтічника ракети при відділенні з урахуванням розшарування структури // Авиационно-космическая техника и технология. – 2020. – С. 19–26. https://doi.org/10.32620/aktt.2020.8.03
5. *Марчук М. В., Осадчук В. А.* Уточнена схема розрахунку залишкової міцності трубопроводів після появи поверхневих дефектів // Машинознавство. – 2006. – № 6. – С. 9–11.
6. *Марчук М., Пакош В., Хом'як М.* Розрахункова схема методу скінченних елементів для дослідження напружено-деформованого стану шаруватих циліндричних оболонок // Машинознавство. – 1999. – № 3. – С. 3–9.
7. *Марчук М. В., Хом'як М. М.* Змішана схема методу скінченних елементів для розрахунку шаруватих композитних оболонок і пластин. – Львів: Нац. академія наук України. Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача, 2003. – 216 с.
8. *Механика* композитов: в 12-ти т. Т. 8: Статика элементов конструкций / Я .М. Григоренко, А. Т. Василенко, И. Г. Емельянов и др. – Киев: А.С.К., 1999. – 384 с.
9. *Пелех Б. Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – Киев: Наук. думка, 1973. – 248 с.
10. *Пелех Б. Л., Лазько В. А.* Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений. – Киев: Наук. думка, 1982. – 296 с.
11. *Пелех Б. Л., Сухорольский М. А.* Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек. – Киев: Наук. думка, 1980. – 214 с.
12. *Badu Jalumedi, Sunny Tom, Paul Nevin Alex, Mohan Keerthy P., Philip Jose and Davim J. Paulo.* Assessment of delamination in composite materials: A review // Proc. of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: J. of Eng. Manufacture. – 2016. – 230, Issue 11. – P. 1990–2003.
13. DOT/FAA/TC-18/5 Federal Aviation Administration William J. Hughes Technical Center. Aviation Research Division Atlantic City. International Airport New Jersey 08405. Delamination/Disbond Arrest Features in Aircraft Composite Structures // Final Report. – June 2018. – 130 p.
14. *Kar Kamal K.* Composite Materials: Processing, Applications, Characterizations. – Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 2017. – 686 p. https://doi.org/10.1007/978-3-662-49514-8
15. *Reddy, J. N.* Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells. 2nd Edition. – Boca Raton: CRC Press, 2006. – 568 p.
16. *Ugural Ansel C.* Plates and Shells:Theory and Analysis. 4th Edition. – Boca Raton: CRC Press, 2017. – 618 p.
17. *Ventsel Eduard, Krauthammer Theodor.* Thin Plates and Shells Theory: Analysis, and Applications. 1st Edition. – CRC Press, 2001. – 682 p.

THE INFLUENCE OF NON-IDEAL CONTACT AT THE SEPARATION SURFACE ON THE DEFORMABILITY OF A TWO-LAYER CYLINDRICAL SHELL UNDER THE ACTION OF INTERNAL PRESSURE

The relations of the variant of the refined theory of thin cylindrical shells under axisymmetric deformation are presented. Based on them, a mathematical model of the mechanical behavior of a two-layer cylindrical shell with non-ideal contact at the interface of components under the action of internal pressure is proposed. The system of solving equations for the generalized displacements of the points of the middle surfaces and the contact stresses on the interfaces under ideal and non-ideal contact (slipping) is obtained. Analytical solutions are constructed for both cases of contact of components. The influence of non-ideal contact on the deformability of the considered shell is estimated.

Keywords: two-layer cylindrical shell, refined theory, deformability, internal pressure, non-ideal interlayer contact.

[1] Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів;

[2] Нац. ун-т «Львівська політехніка», Львів;

[3] Львівський національний університет ім. Івана Франка, Львів

Одержано 27.10.23