

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ МІНІМАЛЬНОЇ СІТКИ СПОЛУЧЕННЯ П'ЯТЬОХ ОБ'ЄКТІВ, ДОВІЛЬНО РОЗМІЩЕНИХ НА ПЛОЩИНІ

Розглянуто оптимальні прикладні задачі, пов'язані з побудовою мінімальної сітки сполучення п'яти об'єктів, довільно розміщених на площині. Розроблено та обґрунтовано алгоритми побудови найкоротших ліній їхнього сполучення. Побудовано математичні моделі у вигляді формул та геометричних фігур. Запропоновано оптимальні способи сполучення таких об'єктів.

Ключові слова: точка Торрічеллі, мінімальна сітка, геометричні перетворення, алгоритми, сумарні відрізки, математична модель.

Вступ. Суспільство постійно намагається знайти щось найкраще та оптимальне. Такі проблеми розв'язують математичними методами, а також і задачі на побудову мінімальних сіток сполучення об'єктів, розміщених на площині.

Пошуком побудови та геометричного розташування мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах многокутника, люدتво цікавилось давно. В 19 ст. німецький математик Якоб Штейнер (1796–1863) досліджував побудову мінімальної сітки сполучення трьох об'єктів з четвертим. Він встановив, що таким четвертим пунктом є точка Торрічеллі (сума відстаней якої до вершин трикутника мінімальна). Пізніше ці дослідження продовжували німецький математик Курант Ріхард (1888–1972) та американський математик Герберт Роббінс (1915–2001). Вони обґрунтували побудову мінімальної сітки сполучення трьох точок із четвертою, розміщених у вершинах довільного трикутника [3, с. 354–361]. Побудова мінімальної сітки сполучення чотирьох точок, розміщених у вершинах квадрата, міститься серед задач польського математика Гуго Штейнгауза (1887–1972) [4, с. 35, 146–149].

На сьогодні розроблені схеми побудови мінімальних сіток сполучення чотирьох точок (об'єктів), довільно розміщених на площині. Обґрунтовано [2, с. 91–107] побудову мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених не тільки у вершинах квадрата і прямокутника, а й у вершинах довільного чотирикутника. Дослідженнями встановлено геометричне місце розташування мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах довільного чотирикутника. Математичні моделі в поданій статті мають вигляд математичних формул та геометричних фігур. Розглянуто методи та алгоритми побудови мінімальних сіток сполучення об'єктів, розміщених у вершинах довільного чотирикутника.

Побудова мінімальної сітки сполучення п'яти точок (об'єктів), розміщених на площині, не висвітлена. Хіба що серед задач на максимум і мінімум [3, с. 358] міститься лише ескіз-схема сполучення п'яти точок на площині без будь-яких пояснень. Навіть знаходимо такий факт, що в п'ятикутнику неможливо побудувати мінімальну сітку сполучення п'яти об'єктів, розміщених у вершинах опуклого п'ятикутника [1, с. 8]. Тому доцільно розглянути конкретні схеми та математичні моделі (у вигляді математичних формул та геометричних фігур) побудови мінімальної сітки сполучення п'яти об'єктів, довільно розміщених на площині.

Вміння будувати мінімальні сітки сполучення дасть можливість одержувати мінімальні лінії сполучення на практиці. Під поняттям *точки* розуміємо будь-який об'єкт, предмет; під поняттям *відрізок* чи *ламана* – електричні

✉ voznyak.o.g@gmail.com

лінії, шосейні дороги, водопроводи, каналізації, з'єднання елементів монтажу різних конструкцій тощо.

Мета дослідження – за допомогою властивостей мінімальної сітки сполучення та деяких теорем розробити способи та алгоритми побудови мінімальної сітки сполучення п'яти об'єктів, довільно розміщених на площині.

1. Основні поняття та позначення. Нехай маємо n точок $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, довільно розміщених на площині, які необхідно з'єднати відрізками, або ламаною так, щоб: а) *будь-які дві точки зі заданих були з'єднані відрізком або ламаною (вершини ламаної можуть бути і не заданими точками); б) сума довжин відрізків була мінімальною.*

Систему відрізків ламаної, яка задовольняє ці умови, називатимемо **мінімальною сіткою сполучення** точок (об'єктів). Точку, в якій з'єднуються три відрізки під кутами по 120° або два відрізки – під кутами, не меншими від 120° , називатимемо **вузловою точкою** мінімальної сітки. Відрізок, довжина якого дорівнює довжині мінімальної сітки, називатимемо **сумарним**.

Для побудови мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах п'ятикутника введемо такі позначення.

Нехай $A_1A_5 = a$, $A_1A_2 = b$, $A_3A_4 = c$, $A_4A_5 = d$, $A_2A_3 = p$; $\angle A_5A_1A_2 = \alpha_1$, $\angle A_1A_2A_3 = \alpha_2$, $\angle A_2A_3A_4 = \alpha_3$, $\angle A_3A_4A_5 = \alpha_4$, $\angle A_4A_5A_1 = \alpha_5$; $\angle A_1A_5A'_2 = x_1$, $\angle A_4A_5A'_4 = x_2$, $\angle A_1A'_2A_5 = x_3$, $\angle A_4A'_4A_5 = x_4$; A_1A_2 і A_3A_4 – найменші протилежні сторони п'ятикутника; $A'_2A'_5$ і $A'_2A'_4$ – сумарні відрізки мінімальної сітки сполучення; M_1 – основна вузлова точка мінімальної сітки сполучення; M_2 і M_3 – допоміжні вузлові її точки; l – довжина мінімальної сітки сполучення; M'_1, M'_2, M'_3 – вузлові точки мінімальної сітки сполучення вершин чотирикутників і трикутників; $\angle A_3A_4A_5$ – увігнутий кут; l_3 – довжина мінімальної сітки сполучення вершин трикутника; l_4 – довжина мінімальної сітки сполучення вершин чотирикутника.

П'ять об'єктів на площині можна розмістити: а) – на одній прямій; б) – у вершинах ламаної; в) – у вершинах опуклого п'ятикутника; г) – у вершинах неопуклого п'ятикутника.

У першому випадку мінімальною сіткою сполучення об'єктів буде відрізок, який з'єднує крайні об'єкти. Це стосується довільної кількості об'єктів.

У другому випадку мінімальною сіткою сполучення об'єктів, розміщених у вершинах ламаної, буде сама ламана, якщо у всіх її вершинах кути не менші від 120° . Якщо деякі з кутів ламаної менші за 120° і не мають спільних сторін, то всередині цих кутів треба побудувати точку Торрічеллі (вузлову точку мінімальної сітки). Нехай, наприклад, маємо ламану $A_1A_2A_3A_4A_5$, у вершинах A_3 і A_5 кути більші, ніж 120° , у вершинах A_1 і A_4 кут дорівнює 120° , а у вершині A_2 – менший, ніж 120° . Тоді, згідно з теоремою про точку Торрічеллі, для об'єктів A_1, A_2 і A_3 знайдемо точку Торрічеллі M (вузлову точку мінімальної сітки). Отже, мінімальна сітка сполучення об'єктів, розміщених у вершинах такої ламаної складатиметься із відрізків A_1M, MA_2, MA_3, A_3A_4 і A_4A_5 .

1.1. Побудова мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах опуклого п'ятикутника.

Перш ніж побудувати мінімальну сітку сполучення об'єктів, розміщених у вершинах опуклого п'ятикутника, треба методом спроб накреслити ескіз – схему – модель сітки сполучення, визначити із яких геометричних фігур може складатися многокутник. Треба врахувати, що кількість вузлових точок

має дорівнювати мінімальній кількості трикутників, утворених діагоналями, що виходять із однієї вершини многокутника, а кількість відрізків, з яких складається мінімальна сітка, обчислити за формулою $k = 2n - 3$, де k – кількість відрізків мінімальної сітки, а n – кількість сторін многокутника. Треба дослідити існування такої схеми і таке розбиття многокутника на окремі фігури. Встановити, чи не порушуються ознаки та властивості мінімальної сітки сполучення [2, с. 96].

1.2. Побудова мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах опуклого п'ятикутника, із вузловою точкою M_1 всередині нього.

Для побудови мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах довільного опуклого п'ятикутника $A_1A_2A_3A_4A_5$ (рис. 1), використаємо алгоритм, який складається із розгалуженої системи правил, поєднаних із методичними прийомами для побудови математичної моделі мінімальної сітки сполучення п'яти об'єктів у вигляді геометричної фігури. Правила побудови мінімальних сіток сполучення закладені в такій теоремі.

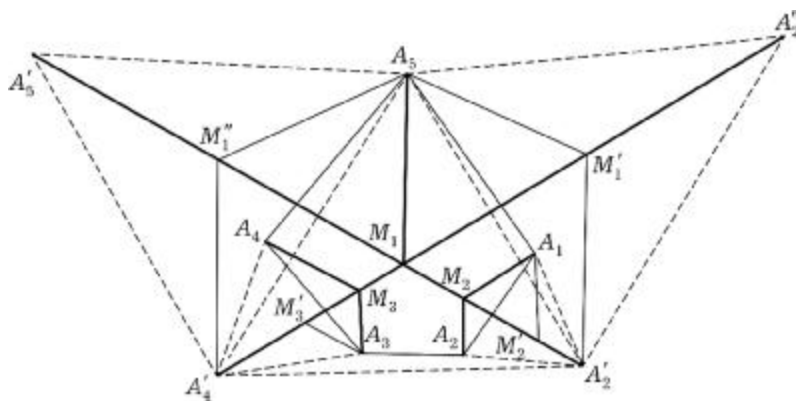


Рис. 1

Теорема 1. Якщо в опуклому п'ятикутнику $A_1A_2A_3A_4A_5$: а) на двох протилежних сторонах A_1A_2 і A_3A_4 , довжина суми яких не перевищує довжини суми будь-яких двох інших протилежних сторін п'ятикутника, побудувати зовні рівносторонні трикутники $A_1A_2A_2'$ і $A_3A_4A_4'$; б) на сторонах трикутника $A_2'A_4'A_5$ побудувати рівносторонні трикутники $A_2'A_5A_5''$ і $A_4'A_5A_5'$; в) вершини A_2'' і A_5' трикутників $A_2'A_5A_5''$ і $A_4'A_5A_5'$ з'єднати відповідно із вершинами A_4' і A_2' трикутників $A_3A_4A_4'$ і $A_1A_2A_2'$ відрізками, які перетинають сторони A_1A_2 і A_3A_4 , включаючи з їх кінцями, то:

1) мінімальна сітка сполучення вершин опуклого п'ятикутника складатиметься зі сукупності відрізків, які є сторонами кутів із вершинами у вузових точках M_1, M_2, M_3 ;

2) довжина сукупності відрізків мінімальної сітки сполучення вершин опуклого п'ятикутника дорівнюватиме довжині сумарних відрізків $A_2'A_5'$ і $A_2''A_4'$.

Для доведення теореми потрібно розглянути чотири **випадки**, коли сумарні відрізки $A_2'A_5'$ і $A_2''A_4'$ перетинають дуги в 120° , які побудовані відповідно на хордах-сторонах A_1A_2 і A_3A_4 (рис. 1) – **випадок 1**; проходять через вершини A_1 і A_4 кутів (кінців дуг) п'ятикутника (рис. 2) – **випадок 2**; прохо-

дять через вершини A_2 і A_3 кутів (кінців дуг) п'ятикутника (рис. 3) – **випадок 3**; один зі сумарних відрізків перетинає дугу в 120° , яка побудована на меншій стороні A_3A_4 (або A_1A_2) п'ятикутника, а другий – проходить через вершину A_1 (або A_4 , або A_2 , або A_3) п'ятикутника – **випадок 4**.

Доведення. Розглянемо **випадок 1**. Згідно з умовою а) теореми, дотримуючись вище сформульованих правил побудови мінімальної сітки сполучення об'єктів, із всіх можливих сторін п'ятикутника вибираємо дві менших протилежні. Нехай сума сторін A_1A_2 і A_3A_4 менша, ніж сума будь-яких двох інших протилежних сторін п'ятикутника (рис. 1). На цих сторонах будуюмо рівносторонні трикутники $A_1A_2A'_2$ і $A_3A_4A'_4$, які вважаємо вписаними у коло. Оскільки ці трикутники рівносторонні, то рівним сторонам-хордам A_1A_2 , $A_1A'_2$ і $A_2A'_2$ (A_3A_4 , $A_3A'_4$ і $A_4A'_4$), згідно з побудовою, відповідатимуть й рівні дуги, які побудовані на рівних хордах і кожна з них дорівнюватиме 120° .

Згідно з умовою б) теореми, відмічаємо трикутник $A'_2A'_4A_5$, дві вершини A'_2 і A'_4 якого є вершинами рівносторонніх трикутників, побудованих раніше, третя вершина A_5 є вершиною п'ятикутника, яка не задіяна у побудові рівносторонніх трикутників. На двох сторонах A'_2A_5 і A'_4A_5 цього трикутника будуюмо рівносторонні трикутники $A'_2A'_5A''_5$ і $A'_4A'_5A''_5$. Їх також вважаємо вписаними в коло, яке вершини трикутників ділять на три рівні дуги в 120° .

Згідно з умовою в), вершини A''_2 і A''_4 побудованих трикутників з'єднуємо із протилежними вершинами A'_4 і A'_2 трикутників, побудованих раніше.

Доведемо вимогу 1) теореми. Внаслідок перетину відрізків $A'_2A'_5$ і $A''_2A'_4$, згідно з теоремою про побудову мінімальної сітки сполучення трьох вершин трикутника $A'_2A'_4A_5$, отримаємо точку M_1 , яка є точкою перетину дуг у 120° , що побудовані на хордах-сторонах A'_2A_5 і A'_4A_5 рівносторонніх трикутників [2, с. 92]. З'єднавши точку M_1 із вершиною A_5 , дістанемо вписані у коло кути $A'_2M_1A_5$, $A'_4M_1A_5$, кожний із яких дорівнює 120° , як кути, що спираються на дугу в 240° . Звідси кут $A'_2M_1A'_4$ дорівнює 120° . Отже, точка M_1 є вузловою точкою мінімальної сітки сполучення (точка розміщена всередині п'ятикутника).

Примітка. Згідно з наслідками теореми про точку Торрічеллі, можуть виникнути такі випадки. Якщо кут $A'_2A_5A'_4$: менший від 120° , то точка M_1 розміститься всередині п'ятикутника; дорівнює 120° , то вона збігатиметься із вершиною A_5 п'ятикутника; більший від 120° , то розміститься за межами п'ятикутника [2, с. 95].

Оскільки відрізки $A'_2A'_5$ і $A''_2A'_4$, які перетинаються у вузловій точці M_1 , перетинають сторони A_1A_2 і A_3A_4 , то вони одночасно перетинатимуть дуги в 120° у вузлових точках M_2 і M_3 (рис. 1). Точки M_2 і M_3 з'єднуємо відповідно з вершинами A_1 і A_2 та A_3 і A_4 п'ятикутника. Оскільки сторони-хорди A_1A_2 , $A_1A'_2$ і $A_2A'_2$ (A_3A_4 , $A_3A'_4$ і $A_4A'_4$) рівні, згідно з побудовою рівносторонніх трикутників (раніше побудованих), то дуги, які побудовані на рівних хордах, рівні між собою (кожна з яких дорівнює 120°), а, отже, рівні вписані кути, які спираються на рівні дуги. Тому вписані кути $A_1M_2A'_2$ і $A_2M_2A'_2$ ($A_3M_3A'_4$ і $A_4M_3A'_4$) з вершинами у вузлових точках M_2 і M_3 дорівнюють по 60° , де $M_2A'_2$ і $M_3A'_4$ – бісектриси кутів $A_1M_2A_2$ і $A_3M_3A_4$.

Звідси маємо, що кути $A_1M_2A_2$ і $A_3M_3A_4$ рівні і дорівнюють по 120^0 . А оскільки відрізок A'_2M_2 (A'_4M_3) – бісектриса, то $\angle A_1M_2M_1 = \angle A_2M_2M_1 = 120^0$ ($\angle A_3M_3M_1 = \angle A_4M_3A_4 = 120^0$), як доповнювальні кути до розгорнутого кута, а точки M_2 і M_3 – вузлові точки мінімальної сітки сполучення.

Отже, всі три вузлові точки M_1 , M_2 і M_3 , що розміщені в п'ятикутнику і лежать на дугах у 120^0 , побудованих на хордах-сторонах рівносторонніх трикутників, є вузловими точками мінімальної сітки сполучення вершин опуклого п'ятикутника.

Згідно з властивостями мінімальної сітки сполучення, лінія сполучення вершин опуклого п'ятикутника, яка складається з відрізків M_2A_1 , M_2A_2 , M_3A_3 , M_3A_4 , M_1A_5 , M_1M_2 і M_1M_3 , що є сторонами кутів з вершинами у вузлових точках M_1 , M_2 і M_3 по 120^0 , є мінімальною сіткою сполучення вершин опуклого п'ятикутника (рис. 1) [2, с. 95].

Доведемо вимогу 2) теореми, що довжина як відрізка $A'_2A'_5$, так і $A'_4A'_2$ дорівнює сумі довжин відрізків, які є сторонами кутів у вузлових точках M_1 , M_2 і M_3 . З цією метою повернемо трикутник $A_1A_2M_2$ з кутом 120^0 навколо точки A_1 проти годинникової стрілки на 60^0 і отримаємо трикутник $A_1A'_2M'_2$, який рівний трикутнику $A_1A_2M_2$. Звідси $A'_2M'_2 = A_2M_2$, а $M_2M'_2 = A_1M_2$, $M_2A'_2 = A_1M_2 + A_2M_2$. Аналогічно за повороту трикутника $A_3A_4M_3$ навколо точки A_3 проти годинникової стрілки на 60^0 отримаємо: $A'_4M_3 = A_3M_3 + A_4M_3$. Оскільки у вузлових точках M_2 і M_3 всі кути мають по 120^0 , а A'_2M_2 і A'_4M_3 – бісектриси кутів $A_1M_2A_2$ і $A_3M_3A_4$, то точка M_2 належить відрізку A'_2M_1 , а точка M_3 – відрізку A'_4M_1 .

Повернемо трикутник $A_5M_1A'_2$ з кутом 120^0 навколо точки A_5 проти годинникової стрілки на 60^0 . Аналогічно отримаємо $M_1A'_2 = M_1A'_2 + M_1A_5$. Звідси

$$\begin{aligned} A'_2A'_4 &= A'_2M_1 + A'_4M_1 = A'_2M_1 + A_5M_1 + A'_4M_1 = \\ &= (A_1M_2 + A_2M_2 + M_1M_2) + A_5M_1 + (A_3M_3 + A_4M_3 + M_1M_3). \end{aligned}$$

Якщо трикутник $A_5M_1A'_4$ повернути навколо точки A_5 на 60^0 за годинниковою стрілкою, то дістанемо:

$$\begin{aligned} A'_2A'_5 &= A'_2M_1 + A'_5M_1 = (A_1M_2 + A_2M_2 + M_1M_2) + (M_1A_5 + M_1A'_4) = \\ &= (A_1M_2 + A_2M_2 + M_1M_2) + M_1A_5 + (A_3M_3 + A_4M_3 + M_1M_3). \end{aligned}$$

Оскільки відрізки $A'_2A'_4$ і $A'_2A'_5$ складаються з одних і тих самих семи відрізків мінімальної сітки сполучення, то $A'_2A'_4 = A'_2A'_5$. Далі такий відрізок, довжина якого дорівнює довжині суми відрізків мінімальної сітки сполучення, називатимемо **сумарним відрізком мінімальної сітки сполучення**. Ці відрізки з'єднують протилежні вершини A'_2 і A'_5 (або A'_4 і A'_2) рівносторонніх трикутників, побудованих на першому і на другому етапах створення мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах опуклого п'ятикутника.

Як бачимо, лінія, яка складається із відрізків, що є сторонами кутів з вершинами у вузлових точках, задовольняє всі властивості мінімальної сітки сполучення п'яти об'єктів, розміщених у вершинах опуклого п'ятикутника, а довжина відрізка $A'_2A'_5$ (або $A'_2A'_4$), яка дорівнює довжині сукупності відріз-

ків сітки сполучення п'яти об'єктів, менша, ніж довжина будь-якої ламаної, яка з'єднає кінці відрізка $A'_2A'_5$ (або $A''_2A'_4$).

Отже, довжина мінімальної сітки сполучення п'яти об'єктів

$$l = A'_2A'_5 = A_1M_2 + A_2M_2 + A_3M_3 + A_4M_3 + A_5M_1 + M_1M_2 + M_1M_3,$$

що й треба було довести у **випадку 1**.

Маючи розміри сторін опуклого п'ятикутника та його кути, можна вивести формулу довжини мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у його вершинах.

Згідно з теоремою косинусів, з трикутників $A_5A_1A'_2$, $A'_4A_4A_5$, $A'_4A_5A''_2$ маємо:

$$(A_5A'_2)^2 = (A_5A_1)^2 + (A_1A'_2)^2 - 2 \cdot A_5A_1 \cdot A_1A'_2 \cdot \cos(60^\circ + \alpha_1) = m^2;$$

$$(A'_4A_5)^2 = (A'_4A_4)^2 + (A_4A_5)^2 - 2 \cdot A'_4A_4 \cdot A_4A_5 \cdot \cos(60^\circ + \alpha_4) = n^2;$$

$$(A'_4A''_2)^2 = (A'_4A_5)^2 + (A_5A''_2)^2 - 2 \cdot A'_4A_5 \cdot A_5A''_2 \cdot \cos(60^\circ + \alpha_5 - x_1 - x_2).$$

Враховуючи те, що $A_5A''_2 = A_5A'_2$, одержуємо

$$\begin{aligned} l^2 &= (A'_4A''_2)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(60^\circ + \alpha_1) + c^2 + d^2 - 2cd \cos(60^\circ + \alpha_4) - \\ &- 2\sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \cos(60^\circ + \alpha_1))(c^2 + d^2 - 2cd \cos(60^\circ + \alpha_4))} \cos(60^\circ + \alpha_5 - x_1 - x_2); \\ l &= \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \cos(60^\circ + \alpha_5 - x_1 - x_2)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Користуючись теоремою синусів, знайдемо значення x_1 і x_2 . З трикутників $A_5A_1A'_2$, $A'_4A_5A''_2$ маємо:

$$\begin{aligned} \sin x_1 &= \frac{b \sin(60^\circ + \alpha_1)}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(60^\circ + \alpha_1)}}; \\ \sin x_2 &= \frac{c \sin(60^\circ + \alpha_4)}{\sqrt{c^2 + d^2 - 2cd \cos(60^\circ + \alpha_4)}}; \\ x_1 &= \arcsin \frac{b \sin(60^\circ + \alpha_1)}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(60^\circ + \alpha_1)}}, \\ x_2 &= \arcsin \frac{c \sin(60^\circ + \alpha_4)}{\sqrt{c^2 + d^2 - 2cd \cos(60^\circ + \alpha_4)}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Залежно від значень кутів x_1 і x_2 формулу (1) можна спростити.

Якщо $\alpha_1 = \alpha_4 = 120^\circ$, то $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. Формула (1) матиме більш спрощений вигляд

$$l = \sqrt{(a+b)^2 + (c+d)^2 - 2(a+b)(c+d) \cos(60^\circ + \alpha_5)}.$$

Якщо $\alpha_1 = \alpha_4 = 120^\circ$, $\alpha_5 = 60^\circ$, то довжина мінімальної сітки

$$l = \sqrt{(a+b)^2 + (c+d)^2 + (a+b)(c+d)}, \quad b < a, \quad c < d.$$

Якщо $\alpha_1 = \alpha_4 = \alpha_5 = 120^\circ$, то

$$l = \sqrt{(a+b)^2 + (c+d)^2 + 2(a+b)(c+d)} = a + b + c + d.$$

Якщо п'ятикутник є правильним, то

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x = \frac{180^\circ - (108^\circ + 60^\circ)}{2} = 6^\circ.$$

З трикутника $A'_4A_5A''_2$ маємо, що

$$l^2 = (A'_4A''_2)^2 = 4a^2(1 + \cos 12^\circ)(1 + \cos 24^\circ) = 16 \cos^2 6^\circ \cos^2 12^\circ.$$

Звідки

$$l = 4a \cos 6^\circ \cos 12^\circ = 2a(\cos 6^\circ + \cos 18^\circ); \quad l \approx 3,89a.$$

Зауважимо, що алгоритм побудови (рівносторонніх трикутників, сумарних відрізків та здійснення геометричних поворотів трикутників) мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах опуклого п'ятикутника, стосується усіх випадків доведення незалежно від розташування основної вузлової точки M_1 та точок M_2 і M_3 в опуклому п'ятикутнику, контуром якого є дуги в 120° , побудовані на його сторонах. Тому етапи побудови мінімальної сітки сполучення об'єктів в інших випадках доведення теореми та її наслідків окреслимо так.

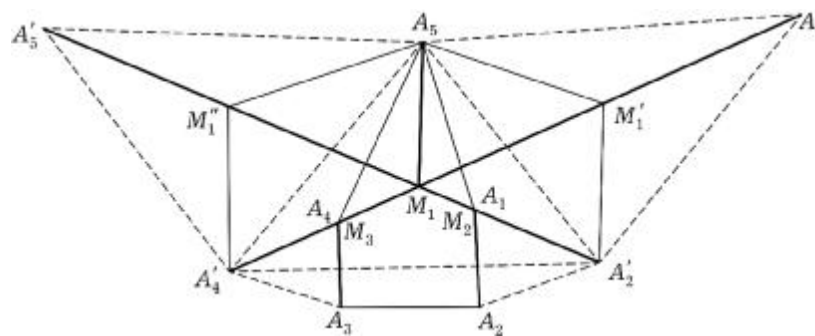


Рис. 2

Розглянемо **випадок 2**. Нехай сумарні відрізки проходять через вершини A_1 і A_4 опуклого п'ятикутника і перетинають сторони A_1A_5 і A_4A_5 (рис. 2). У перетині сумарних відрізків $A'_2A'_5$ і $A''_2A'_4$ отримаємо першу вузлову точку M_1 , яка є і точкою перетину дуг у 120° , побудованих як на сторонах A_1A_5 і A_4A_5 , так і на сторонах $A'_2A'_5$ і $A'_4A'_5$. Згідно з теоремою про мінімальну сітку сполучення вершин трикутника $A'_2A'_4A_5$ (як і у **випадку 1**), матимемо:

$$\angle A'_2M_1A'_4 = \angle A'_4M_1A_5 = \angle A'_2M_1A_5 = 120^\circ,$$

$$A'_2A'_5 = A'_2M_1 + A'_4M_1 + A_5M_1 \quad [2, \text{с. 94}].$$

Оскільки трикутники $A_1A_2A'_2$ і $A_3A_4A'_4$ рівносторонні (вписані в коло, яке вершини трикутника ділять на три рівні дуги), а вершини A_1 і A_4 належать як дугам у 120° , так і сумарним відрізкам, то $\angle A_2A_1M_1 = \angle A_3A_4M_1 = 120^\circ$, а вузлові точки M_2 і M_3 , відповідно, збігаються з вершинами A_1 і A_4 п'ятикутника і суму трьох відрізків $A'_2M_1 + A'_4M_1 + A_5M_1$ можна замінити сумою п'яти відрізків $A_1M_1 + A_4M_1 + A_5M_1 + A_1A_2 + A_3A_4$. Отже, сітка сполучення складається з відрізків, які є сторонами кутів з вершинами у вузлових точках M_1 , M_2 , M_3 , і, як у попередніх випадках, задовольняє всі властивості мінімальної сітки сполучення.

Далі доведемо, що довжина суми п'яти названих відрізків мінімальна. Для цього трикутник $A_5M_1A'_2$ повернемо на 60° навколо точки A_5 проти годинникової стрілки. Одержимо:

$$M_1A''_2 = A'_2M'_1 + M'_1M_1 = A'_2M_1 + A_5M_1,$$

$$A'_4A''_2 = A_1A_2 + A_3A_4 + A_1M_1 + A_4M_1 + A_5M_1.$$

У цьому випадку можна вважати, що мінімальна сітка сполучення об'єктів, розміщених у вершинах п'ятикутника, складається з мінімальної сітки сполучення вершин трикутника $A_1A_4A_5$ та двох сторін A_1A_2 і A_3A_4 .

Як бачимо, лінія, яка складається з відрізків, які є сторонами кутів з вершинами у вузлових точках M_1 , M_2 і M_3 , задовольняє всі властивості мінімальної сітки сполучення п'яти об'єктів, розміщених у вершинах п'ятикутника, а довжина відрізка $A'_4A''_2$ (або A'_2A_5), який дорівнює сукупності відрізків сітки сполучення, менша, ніж довжина будь-якої ламаної, що з'єднає кінці відрізка $A'_4A''_2$. Отже,

$$l = A_1A_2 + A_3A_4 + A_5M_1 + A_1M_1 + A_4M_1.$$

Таким чином, **випадок 2** доведено.

Сформулюємо властивість, яка випливає із теореми 1 у **випадку 2**.

Якщо сумарні відрізки проходять через вершини A_1 і A_4 п'ятикутника, то вузлові точки M_2 і M_3 збігаються із вершинами A_1 і A_4 п'ятикутника, а сума кутів $\alpha_2 + \alpha_3$, прилеглих до сторони A_2A_3 , дорівнює 180° .

Формулою довжини мінімальної сітки сполучення тут буде формула (1) з множником $\cos(60^\circ + \alpha_5 + \chi_1 + \chi_2)$.

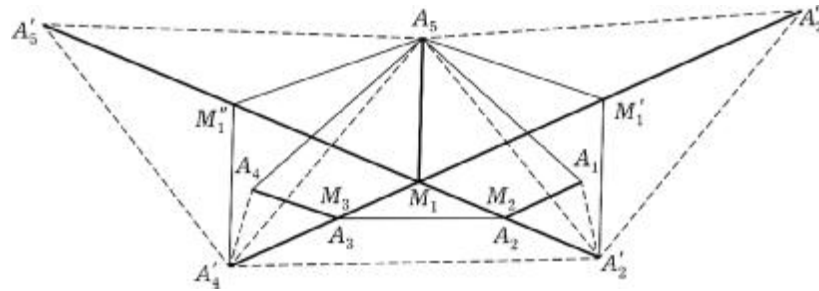


Рис. 3

Розглянемо **випадок 3**. Нехай сумарні відрізки проходять через вершини A_2 і A_3 п'ятикутника і перетинають сторони A_4A_5 і A_1A_5 (рис. 3). У перетині сумарних відрізків $A'_2A'_5$ і $A''_2A'_4$ отримаємо першу вузлову точку M_1 на дузі в 120° , яка побудована як на хорді-стороні A_2A_3 , так і на хорді-стороні $A'_2A'_4$. Згідно з ознакою про точку Торрічеллі, в трикутнику $A'_2A'_4A_5$ (як і у **випадку 1**) матимемо: $\angle A'_2M_1A_5 = \angle A_5M_1A'_4 = \angle A'_4M_1A'_2 = 120^\circ$, а сумарний відрізок $A'_2A'_5$ дорівнює сумі трьох відрізків $A'_2M_1 + A'_4M_1 + A_5M_1$. Оскільки $M_1A''_2$ – бісектриса кута $A'_2M_1A_5$, то $\angle A''_2M_1A'_2 = \angle A''_2M_1A_5 = 60^\circ$. Кут $A_1A_2A'_2$, як кут рівностороннього трикутника, дорівнює 60° . Звідси $\angle A_1A_2M_1 = 120^\circ$, а вузлова точка M_2 збігається з вершиною A_2 . Аналогічно $\angle A_4A_3M_1 = 120^\circ$, а вузлова точка M_3 збігається з вершиною A_3 п'ятикутника.

З'єднавши основну вузлову точку M_1 з вершиною A_5 п'ятикутника, отримаємо сітку сполучення п'яти об'єктів, розміщених у вершинах опуклого п'ятикутника, яка складається з відрізків A_1M_2 , M_2M_1 , M_1M_3 , M_3A_4 і M_1A_5 .

Тепер доведемо, що сума цих відрізків буде мінімальною. З цією метою відрізок A_2A_1 повернемо навколо точки A_2 на 60° за годинниковою стрілкою і отримаємо: $M_1A'_2 = A_1M_2 + M_1M_2$; відрізок A_3A_4 – навколо точки A_3 на 60° проти годинникової стрілки і одержимо: $M_1A'_4 = A_4M_3 + M_1M_3$; трикутник $A_5M_1A'_2$ – навколо точки A_5 на 60° проти годинникової стрілки і матимемо:

$$M_1A''_2 = A'_2M'_1 + M'_1M_1 = A_5M_1 + M_1M_2 + M_2A_1.$$

Звідси

$$A'_2A'_5 = A_1A_2 + A_2M_1 + M_1A_3 + A_3A_4 + M_1A_5.$$

У цьому випадку можна вважати, що мінімальна сітка сполучення об'єктів, розміщених у вершинах п'ятикутника складається з мінімальної сітки сполучення вершин трикутника $A_2A_3A_5$ та двох сторін A_1A_2 і A_3A_4 .

Оскільки відрізок $A'_2A'_5$ менший від будь-якої ламаної, яка з'єднає його кінці, то

$$l = A_1A_2 + A_2M_1 + M_1A_3 + A_3A_4 + M_1A_5.$$

Що й треба було довести у **випадку 3**.

Сформулюємо властивість, яка випливає з доведення теореми у **випадку 3**. Оскільки точки M_1 , M_2 і M_3 вузлові, то

$$\angle A_1M_2M_1 = \angle M_2M_1M_3 = \angle M_1M_3A_4 = 120^\circ.$$

Звідси

$$\angle A_1M_2M_1 + \angle M_1M_3A_4 + (\angle M_1A_2A_3 + \angle M_1A_3A_2) = 120^\circ + 120^\circ + 60^\circ = 300^\circ.$$

Якщо сумарні відрізки проходять через вершини A_2 і A_3 п'ятикутника, то вузлові точки M_2 і M_3 , відповідно, збігаються з цими вершинами, вузлова точка M_1 належить дузі в 120° , яка побудована на стороні A_2A_3 , а сума двох кутів, що прилягають до сторони A_2A_3 п'ятикутника, дорівнює 300° .

Формулою довжини мінімальної сітки сполучення для **випадку 3** буде формула (1).

Розглянемо **випадок 4**, де поєднано побудову мінімальних сіток перших трьох випадків. Нехай один зі сумарних відрізків $A'_4A''_2$ перетинає дугу в 120° , яка побудована на хорді-стороні A_3A_4 , а відрізок $A'_2A'_5$ проходить через вершину A_1 п'ятикутника. У перетині сумарних відрізків $A'_2A'_5$ і $A'_4A''_2$, отримаємо вузлову точку M_1 , яка лежить на дузі в 120° , що побудована як на хорді-стороні A_1A_5 , так і на хорді-стороні $A'_2A'_5$. У перетині сумарного відрізка $A'_4A''_2$ з дугою в 120° , яка побудована на хорді-стороні A_3A_4 , отримаємо вузлову точку M_3 . Оскільки A_1 належить сумарному відрізку $A'_2A'_5$, а трикутник $A_1A_2A'_2$ рівносторонній, то $\angle A_2A_1M_1 = 120^\circ$. А звідси матимемо вузлову точку M_2 , яка збігається з вершиною A_1 .

Згідно з теоремою про точку Торрічеллі, сумарні відрізки $A'_2A'_5$ і $A''_4A'_4$ трикутника $A'_2A'_4A_5$ рівні і

$$\begin{aligned} A_2'A_5' &= A_2''A_4' = A_2'M_1 + A_4'M_1 + A_5M_1 = \\ &= (A_1A_2 + A_1M_1) + (A_3M_3 + A_4M_3 + M_1M_3) + M_1A_5 \quad [2, \text{ с. 94}]. \end{aligned}$$

Тут можна вважати, що мінімальна сітка сполучення об'єктів, розміщених у вершинах п'ятикутника складається з мінімальної сітки сполучення вершин чотирикутника $A_1A_3A_4A_5$ і сторони A_1A_2 .

Отже, згідно з властивостями мінімальної сітки сполучення, відрізки, які є сторонами кутів з вершинами у вузлових точках, складатимуть мінімальну сітку сполучення вершин п'ятикутника.

Тепер доведемо, що сума цих відрізків буде мінімальною. З цією метою відрізок A_1A_2 повернемо навколо точки A_1 проти годинникової стрілки на 60° і отримаємо: $M_1A_2' = M_1A_1 + A_1A_2'$; трикутник $A_3M_3A_4$ – навколо точки A_3 проти годинникової стрілки на 60° , одержимо: $M_1A_4' = M_3A_3 + M_3A_4 + M_1M_3$; трикутник $A_5A_2'M_1$ – навколо точки A_5 проти годинникової стрілки на 60° , матимемо: $M_1A_2'' = M_1A_5 + M_1A_1 + A_1A_2$. А звідси

$$I = A_4'A_2'' = M_1A_4' + M_1A_2'' = (M_3A_3 + M_3A_4 + M_1M_3) + (M_1A_5 + M_1A_1 + A_1A_2).$$

Отже, побудова мінімальної сітки сполучення задовольняє всі властивості побудови мінімальної сітки, що й треба було довести.

Формулою довжини мінімальної сітки сполучення для **випадку 4** буде формула (1) з множником $\cos(60^\circ + \alpha_5 + \chi_1 - \chi_2)$.

Зупинимось на симетричному до розглянутого випадку. Нехай сумарний відрізок $A_2'A_5'$ перетинає дугу в 120° , яка побудована на стороні A_1A_2 п'ятикутника, і сторону A_4A_5 , а сумарний відрізок $A_2''A_4'$ проходить через вершину A_4 , перетинає сторону A_1A_5 п'ятикутника і збігається зі стороною A_4A_4' рівностороннього трикутника. Вузлова точка M_1 є точкою перетину дуг у 120° , побудованих на хордах-сторонах $A_2'A_5'$ і A_4A_5 . Тоді, як і у попередньому випадку, мінімальна сітка сполучення складатиметься з відрізків A_1M_2 , A_2M_2 , M_1M_2 , M_1A_5 , M_1A_4 і A_3A_4 .

Формулою довжини мінімальної сітки сполучення тут буде формула (1) з множником $\cos(60^\circ + \alpha_5 - \chi_1 + \chi_2)$.

Якщо сумарний відрізок $A_2'A_5'$ (або $A_4'A_2''$) перетинає сторону A_1A_2 (або A_3A_4) п'ятикутника, а сумарний відрізок $A_2''A_4'$ (або $A_2'A_5'$) проходить через вершину A_3 (або A_2) п'ятикутника, то мінімальна сітка складатиметься з відрізків M_1A_3 , M_1M_2 , M_1A_5 , M_2A_1 , M_2A_2 , A_3A_4 (або M_1M_3 , M_3A_3 , M_3A_4 , M_1A_5 , M_1A_2 , A_1A_2). Довжину мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах опуклого п'ятикутника, обчислюємо за формулою (1).

Отже, теорема 1 доведена.

Таким чином, якщо вузлова точка M_1 мінімальної сітки сполучення розміщена в п'ятикутнику, контуром якого є дуги в 120° , побудовані на сторонах опуклого п'ятикутника, то сумарні відрізки перетинають дуги, які побудовані на найменших протилежних сторонах A_1A_2 і A_3A_4 , у вузлових точках M_2 і M_3 . Мінімальна сітка складається з відрізків, які є сторонами кутів з вершинами у вузлових точках.

Зауваження. Доцільно застерегти, якщо рівносторонні трикутники будувати на більших протилежних сторонах опуклого п'ятикутника, то сітка сполучення об'єктів, розміщених у його вершинах не буде мінімальною, бо довжина сумарного відрізка залежить від довжини сторін рівносторонніх трикутників.

Вище оцінювали випадки, коли сумарні відрізки перетинали сторони A_1A_2 і A_3A_4 опуклого п'ятикутника. Далі розглядатимемо випадки, коли вони перетинатимуть інші сторони п'ятикутника. Вузлова точка M_1 попадає всередину кругового сегмента (з дугою в 120°), побудованого на одній зі сторін опуклого п'ятикутника. Тоді замість вузлової точки M_1 треба будувати нову вузлову точку M'_1 , яка визначатиме геометричне розміщення нових вузлових точок M'_2 і M'_3 . Ці точки спричинені перетином сумарного відрізка з дугами в 120° , побудованими на протилежних найменших сторонах опуклого чотирикутника (або навіть трикутника з кутами, не більше 120°). Їх вершини є вершинами опуклого п'ятикутника. Розглянемо такі наслідки.

Наслідок 1. Якщо один зі сумарних відрізків перетинає сторони кута $A_1A_5A_4$, а другий – тільки одну із цих сторін і сторону A_3A_4 або A_1A_2 п'ятикутника, то:

а) вузлова точка M_1 лежить всередині кругового сегмента, обмеженого дугою в 120° , яка побудована на хорді-стороні A_1A_5 (або A_4A_5);

б) мінімальна сітка сполучення вершин опуклого п'ятикутника складатиметься з мінімальної сітки сполучення вершин опуклого чотирикутника $A_1A_3A_4A_5$ та сторони A_1A_2 (або A_3A_4) п'ятикутника.

Мінімальна сітка сполучення вершин опуклого чотирикутника $A_1A_3A_4A_5$ (рис. 4) складатиметься з відрізків: $A_1M'_1$, $A_5M'_1$, $A_3M'_3$, $A_4M'_3$ і $M'_1M'_3$, де M'_1 і M'_3 – його вузлові точки [2, с. 97].

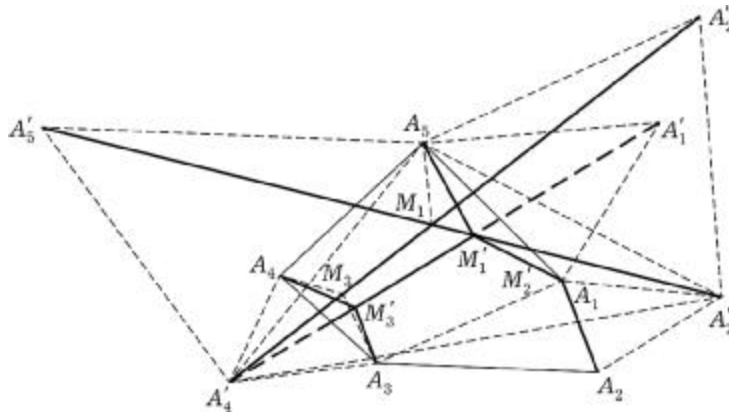


Рис. 4

З трикутників $A'_4A_4A_5$ і $A'_4A_5A'_1$ матимемо:

$$(A'_4A_5)^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos(60^\circ + \alpha_4);$$

$$(A'_4A'_1)^2 = (A'_4A_5)^2 + a^2 - 2a \cdot (A'_4A_5) \cdot \cos(60^\circ + \alpha_5 - \chi_2),$$

$$l_4^2 = (A'_4A'_1)^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos(60^\circ + \alpha_4) +$$

$$+ a^2 - 2a \sqrt{c^2 + d^2 - 2cd \cos(60^\circ + \alpha_4)} \cos(60^\circ + \alpha_5 - \chi_2),$$

де $A'_4A'_1$ – сумарний відрізок мінімальної сітки опуклого чотирикутника. Оскільки кут $A_2A_1M'_1$ не менший від 120° , то сторону A_1A_2 долучимо до мінімальної сітки сполучення вершин чотирикутника. Тоді формула довжини мінімальної сітки п'ятикутника має вигляд

$$l = b + l_4. \quad (3)$$

Кут x_2 знаходимо за формулою (2).

Наслідок 2. Якщо один зі сумарних відрізків перетинає сторони кута $A_1A_5A_4$, а другий – одну з його сторін і проходить через вершину A_4 , то:

а) вузлова точка M_1 лежить всередині кругового сегмента, обмеженого дугою в 120° , яка побудована на хорді-стороні A_1A_5 (або A_4A_5), але одночасно належить і дузі в 120° , яка побудована на хорді-стороні A_4A_5 (або A_1A_5);

б) мінімальна сітка сполучення вершин опуклого п'ятикутника складатиметься з мінімальної сітки сполучення вершин опуклого чотирикутника $A_1A_3A_4A_5$ та сторони A_1A_2 п'ятикутника.

Цей наслідок відрізняється від першого тільки тим, що сумарний відрізок A_4A_2'' не перетинає сторони A_3A_4 , а проходить через вершину A_4 п'ятикутника.

Формулою довжини мінімальної сітки сполучення буде формула (3).

Наслідок 3. Якщо обидва сумарні відрізки перетинають сторони A_1A_5 і A_4A_5 опуклого п'ятикутника, то:

а) вузлова точка M_1 лежить всередині двох кругових сегментів, обмежених дугами в 120° , які побудовані на хордах-сторонах A_1A_5 і A_4A_5 ;

б) мінімальна сітка сполучення вершин опуклого п'ятикутника складатиметься з мінімальної сітки сполучення вершин трикутника $A_1A_4A_5$ та сторін A_1A_2 і A_3A_4 п'ятикутника.

Мінімальна сітка сполучення об'єктів, розміщених у вершинах цього трикутника, складатиметься з відрізків $A_1M'_1$, $A_4M'_1$, $A_5M'_1$, де M'_1 – вузлова точка мінімальної сітки сполучення вершин трикутника $A_1A_4A_5$ [2, с. 94].

Оскільки кути $A_2A_1M'_1$ і $A_3A_4M'_1$ не менші від 120° , то сторони A_1A_2 і A_3A_4 долучимо до мінімальної сітки сполучення вершин трикутника. Отже, формулою довжини найкоротшої сітки сполучення вершин опуклого п'ятикутника буде:

$$l = b + c + l_3 = b + c + \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cos(60^\circ + \alpha_5)}.$$

Наслідок 4. Якщо обидва сумарні відрізки перетинають сторону A_2A_3 п'ятикутника і сторони кута $A_1A_5A_4$, то:

а) вузлова точка M_1 лежить всередині кругового сегмента, обмеженого дугою в 120° , яка побудована на хорді-стороні A_2A_3 ;

б) мінімальна сітка сполучення вершин опуклого п'ятикутника складається з мінімальної сітки трикутника $A_2A_3A_5$ та сторін A_1A_2 і A_3A_4 п'ятикутника.

Квадрат довжини мінімальної сітки сполучення вершин трикутника $A_2A_3A_5$ такий:

$$\begin{aligned} l_3^2 &= (A_3A'_1)^2 = (A_3A_5)^2 + (A_5A'_1)^2 - 2 \cdot A_3A_5 \cdot A_5A'_1 \cdot \cos(60^\circ + \alpha_5 - x_1 - x_2) = \\ &= c^2 + d^2 - 2cd \cos \alpha_4 + a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha_1 - \\ &- 2\sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha_1)(c^2 + d^2 - 2cd \cos \alpha_4)} \cos(60^\circ + \alpha_5 - x_1 - x_2), \end{aligned}$$

де $A_3A'_1$ – сумарний відрізок мінімальної сітки сполучення вершин трикутника. Оскільки A_1A_2 і A_3A_4 є сторонами кутів, не меншими від 120° , то довжина мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах опуклого п'ятикутника, буде:

$$l = b + c + l_3.$$

Наслідок 5. Якщо один зі сумарних відрізків перетинає найменшу сторону A_1A_2 (або A_3A_4), а другий проходить через вершину A_1 (або A_4) і перетинає сторону A_3A_4 опуклого п'ятикутника, то:

а) вузлова точка M_1 збігається з вузловою точкою M_2 , яка лежить на дузі в 120° , яка побудована на хорді-стороні A_1A_2 (або A_3A_4) п'ятикутника;

б) мінімальна сітка сполучення вершин п'ятикутника складається з мінімальної сітки трикутника $A_2A_3A_4$ та сторін кута $A_2A_1A_5$.

Оскільки кути $M_3A_2A_1$ і $A_2A_1A_5$ не менші від 120° , а формула довжини мінімальної сітки сполучення вершин трикутника $A_2A_3A_4$

$$l_3 = A'_3A_4 = \sqrt{p^2 + c^2 - 2pc \cos(60^\circ + \alpha_3)},$$

де A'_3A_4 – сумарний відрізок мінімальної сітки трикутника, то сторони A_1A_2 і A_1A_5 долучимо до мінімальної сітки сполучення вершин трикутника. Тоді формула довжини мінімальної сітки сполучення вершин опуклого п'ятикутника матиме вигляд

$$l = a + b + l_3 = a + b + \sqrt{p^2 + c^2 - 2pc \cos(60^\circ + \alpha_3)}.$$

Наслідок 6. Якщо обидва сумарні відрізки перетинають сторону A_1A_2 (або A_3A_4), то:

а) вузлова точка M_1 лежить всередині кругового сегмента, який обмежений дугою в 120° і хордою-стороною A_1A_2 (або A_3A_4);

б) мінімальна сітка сполучення вершин опуклого п'ятикутника складатиметься з чотирьох менших його сторін.

Формула довжини мінімальної сітки п'ятикутника така: $l = a + b + p + c$.

1.3. Побудова мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах опуклого п'ятикутника, в якому вузлова точка M_1 збігається з вершиною A_5 п'ятикутника.

Під час побудови мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах опуклого п'ятикутника, сумарні відрізки інколи перетинаються у вершині A_5 п'ятикутника. Таких випадків може бути п'ять: 1) кут $A_1A_5A_4$ опуклого п'ятикутника збігається з кутом, утвореним сумарними відрізками; 2) між сторонами кута $A_1A_5A_4$ опуклого п'ятикутника розміщений кут, утворений сумарними відрізками; 3) опуклий п'ятикутник розміщений між сторонами кута, утвореного сумарними відрізками; 4) кут $A_1A_5A_4$ опуклого п'ятикутника дорівнює куту між сумарними відрізками, але їхні сторони не збігаються; 5) кут $A_1A_5A_4$ опуклого п'ятикутника більший, ніж кут між сумарними відрізками, але одна із його сторін збігається зі сумарним відрізком.

Наслідок 7. Якщо сумарні відрізки мінімальної сітки сполучення збігаються зі сторонами кута $A_1A_5A_4$ п'ятикутника, то вузлові точки M_1 , M_2 і M_3 збігаються з трьома послідовно розміщеними вершинами

A_5 , A_1 і A_4 . Відрізками мінімальної сітки є сторони кутів з вершинами у вузлових точках.

У такому випадку кожен з кутів $A_2A_1A_5$, $A_1A_5A_4$, $A_3A_4A_5$ дорівнює 120° . Всі три вузлові точки M_1 , M_2 і M_3 збігаються з вершинами п'ятикутника. Оскільки трикутники $A_1A_2A'_2$, $A_3A_4A'_4$, $A'_2A_5A'_2$ і $A'_4A_5A'_5$ рівносторонні, то $A_1A_2 + A_1A_5 = A'_2A_5$, $A_3A_4 + A_4A_5 = A'_4A_5$, $A'_2A_5 = A_5A'_2$. Звідси $l = a + b + c + d$.

Наслідок 8. Якщо сумарні відрізки перетинають сторони A_1A_2 і A_3A_4 п'ятикутника, а вершина кута $A_1A_5A_4$ збігається з вузловою точкою M_1 , то вузлові точки M_2 і M_3 належать дугам у 120° , які побудовані на найменших протилежних сторонах A_1A_2 і A_3A_4 . Мінімальна сітка сполучення складатиметься з відрізків, які є сторонами кутів з вершинами у вузлових точках.

Мінімальна сітка сполучення об'єктів, розміщених у вершинах опуклого п'ятикутника, згідно з теоремою 1, складатиметься з відрізків A_1M_2 , A_2M_2 , A_3M_3 , A_4M_3 , M_1M_2 і M_1M_3 , які є сторонами кутів з вершинами у вузлових точках M_1 , M_2 і M_3 . Оскільки трикутники $A'_2A'_2M_1$ і $A'_4A'_5M_1$ рівносторонні, то довжина суми цих шести відрізків $A'_2A'_5 = A'_2A_5 + A'_4A_5$. Тоді

$$(A'_2A_5)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(60^\circ + \alpha_1);$$

$$(A'_4A_5)^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos(60^\circ + \alpha_4).$$

$$\text{Отже, } l = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(60^\circ + \alpha_1)} + \sqrt{c^2 + d^2 - 2cd \cos(60^\circ + \alpha_4)}.$$

Наслідок 9. Якщо вершина A_5 п'ятикутника збігається з вузловою точкою M_1 мінімальної сітки сполучення, а геометрична фігура п'ятикутника розміщена між сумарними відрізками з кутом 120° , то вузлові точки M_2 і M_3 відсутні. Мінімальна сітка сполучення складається з мінімальної сітки сполучення вершин трикутника $A_1A_4A_5$ та сторін A_1A_2 і A_3A_4 п'ятикутника.

У такому випадку сумарні відрізки не перетинають сторін A_1A_2 і A_3A_4 п'ятикутника. Кожний з кутів $A_2A_1A_5$, $A_3A_4A_5$ більший від 120° . Тому, згідно з властивістю мінімальної сітки, вершини A_1 і A_4 можуть бути вузловими точками M_2 і M_3 . Тоді, як у наслідку 3, $l = A_1A_2 + A_3A_4 + l_3$. Користуючись формулою довжини мінімальної сітки трикутника $A_1A_4A_5$ [2, с. 94], визначимо мінімальну сітку сполучення об'єктів, розміщених у вершинах опуклого п'ятикутника: $l = b + c + \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cos(60^\circ + \alpha_5)}$.

Наслідок 10. Якщо сумарний відрізок $A'_2A'_5$ перетинає сторону A_1A_2 , сумарний відрізок $A'_2A'_4$ розміщений поза п'ятикутником $A_1A_2A_3A_4A_5$, а вершина A_5 збігається з вузловою точкою M_1 , то мінімальна сітка сполучення об'єктів, розміщених у вершинах цього п'ятикутника, складатиметься з мінімальної сітки сполучення вершин опуклого чотирикутника $A_1A_2A_4A_5$ і сторони A_3A_4 .

Згідно з алгоритмом побудови мінімальної сітки сполучення опуклого п'ятикутника, $\angle A_5A_4A'_4 > 120^\circ$ і $\angle A_3A_4A'_4 = 60^\circ$. Тому $\angle A_3A_4A_5 > 120^\circ$.

Аналогічно, як і у наслідку 1, $l = A_3A_4 + l_4$. За формулою мінімальної сітки сполучення вершин опуклого чотирикутника $A_1A_2A_4A_5$ [2, с. 99] матимемо:

$$l_4 = \sqrt{a^2 + (a^2 + b^2 - 2ab \cos(60^\circ + \alpha_1)) - 2d\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(60^\circ + \alpha_1)} \cos(60^\circ + \alpha_5 - \chi_1)},$$

$$l = c + l_4.$$

Наслідок 11. Якщо сумарний відрізок $A_2''A_4'$ збігається зі стороною A_4A_5 п'ятикутника, а сумарний відрізок $A_2'A_5'$ перетинає сторону A_1A_2 , то мінімальна сітка сполучення вершин п'ятикутника складатиметься з відрізків, які є сторонами кутів з вершинами у вузлових точках, а їхня довжина дорівнює довжині сумарного відрізка $A_2'A_5'$ мінімальної сітки.

Виконавши всі етапи теореми про побудову мінімальної сітки сполучення вершин п'ятикутника, дістанемо рівносторонні трикутники $A_2'A_2''M_1$ і $A_4'A_5'M_1$. Звідси

$$A_4'A_2'' = A_2'A_5 + A_4'A_5 = (A_1M_2 + A_2M_2 + M_1M_2) + (M_1A_4 + A_3A_4).$$

З трикутника $A_1A_2'M_1$ матимемо: $(A_2'M_1)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(60^\circ + \alpha_1)$. Отже, формула довжини мінімальної сітки сполучення вершин п'ятикутника така:

$$l = A_4'M_1 + A_2'M_1 = (c + d) + \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(60^\circ + \alpha_1)}.$$

Таким чином, всі вузлові точки мінімальної сітки сполучення вершин опуклого п'ятикутника розміщені у п'ятикутнику, контуром якого є дуги в 120° , побудовані на сторонах опуклого п'ятикутника.

1.4. Побудова мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах опуклого п'ятикутника з основною вузловою точкою M_1 , яка знаходиться поза ним.

Наслідок 12. Якщо сумарні відрізки мінімальної сітки сполучення розміщені поза п'ятикутником, то мінімальна сітка сполучення складається: а) зі сукупності менших чотирьох сторін п'ятикутника, якщо він містить три послідовних кути, які не менші від 120° ; б) з мінімальної сітки сполучення вершин трикутника $A_1A_4A_5$ та сторін A_1A_2 і A_3A_4 , якщо кут $A_1A_5A_4$ менший від 120° .

У першому випадку, згідно з наслідком з теореми про точку Торрічеллі [2, с. 95], найкоротшою лінією, яка з'єднує об'єкти, розміщені у вершинах опуклого п'ятикутника, буде ламана $A_2A_1A_5A_4A_3$, тобто $l = a + b + c + d$. У другому – для трикутника $A_1A_4A_5$, згідно з цією теоремою [2, с. 92], знайдеться така точка M , що сума $MA_1 + MA_4 + MA_5$ буде мінімальною сіткою сполучення його вершин. Достатньо до мінімальної сітки сполучення вершин трикутника $A_1A_4A_5$ додати сторони A_1A_2 і A_3A_4 , тоді $l = b + c + l_3$.

2. Побудова мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах неопуклого п'ятикутника.

Побудова мінімальної сітки сполучення в таких п'ятикутниках пов'язана з побудовою мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах опуклого чотирикутника (або трикутника). Все залежить від розмірів сторін і увігнутого кута п'ятикутника. Тому розглянемо випадки, коли сторони увігнутого кута $A_3A_4A_5$ спираються: 1) на одну з двох менших протилежних сторін опуклого чотирикутника $A_1A_2A_3A_5$; 2) на одну з двох більших його протилежних сторін.

Теорема 2. Якщо в неопуклому п'ятикутнику $A_1A_2A_3A_4A_5$ з увігну-тим кутом $A_3A_4A_5$ на менших протилежних сторонах опуклого чотири-кутника $A_1A_2A_3A_5$ (сума яких не перевищує суму двох інших сторін) ззовні побудувати рівносторонні трикутники $A_1A_2A'_2$ і $A_3A_5A'_5$, то:

а) точки M_1 і M_2 перетину відрізків A'_5A_4 і A'_2A_4 з дугами, не мен-шими від 120° , побудованих на менших протилежних хордах-сторонах цих трикутників, будуть вузловими точками мінімальної сітки сполу-чення;

б) мінімальна сітка сполучення вершин неопуклого п'ятикутника складається з відрізків, які є сторонами кутів з вершинами у вузлових точках M_1 і M_2 .

У цьому випадку розглянемо неопуклий п'ятикутник, в якого вершина A_4 увігнутого кута розміщена: а) на відрізку M_1M_2 ; б) між дугами в 120° , побудованими на менших протилежних сторонах опуклого чотирикутника $A_1A_2A_3A_5$; в) у сегменті, який обмежений дугою в 120° , побудованою на одній з двох протилежних менших сторін опуклого чотирикутника $A_1A_2A_3A_5$; г) у вершині кута, який спирається на одну з двох протилежних більших сторін опуклого чотирикутника $A_1A_2A_3A_5$.

Доведення. Розглянемо випадок а). Згідно з теоремою про мінімальну сітку сполучення вершин опуклого чотирикутника, на протилежних сторонах чотирикутника $A_1A_2A_3A_5$ ззовні побудуємо рівносторонні трикутники $A_1A_2A'_2$ і $A_3A_5A'_5$ [2, с. 97] (їх можна вважати вписаними у коло, яке вершини рівносторонніх трикутників ділять на три рівні дуги в 120°) (рис. 5). Вузло-вими точками мінімальної сітки сполучення вершин як чотирикутника $A_1A_2A_3A_5$, так і неопуклого п'ятикутника $A_1A_2A_3A_4A_5$ будуть одні і ті ж самі точки M_1 і M_2 перетину сумарного відрізка $A'_2A'_5$ з дугами в 120° , побудова-ними на сторонах A_1A_2 і A_3A_5 опуклого чотирикутника $A_1A_2A_3A_5$.

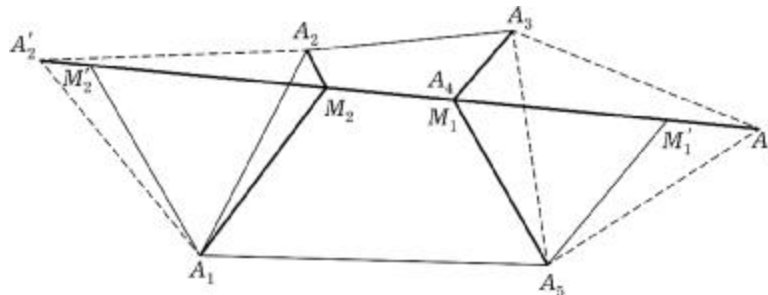


Рис. 5

У цьому випадку мінімальна сітка сполучення об'єктів, розміщених у вершинах неопуклого п'ятикутника, згідно з теоремою про мінімальну сітку сполучення вершин опуклого чотирикутника [2, с. 97], складатиметься з одних і тих самих відрізків A_1M_2 , A_2M_2 , A_3M_1 , A_5M_1 , M_1M_2 , які є сторонами кутів з вершинами у вузлових точках M_1 і M_2 (незалежно від місця розмі-щення вершини A_4 увігнутого кута на відрізку M_1M_2). Зокрема, відрізки A_3M_1 і A_5M_1 та увігнутий кут $A_3A_4A_5$ змінюватимуться. Таким чином, $A'_2A'_5 = A_1M_2 + A_2M_2 + A_3M_1 + A_5M_1 + M_1M_2$, де $A'_2A'_5$ – сумарний відрізок опуклого чотирикутника $A_1A_2A_3A_5$. Отже, у випадку а) теорема доведена.

Для виведення формули довжини мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах неопуклого п'ятикутника, у випадку а) використаємо метод послідовного додавання векторів. Оскільки вектори $\overrightarrow{A_2'A_5}$, $\overrightarrow{A_2'A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, $\overrightarrow{A_3A_5}'$ не є нульовими векторами і неколінеарні, то за правилом многокутника матимемо векторну рівність:

$$\overrightarrow{A_2'A_5} = \overrightarrow{A_2'A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_5}'.$$

Піднесемо її обидві частини до квадрату і дістанемо:

$$(\overrightarrow{A_2'A_5})^2 = (\overrightarrow{A_2'A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_5}')^2.$$

Оскільки трикутники $A_1A_2A_2'$ і $A_3A_5A_5'$ рівносторонні, то кут між векторами:

$$\overrightarrow{A_2'A_2} \text{ і } \overrightarrow{A_2A_3} \text{ дорівнює } (60^\circ + \alpha_2) - 180^\circ = \alpha_2 - 120^\circ;$$

$$\overrightarrow{A_2'A_2} \text{ і } \overrightarrow{A_3A_5}' \text{ дорівнює } 360^\circ - (60^\circ + \alpha_3) - (60^\circ + \alpha_2) = 240^\circ - \alpha_2 - \alpha_3;$$

$$\overrightarrow{A_2A_3} \text{ і } \overrightarrow{A_3A_5}' \text{ дорівнює } 180^\circ - (60^\circ + \alpha_3) = 120^\circ - \alpha_3.$$

Якщо $A_1A_2 = a$, $A_2A_3 = b$, $A_3A_5 = c$, то

$$(\overrightarrow{A_2'A_2})^2 = a^2,$$

$$(\overrightarrow{A_2A_3})^2 = b^2,$$

$$(\overrightarrow{A_3A_5}')^2 = c^2,$$

$$(\overrightarrow{A_2'A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}) = ab \cos(\alpha_2 - 120^\circ),$$

$$(\overrightarrow{A_2'A_2}, \overrightarrow{A_3A_5}') = ac \cos(240^\circ - \alpha_2 - \alpha_3), \quad (\overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_3A_5}') = bc \cos(120^\circ - \alpha_3).$$

Тоді

$$(\overrightarrow{A_2'A_5})^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos(\alpha_2 - 120^\circ) +$$

$$+ 2ac \cos(240^\circ - \alpha_2 - \alpha_3) + 2bc \cos(120^\circ - \alpha_3);$$

$$l = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos(\alpha_2 - 120^\circ) + 2ac \cos(240^\circ - \alpha_2 - \alpha_3) + 2bc \cos(120^\circ - \alpha_3)}.$$

Розглянемо випадок б). Якщо увігнутий кут $A_3A_4A_5$ більший від 240° , тобто кут, який його доповнює до повного кута, менший від 120° , то його вершина A_4 буде всередині п'ятикутника між дугами в 120° , які побудовані на хордах-сторонах A_1A_2 і A_3A_5 опуклого чотирикутника $A_1A_2A_3A_5$ (рис. 6). У такому випадку вершину A_4 з'єднаємо з вершинами A_2' і A_5' побудованих рівносторонніх трикутників. Внаслідок перетину відрізків $A_2'A_4$ і $A_5'A_4$ з дугами в 120° , побудованими на сторонах A_1A_2 і A_3A_5 , утворяться три вузлові точки M_1 , M_2 , A_4 трикутників $A_3A_4A_5$, $A_1A_2A_4$ і $A_2'A_5'A_4$. Вузлова точка M_1 належить дузі в 120° , побудованій на відрізку A_3A_5 , а вузлова точка M_2 – дузі в 120° , побудованій на стороні A_1A_2 . Точка A_4 є вершиною ламаної $A_2'A_4A_5'$. Оскільки точки M_1 і M_2 знаходяться на дугах у 120° , то, згідно з властивістю мінімальної сітки сполучення, кути в цих точках будуть рівні між собою і кожний з них становитиме 120° . А у вершині A_4 , згідно з побудовою сумарного відрізка опуклого чотирикутника $A_1A_2A_3A_5$, в якого $A_1A_2 + A_3A_5 < A_2A_3 + A_1A_5$ [2, с. 102], обидва кути не менші від 120° . Тому точка A_4 може бути вузловою точкою мінімальної сітки сполучення вершин трикутника $A_2'A_4A_5'$. Тоді мінімальна лінія складатиметься з відрізків A_1M_2 ,

A_2M_2 , A_3M_1 , A_5M_1 , A_4M_1 , A_4M_2 , які є сторонами кутів з вершинами у вузлових точках M_1 , M_2 і A_4 . Отже, у випадку б) теорема доведена.

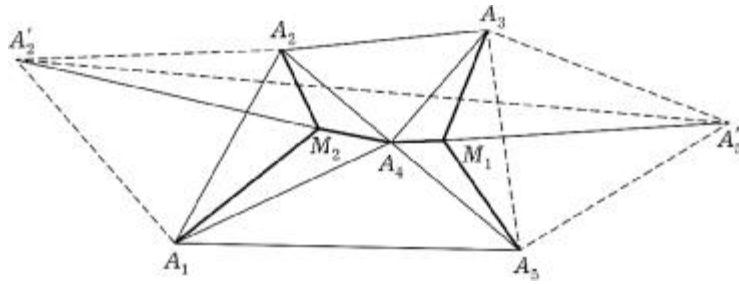


Рис. 6

Для виведення формули довжини мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах неопуклого п'ятикутника, у випадку б) математичну модель, подану у вигляді геометричної фігури, запишемо формулою. Нехай $A_1A_2 = a$, $A_2A_4 = b$, $A_3A_4 = c$, $A_3A_5 = d$, $\angle A_1A_2A_4 = \alpha'_2$, $\angle A_4A_3A_5 = \alpha'_3$. З трикутників $A'_2A_2A_4$ і $A_4A_3A'_5$, відповідно, матимемо:

$$l_1 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(60^\circ + \alpha'_2)}, \quad l_2 = \sqrt{c^2 + d^2 - 2cd \cos(60^\circ + \alpha'_3)}.$$

Формула довжини мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах такого неопуклого п'ятикутника, буде:

$$l = l_1 + l_2 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(60^\circ + \alpha'_2)} + \sqrt{c^2 + d^2 - 2cd \cos(60^\circ + \alpha'_3)}. \quad (4)$$

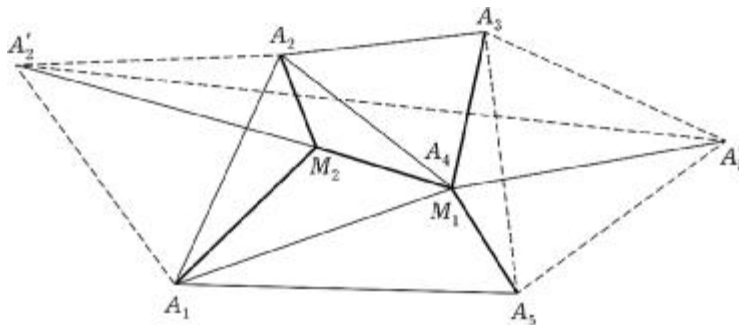


Рис. 7

Розглянемо випадок в). Тут кут $A_3A_4A_5$ доповнює увігнутий кут до повного кута і є більший за 120° . Тому, згідно з наслідком теореми про точку Торрічеллі [2, с. 94], вершину A_4 можна вважати вузловою точкою M_1 найкоротшої сітки сполучення вершин трикутника $A_3A_4A_5$ (рис. 7). Тоді побудова мінімальної сітки неопуклого п'ятикутника (як і у випадку б)) складатиметься з мінімальних сіток трикутників $A_3A_4A_5$ і $A_1A_2A_4$. Мінімальна сітка сполучення вершин першого трикутника складатиметься з відрізків A_3M_1 і M_1A_5 , а другого – з відрізків A_1M_2 , A_2M_2 і A_4M_2 , де M_1 і M_2 – вузлові точки трикутників. Оскільки $l_3 = A_1M_2 + A_2M_2 + A_4M_2 < A_1A_4 + A_2A_4 \leq A_1A_5 + A_2A_3$ [2, с. 94], то об'єкти, розміщені у вершинах такого неопуклого п'ятикутника, можна з'єднати відрізками A_1M_2 , A_2M_2 , A_4M_2 ,

A_3A_4 і A_5A_4 , які є сторонами кутів з вершинами у вузлових точках $M_1 \equiv A_4$ і M_2 . Суму довжин цих відрізків емпірично можна вважати найменшою. Отже, у випадку в) теорема доведена.

Якщо $A_1A_2 = a$, $A_2A_4 = b$, $A_3A_4 = c$, $A_4A_5 = d$, $\angle A_1A_2A_4 = \alpha'_2$, то довжина мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах неопуклого п'ятикутника, виражатиме формула

$$l = c + d + \sqrt{a^2 + b^2 - 2abc \cos(60^\circ + \alpha'_2)}.$$

Розглянемо випадок г), коли сторони увігнутого кута $A_3A_4A_5$ п'ятикутника спираються на одну з двох більших протилежних сторін A_3A_5 опуклого чотирикутника $A_1A_2A_3A_5$ (рис. 8). З'єднавши вершину A_4 увігнутого кута $\angle A_3A_4A_5$ з вершинами A'_2 і A'_5 рівносторонніх трикутників $A_1A_5A'_5$ і $A_2A_3A'_2$ (як і у випадку б), отримаємо вузлові точки M_1 , M_2 і A_4 . Кожна з точок M_1 і M_2 є вершиною трьох кутів по 120° . Кут $A'_2A_4A'_5$ більший від 120° і навіть у багатьох випадках близький до 180° . Отже, згідно з властивостями мінімальної сітки сполучення, довжина мінімальної сітки сполучення вершин неопуклого п'ятикутника дорівнює довжині двох відрізків A'_2A_4 і A'_5A_4 , які є сумарними відрізками мінімальних сіток сполучення вершин трикутників $A_2A_3A_4$ і $A_1A_4A_5$. Звідси

$$l = A'_2A_4 + A'_5A_4 = (A_2M_1 + A_3M_1 + A_4M_1) + (A_4M_2 + A_5M_2 + A_1M_2).$$

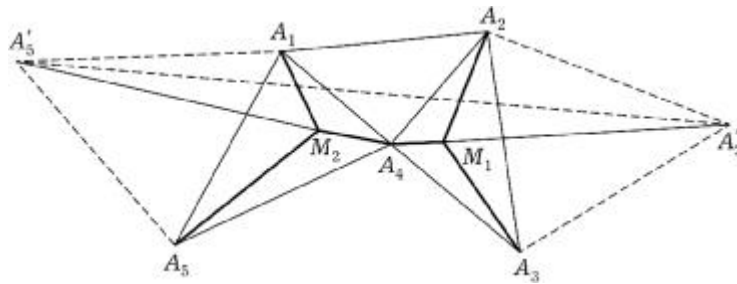


Рис. 8

Аналогічно, як і у випадку б), отримуємо формулу довжини мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах неопуклого п'ятикутника.

Таким чином, довжина мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах неопуклого п'ятикутника, дорівнює довжині суми двох відрізків $A'_2A_4 + A'_5A_4$, які найчастіше утворюють кут $A'_2A_4A'_5$, не менший від 120° , а за кута 180° збігається з довжиною відрізка $A'_2A'_5$. Отже, у випадку г) теорема доведена.

Отже, п'ять об'єктів, довільно розміщених на площині, можна з'єднати мінімальною сіткою сполучення. Крім того, на лінії мінімальної сітки сполучення можуть розміститись інші об'єкти.

Висновки та перспективи подальших досліджень. Сформульовано дві теореми та 12 наслідків для побудови мінімальної сітки сполучення об'єктів, розміщених у вершинах довільного п'ятикутника, на основі яких побудовані вузлові точки мінімальної сітки сполучення об'єктів, визначено її довжину мінімальної сітки, можливості побудови та геометричне місце розташування. Подані математичні моделі у вигляді формул та геометричних фігур для побудови мінімальних сіток сполучення об'єктів, розміщених у вершинах довільного п'ятикутника. Встановлено спосіб визначення кількості вузлових

точок у кожному випадку. Вказано на доцільність використання способів побудови мінімальної сітки сполучення об'єктів як геометричних моделей виробничих процесів, що забезпечить можливість оптимального планування, проведення мінімальної довжини електричної лінії, водопроводу, газопроводу, каналізації, визначення місця розміщення станцій різного призначення, з'єднання елементів монтажу різних конструкцій тощо. Проте побудова мінімальних сіток сполучення для інших многокутників потребує подальшого дослідження.

1. Беляева Э. С., Монахов В. М. Экстремальные задачи. – Москва: Просвещение, 1977. – 64 с.
2. Возняк Г. М., Возняк О. Г. Побудова мінімальної сітки сполучення трьох та чотирьох об'єктів, довільно розміщених на площині // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2023. – Вип. 21. – С. 91–107. – <https://doi.org/10.15407/apmm2023.21.91-107>.
3. Courant R., Robbins H. What is Mathematics? – Rev. by Ian Stewart. – New York–Oxford: Oxford University Press, 1996. – 590 p.
4. Steinhaus Hugo. One hundred problems in elementary mathematics. – New York, Dover Publications, 1979. – 174 p.

MATHEMATICAL MODEL OF A MINIMAL GRID CONNECTING FIVE OBJECTS ARBITRARILY PLACED ON THE PLANE

The optimal applied problems related to the construction of a minimal grid connecting five objects arbitrarily placed on a plane are considered. The algorithms for constructing the shortest lines of their connection are developed and substantiated. Mathematical models are constructed in the form of formulas and geometric figures. Optimal methods of connection of such objects are proposed.

Keywords: Torricelli point, minimal grid, geometric transformations, algorithm, total segments, mathematical model.