

ХАРАКТЕРИСТИЧНЕ РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ФЛАТТЕРА ПОДАТЛИВОЇ ДО ТРАНСВЕРСАЛЬНОГО ЗСУВУ ПЛАСТИНИ-СМУГИ ТА АЛГОРИТМ ЙОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

На основі варіанта уточненої теорії пластин, що дає можливість точно врахувати граничні умови в зусиллях на лицевих поверхнях, отримано математичну модель поведінки податливої до трансверсального зсуву пластини-смуги за дії аеродинамічного потоку. Побудовано відповідне характеристичне рівняння, яке на відміну від рівнянь класичної теорії пластин, є повним поліномом четвертого порядку. Запропоновано та програмно реалізовано алгоритм відшукування його коренів. Продемонстровано використання алгоритму за конкретних значень фізико-механічних та геометричних параметрів пластини-смуги за вільного шарнірного опирання.

Ключові слова: композитна пластина-смуга, трансверсальний зсув, коливання, аеродинамічний резонанс, характеристичне рівняння, критична швидкість, флаттер

Вступ. Сучасні тенденції до зниження матеріалоемності поряд зі забезпеченням необхідної надійності відповідальних конструкцій різноманітного цільового призначення спричинили широкий попит на тонкостінні елементи з композитних матеріалів, зокрема, армованих з полімерною матрицею. Основною відмінністю таких матеріалів від традиційних однорідних ізотропних є податливість до трансверсального зсуву.

Пластинчасті елементи – одні з важливих складників навантажених конструкцій в аерокосмічній галузі [11]. Їхня механічна поведінка за дії експлуатаційних, особливо динамічних, навантажень часто відіграє вирішальну роль у збереженні цілісності та функціональної придатності таких об'єктів. Зокрема, це стосується ситуацій, коли елемент перебуває в аеродинамічному потоці газу (рис. 1).

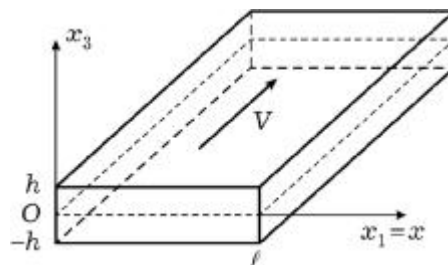


Рис. 1

За певних швидкостей потоку V та значень геометричних і фізико-механічних характеристик у пластині можуть виникнути самозбуджувальні із наростаючою амплітудою коливання, що може спричинити руйнування як пластини, так і конструкції. Таке явище називають флаттером [2, 10]. Для пластин воно достатньо досліджено під час застосування класичних теорій [1], які не враховують специфіки деформування композитів. Тому актуально отримати математичні моделі флаттера композитних пластин, за якими можна знаходити аналітичні розв'язки [4, 5]. Їх використовують для вери-

✉ v.pakosh@ukr.net

фікації числових та експериментальних методів дослідження флаттера складніших об'єктів.

1. Формулювання задачі. Розглянемо прямокутну пластину товщиною $2h$ (див. рис. 1), один із розмірів якої у серединній площині значно менший, ніж інший. Такий тонкостінний елемент прийнято називати пластиною-смугою. Для моделювання її динамічного деформування використаємо одновимірні співвідношення варіанта уточненої теорії динаміки податливих до трансверсального зсуву пластин [8], що дають можливість точно задовольнити граничні умови в напруженнях на лицевих поверхнях $x_3 = \pm h$. Вони охоплюють

а) рівняння руху

$$M' - Q = \frac{2}{3} \rho h^3 \dot{\gamma}; \quad Q' - 2\sigma_- = 2\rho h \ddot{w}; \quad (1)$$

б) співвідношення пружності

$$M = D \bar{\epsilon}_{11}^1; \quad Q = \Lambda \cdot 2\epsilon_{13}^0; \quad (2)$$

в) деформаційні співвідношення

$$\bar{\epsilon}_{11}^1 = \gamma'; \quad 2\epsilon_{13}^0 = \gamma + w', \quad (3)$$

де M і Q – загальноприйняті позначення для згинального моменту та перерізувального зусилля; $\bar{\epsilon}_{11}^1 = \epsilon_{11}^1 / h = \gamma'$ і ϵ_{13}^0 – відмінні від нуля для цього випадку компоненти тензора деформацій; w – вертикальне переміщення точок серединної площини, а отже, всієї нормалі до неї в тому ж напрямку, оскільки вона нестислива згідно з вихідними положеннями цього варіанта деформування податливих до трансверсального зсуву композитних пластин; γ – кут повороту нормалі до серединної площини в недеформованому стані; $D = 2Eh^2 / 3(1 - \nu^2)$ – згинальна жорсткість пластини, а $\Lambda = 2k'hG'$ – зсувна; E, G', ν – модулі Юнга та зсуву, а також коефіцієнт Пуассона; ρ – густина матеріалу пластини; $k' = 14 / 15$ – коефіцієнт зсуву; $\sigma_- = (\sigma_{33}^+ - \sigma_{33}^-) / 2$, а $\sigma_{33}^\pm$ визначаємо з граничних умов на лицевих поверхнях $x_3 = \pm h$ згідно зі схемою на рис. 2.

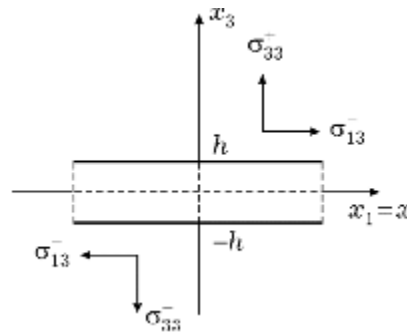


Рис. 2

За перебування пластини-смуги в аеродинамічному потоці маємо:

$$\sigma_{33}^+ = P_a; \quad \sigma_{33}^- = 0; \quad \sigma_{13}^\pm = 0,$$

а отже,

$$\sigma_- = -P_a / 2, \quad (4)$$

де P_a – зусилля, викликане аеродинамічним потоком зі швидкістю V (див. рис. 1) [1, 9, 10]. Для швидкостей, близьких до трансзвукових, його визначають за формулою

$$P_a = \frac{2q}{M_a} \left(w' + \frac{1}{V} \dot{w} \right), \quad (5)$$

де M_a – число Маха; $q = \rho_a V^2 / 2$ – аеродинамічний тиск.

Підставляючи по чергово співвідношення (3) в (2), а результат – в (1) з урахуванням (4) та покладаючи $\dot{\gamma} = 0$ згідно з [6], отримуємо рівняння руху в узагальнених переміщеннях:

$$D\gamma'' - \Lambda(\gamma' + w'') = 0; \quad \Lambda(\gamma' + w'') + P_a = 2\rho h \ddot{w}. \quad (6)$$

За шарнірного опирання на нижніх ребрах видовжених граней пластини-смуги $x = 0$ та $x = l$ граничні умови в узагальнених переміщеннях для системи диференціальних рівнянь (6) четвертого порядку за просторовою координатою записуємо у вигляді

$$\begin{aligned} w(0, t) = 0; \quad \gamma'(0, t) = 0; \\ w(l, t) = 0; \quad \gamma'(l, t) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Досліджуючи коливні процеси, початкові умови додають за необхідності визначити амплітуду. В розглядуваному випадку внаслідок взаємопов'язаності функцій w та γ у першому рівнянні системи (6) початкові умови мають вигляд

$$w(x, 0) = \bar{w}(x); \quad \dot{w}(x, 0) = \bar{w}_1(x), \quad (8)$$

де $\bar{w}$ та $\bar{w}_1$ – відомі функції.

Система рівнянь (6) з граничними (7) та початковими умовами (8) є математичною моделлю динамічного деформування податливої до трансверсального зсуву пластини-смуги за дії аеродинамічного навантаження P_a .

2. Розв'язувальне рівняння. Подвійним диференціюванням за просторовою координатою з другого рівняння системи (6) отримуємо:

$$\gamma''' + w^{IV} - \frac{1}{\Lambda} P_a'' = \frac{2\rho h}{\Lambda} \ddot{w}'''. \quad (9)$$

Аналогічно із першого рівняння

$$\gamma''' = \frac{\Lambda}{D} (\gamma' + w'').$$

Оскільки

$$\gamma' + w - \frac{1}{\Lambda} P_a = \frac{2\rho h}{\Lambda} \ddot{w},$$

то

$$\gamma''' = \frac{1}{D} (P_a + 2\rho h \ddot{w}).$$

Після підставлення цього виразу в (9) одержимо:

$$w^{IV} - \frac{2\rho h}{D} \ddot{w} - \frac{2\rho h}{\Lambda} \ddot{w}'' - \frac{M_a}{D} \left(\frac{D}{\Lambda} w''' + \frac{D}{\Lambda} \dot{w}'' - w' - \frac{1}{V} \dot{w} \right) = 0. \quad (10)$$

З формули (10) шляхом граничного переходу за параметром податливості до трансверсального зсуву E / G' отримуємо розв'язувальне рівняння флаттера для прогину w пластини-смуги за класичною теорією пластин Кірхгофа–Лява:

$$w^{IV} - \frac{2\rho h}{D} \dot{w} + \frac{M_a}{D} \left(w' + \frac{1}{V} \dot{w} \right) = 0. \quad (11)$$

Рівняння (10) проти класичного (11) містить мішані похідні $\dot{w}$, w'' та похідну третього порядку w''' , що значно ускладнює процедуру отримання його розв'язку.

3. Характеристичне рівняння. Введемо безрозмірну просторову змінну $\xi = x/l$ та заданням аналітичного розв'язку рівняння (10) у вигляді [1]

$$w = W(\xi)e^{i\Omega t}$$

зводимо його до звичайного диференціального рівняння за просторовою координатою x :

$$W^{IV} - a_3 W''' - a_2 W'' + a_1 W' + a_0 W = 0, \quad (12)$$

де

$$a_1 = \frac{\rho_a V^2 l^3}{DM_a}; \quad a_2 = \frac{l^2}{k'} c_3^{-2} \Omega^2;$$

$$a_3 = \frac{\rho_a V l}{\Lambda M_a} (V + l\Omega); \quad a_0 = -\frac{\delta^2}{h^2} c_1^{-2} \Omega^2 + \frac{\rho_a V l^4}{DM_a} \Omega.$$

Тут $c_1^2 = \frac{E}{\rho_a}$; $c_2^2 = \frac{G}{\rho_a}$.

Аналогічно, якщо $w = W_1(\xi)e^{i\Omega_1 t}$, з рівняння (11) отримуємо:

$$W_1^{IV} + b_1 W_1' + b_0 W_1 = 0, \quad (13)$$

де

$$b_1 = \rho_a \frac{V^2 l^3}{M_a D};$$

$$b_0 = \Omega \left(\rho_a \frac{V l^4}{DM_a} + \Omega \frac{2\rho h l^4}{DM_a} \right).$$

Якщо функції $W(\xi)$ та $W_1(\xi)$ задамо у вигляді

$$W(\xi) = \sum_{i=1}^4 C_i e^{\lambda_i \xi},$$

$$W_1(\xi) = \sum_{i=1}^4 C_i^1 e^{\lambda_i^1 \xi},$$

то для визначення параметрів $\lambda_i, \lambda_i^1, i = \overline{1,4}$ з виразів (12) і (13) дістанемо такі характеристичні рівняння:

$$\lambda^4 - a_3 \lambda^3 - a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0; \quad (14)$$

$$\lambda_1^4 + b_1 \lambda_1 + b_0 = 0. \quad (15)$$

4. Алгоритм розв'язання. Алгебричне рівняння (14) є повним поліномом четвертого порядку зі складною залежністю коефіцієнтів від фізико-механічних характеристик і геометричних параметрів пластини-смуги. Через це значно важче відшукати його розв'язки, оскільки невідома їх структура за загального формулювання задачі. Рівняння (15) є неповним поліномом і в цьому випадку всі його розв'язки записують за допомогою відомих формул

[3]. З їх використанням при $E = 15.0$ ГПа; $\nu = 0.05$; $\rho = 1700.0$ кг/м³; $\Omega = 13932$ рад/с; $\rho_a = 1.205$ кг/м³; $V = 345$ м/с; $M_a = 1$; $l = 0.75$ м; $h = 0.003$ м одержимо такі корені рівняння (15): $\lambda_1 = 9.6916 + 8.7784i$, $\lambda_2 = 9.6916 - 8.7784i$, $\lambda_3 = -9.6784 + 7.7988i$, $\lambda_4 = -9.6784 - 7.7988i$.

Для числового знаходження коренів рівняння (14) методом Феррарі розроблено та реалізовано програму алгоритмічною мовою Python [7].

При $E = 15.0$ ГПа; $\nu = 0.05$; $\rho = 1700.0$ кг/м³; $G' = 4.0$ ГПа; $\Omega = 13932$ рад/с; $\rho_a = 1.205$ кг/м³; $V = 345$ м/с; $M_a = 1$; $l = 0.75$ м; $h = 0.003$ м отримали такі корені рівняння (14): $\lambda_1 = 23947199$, $\lambda_2 = -23947199$, $\lambda_3 = -9.0212 + 8.5233i$, $\lambda_4 = -9.0212 - 8.5233i$.

Висновки. Одержані числові результати та процедура їх знаходження спонукають до необхідності прискіпливішого дослідження властивостей не тільки математичної моделі флаттера податливих до трансверсального зсуву пластин, але й її характеристичного рівняння та способів подання його розв'язків.

Урахування податливості до трансверсального зсуву вносить значні кількісні корективи у значення коренів характеристичного рівняння.

1. Chai Yuyang, Gao Wei, Ankey Benjamin, Li Fengming, Zhang Chuanzeng Aeroelastic Analysis and Flutter Control of Wings and Panels: A Review // Int. J. Mech. Sys. Dyn. (IJMSD). – 2021. – 1, Is. 1. – P. 5–34.
– <https://doi.org/10.1002/msd2.12015>.
2. Hebert Chad, Cowan Dave, Attar Peter J., and Weiseman Carol D. Aerodynamic Flutter. – NASA Langley Research Center, 2011.
3. Korn. G., Korn T. Mathematical handbook for scientists and engineers. – New York: McGraw-Hill Book Co, 1968.
4. Marchuk M., Bodnar V., Pakosh V. Refined Mathematical Model of Flutter for Composite Plate-Strip // Mathematical Problems of Mechanics of Nonhomogeneous Structures: collection of scientific papers of the 11th Int. Sci. Conf. / R. M. Kushnir, Yu. V. Tokovyy (eds). – L'viv: Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine, 2024. – P. 177–178.
– http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0515.pdf
5. Marchuk M., Bodnar V., Pakosh V. The Behavior of a Plate Strip Compliant to Transversal Shear in Transonic and Hypersonic Flows // Book of Abstracts of the 31st Conf. "Vibrations in Physical and Technical Systems" (VIBSYS 2024), October 16–18, 2024, Poznan, Poland). – 2024. – P. 65.
6. Marchuk M. V., Pakosh V. S., Kharchenko V. M. Natural frequencies of layered composite plates-strips with components compliant to transverse shear and compression // J. Math. Sci. – 2014. – 203, No. 2. – P. 185–192.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-014-2099-1>
7. Andreas C. Müller and Sarah Guido Introduction to Machine Learning with Python. – O'Reilly Media, 2017. – 376 p.
8. Osadchuk V. A., Marchuk M. V. Mathematical Model of Dynamic Deformation of Shear and Compressive Composite Plates // Prykl. Probl. Mech. Math. – 2005. – Is. 3. – P. 43–50 (in Ukrainian).
9. Pilipchuk V. Analytical criterion of a multimodal snap-through flutter of thin-walled panels with initial imperfections // Nonlinear Dynamics. – 2020. – 102, No. 3. – P. 1181–1195. – <https://doi.org/10.1007/s11071-020-06032-4>
10. Theodorsen Theodore, Garrick I. E. Mechanism of Flutter: A Theoretical and Experimental Investigation of the Flutter Problem. – NACA Technical Report No. 685. – 1940. – 47 p.
11. Ventsel Eduard, Krauthammer Theodor. Thin Plates and Shells Theory: Analysis, and Applications. 1st Edition. – New York: CRC Press, 2001. – 682 p.
<https://doi.org/10.1201/9780203908723>

CHARACTERISTIC EQUATION OF THE MATHEMATICAL MODEL OF THE FLUTTER OF A PLATE-STRIP PLIABLE TO TRANSVERSAL SHEAR AND ITS SOLUTION ALGORITHM

Based on a variant of the refined plate theory, which allows for accurate consideration of boundary conditions in the forces on the face surfaces, a mathematical model of the behavior of a plate-strip subject to transverse shear under the action of an aerodynamic flow was obtained. The corresponding characteristic equation was constructed, which, unlike the case of using the classical plate theory, is a complete fourth-order polynomial. An algorithm for finding its roots was proposed and implemented in software. The use of the algorithm for specific values of the physical, mechanical and geometric parameters of the plate-strip under free hinged support was demonstrated.

Keywords: composite plate-strip, transverse shear, oscillations, aerodynamic resonance, characteristic equation, critical speed, flutter.

¹Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів;

²Нац. ун-т «Львівська політехніка».

Одержано

25.10.24