

КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ШАРУ ЗА ВРАХУВАННЯ ТЕРТЯ

Побудовано числовий алгоритм розв'язування фрикційної контактної задачі про взаємодію шару зі штампами складної форми. Алгоритм ґрунтується на методі інтегральних рівнянь і зведенні до задачі квадратичного програмування. Ядра інтегральних рівнянь визначено через фундаментальний розв'язок для шару, який записано у простому вигляді. Контактну задачу, в якій область взаємодії невідома, сформульовано у вигляді інтегральних рівнянь-нерівностей Сінйоріні. З використанням кубатурних формул задачу трансформовано до системи лінійних алгебричних рівнянь-нерівностей. Розв'язування цієї системи зведено до задачі квадратичного програмування. З допомогою розробленого алгоритму досліджено фрикційні контактні задачі про взаємодію шару зі штампами різних форм.

Ключові слова: фрикційна взаємодія, контактний тиск, тертя, шар, штамп, область контакту, метод інтегральних рівнянь, квадратичне програмування.

Вступ. Тривимірні контактні задачі для гладких штампів (за відсутності тертя) добре вивчені, при цьому для широкого класу задач розв'язки отримано аналітично [9, 10]. Для вивчення фрикційних контактних задач, як правило, використовують числові методи. Більшість досліджень стосуються випадку, коли область контакту мала порівняно з розмірами тіл. Тоді тіла моделюють півпростором, що істотно спрощує розв'язування контактної задачі. Задачам, де тіло розглядають як шар, приділено менше уваги [6, 9, 10]. Це пов'язано з тим, що ядра в інтегральних рівняннях мають складний вигляд і тому їх розв'язують числовими методами або за наближеними аналітичними підходами. Найчастіше розглядали осесиметричні задачі з використанням методу малого параметра [6].

Задачам для шару, в яких враховують тертя, присвячено тільки окремі праці [6]. Їх особливість в тому, що область контакту наперед невідома. Вони належать до нелінійних і для розв'язування тут використовують варіаційні методи [11–14].

Розроблено також неваріаційні числові методи [1, 2, 16–19]. Зокрема, в праці [1] задачу зведено до інтегральних рівнянь типу Гаммерштейна. При цьому застосовували метод ітерацій, причому кількість ітерацій може бути великою (десятки). Тому для поліпшення збіжності методу вживають різні підходи. Наприклад, вводять додаткові параметри, для яких необхідно вибрати оптимальні значення.

Загальний метод розв'язування задач з невідомими ділянками контакту запропонував Сінйоріні [18], який звів їх до розгляду задач з обмеженнями у вигляді нерівностей. Ефективний метод розв'язування контактних задач з невідомими областями взаємодії запропонував Калкер [11, 12], розглядаючи варіаційні задачі із обмеженнями. Контактну задачу для півпростору зведено до задачі квадратичного програмування. Також доведено, що ця задача має розв'язок і він єдиний. Перевага цього підходу в тому, що для розв'язування задачі квадратичного програмування розроблено прямі числові методи і відповідні комп'ютерні програми. Контактну задачу з тертям для півпростору зведено до задачі квадратичного програмування [3].

Нижче розглянуто фрикційну контактну задачу для шару, який знаходиться на гладкій жорсткій основі. Ядра інтегральних рівнянь записано вигляді відрізків швидкозбіжних рядів або апроксимовано поліномами. Це дало

 solyarolya@gmail.com

зможу використати числове розв'язування інтегрального рівняння із контрольованою точністю. Контактні напруження у наперед незаданій області взаємодії визначено за підходом, описаним раніше [3, 4].

Розглядатимемо випадок, коли на штамп діє горизонтальна сила і він перебуває на межі граничної рівноваги, та приймемо, що в області контакту дотичні і нормальні напруження пов'язані законом Кулона [6, 9, 10].

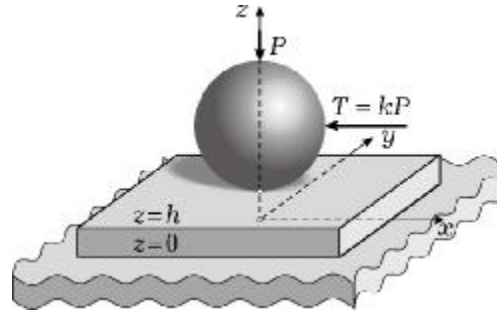


Рис. 1. Схема контактної взаємодії шару зі штампом.

1. Формулювання задачі. Розглянемо контактну задачу для шару $0 < z < h$, який розміщений на жорсткій гладкій основі, якщо $z = 0$. Приймемо, що верхня межа взаємодії зі штампом, до якого прикладена сила P , яка діє нормально до меж шару, та горизонтальна сила T , що діє паралельно осі Ox (рис. 1). Взаємодія відбувається з тертям, штамп нерухомий, перебуває в стані спокою. В області контакту діють нормальні σ_z та дотичні τ_{xz} напруження, які згідно зі законом Кулона в області контакту пов'язані співвідношенням $\tau_{xz} = k\sigma_z$, де k – коефіцієнт тертя, який надалі приймаємо сталим, при цьому $T = -kP$, $\sigma_z < 0$. Позначимо модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона шару через G, ν , форму штампа, який вважаємо жорстким, в області контакту описує рівняння $z = f(x, y)$. Далі покладемо, що $f(0, 0) = 0$.

2. Основні співвідношення. Для запису інтегрального рівняння задачі заздалегідь знайдено переміщення верхньої межі шару, зумовлені зосередженими силами $(0, 0, Z)$ та $(X, 0, 0)$, які прикладені в довільній точці (ξ, η, h) .

Для їхнього знаходження спочатку використовуємо операторний метод Лур'є. Переміщення записуємо у вигляді рядів з коефіцієнтами, які містять функції Макдональда. Ці ряди швидкозбіжні під час визначення переміщень на великих відстанях від прикладеної сили. Для їхнього знаходження в точках, близьких до прикладених сил, застосуємо інтегральне перетворення Ханкеля. Переміщення зображаємо у вигляді суми складових, що містять особливості, та регулярних функцій, апроксимованих поліномами. Переміщення межі шару $w_z = w(x, y, h)$, зумовлені дією вертикальної сили, будуть такими[5]:

$$w_z = \frac{1-\nu}{G} \frac{Z}{2\pi h} \begin{cases} \frac{1}{\rho} + f_z(\rho), & \rho \leq 3, \\ -2\operatorname{Re} \sum_i \operatorname{tg}^2 \alpha_i K_0(\alpha_i \rho), & \rho > 3. \end{cases} \quad (1)$$

де $\rho = R/h$, $R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$, $K_{0,1}(z)$ – функції Макдональда,

$$f_z(\rho) = \sum_{n=0}^7 c_n \rho^n,$$

$$c_0 = -1.1675, c_1 = -0.0012382, c_2 = 0.39444, c_3 = 0.033259, \\ c_4 = -0.22738, c_5 = 0.12215, c_6 = -0.027402, c_7 = 0.0023313,$$

α_i – корені з додатною дійсною частиною рівняння

$$\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} + 1 = 0. \quad (2)$$

Нормальні переміщення $w_X = w(x, y, h)$ від дії горизонтальної сили визначаємо за формулами

$$2Gw_X = \frac{1}{2\pi} \frac{X}{h} \frac{x - \xi}{R} \begin{cases} -(1-2\nu) \frac{1}{\rho} + 4(1-\nu) f_X(\rho), & 0 \leq \rho \leq 3, \\ \frac{\nu}{\rho} + 4(1-\nu) \operatorname{Re} \left[\frac{\alpha_1}{\cos^2 \alpha_1} K_1(\alpha_1 \rho) \right], & \rho > 3, \end{cases} \quad (3)$$

де

$$f_X(\rho) = \sum_{n=0}^6 b_n \rho^n,$$

$$b_0 = 0.00013181, b_1 = 0.18772, b_2 = 0.02811,$$

$$b_3 = -0.15634, b_4 = 0.090639, b_5 = -0.021703, b_6 = 0.0019488.$$

Похибка обчислення переміщень за формулами (1), (3), якщо $\rho \leq 3$, менша за 10^{-4} .

Приймаючи відомими нормальні напруження та інтегруючи по області контакту D , отримуємо формулу для визначення нормальних переміщень на межі $z = h$:

$$w(x, y, h) = \frac{\gamma}{h} \int_D \sigma_z(\xi, \eta, h) K(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta, \quad (4)$$

де

$$\gamma = \frac{1-\nu}{2\pi G},$$

$$K(\alpha, \beta) = F_0(\alpha, \beta) + F_1(\alpha, \beta), \quad F_0 = \frac{1}{\rho} - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} k \frac{x - \xi}{h\rho^2},$$

$$F_1 = \begin{cases} f_Z(\rho) + 2k \frac{x - \xi}{h\rho} f_X(\rho), & \rho \leq 3, \\ -\frac{1}{\rho} - 2\operatorname{Re} \sum_i \operatorname{tg}^2 \alpha_i K_0(\alpha_i \rho) + 2k \frac{x - \xi}{h\rho} \left(\frac{1}{4\rho} + \operatorname{Re} \left[\frac{\alpha_1}{\cos^2 \alpha_1} K_1(\alpha_1 \rho) \right] \right), & \rho > 3. \end{cases} \quad (5)$$

Наведемо перші вісім коренів α_i рівняння (2):

$$2.1062 + 1.1254i, 5.3563 + 1.5516i, 8.5367 + 1.7755i, 11.6992 + 1.9294i,$$

$$14.8541 + 2.0469i, 18.0049 + 2.1419i, 21.1534 + 2.2217i, 24.3003 + 2.2906i.$$

За заданих переміщень основи штампа w рівняння (4) є інтегральним для контактних напружень. Тут ядра рівнянь зображено у вигляді суми ядер інтегрального рівняння контактної задачі для півпростору F_0 та коригувальної компоненти F_1 , яка є неперервною обмеженою функцією.

3. Алгоритм розв'язування задачі. Для фрикційних задач області контакту, як правило, наперед невідомі і тому для їх знаходження використовуємо числовий метод, який ґрунтується на підході Сінйоріні [18].

Тут розглядаємо область S , яка вміщує область контакту D . Довизначаємо функцію $\sigma(x, y) = \sigma_z(x, y, h)$ в області S поза областю D , поклавши її рівною нулю.

Умови для контактної задачі в області S записуємо у вигляді інтегральних рівнянь-нерівностей [4, 18]

$$\int_S \sigma(\xi, \eta) K(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta - F(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D \quad (\sigma < 0), \quad (6)$$

$$\int_S \sigma(\xi, \eta) K(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta - F(x, y) \leq 0, \quad (x, y) \in S \setminus D \quad (\sigma = 0), \quad (7)$$

де $F(x, y) = f(x, y) + w_0$, w_0 – зміщення штампа, при цьому $w_0 < 0$.

Тобто за невідомої області контакту існує інтегральне рівняння-нерівність

$$\int_S \sigma(\xi, \eta) K(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta - F(x, y) \leq 0, \quad \sigma \leq 0, \quad (x, y) \in S. \quad (8)$$

Домножимо ліву і праву його частини на величину $\sigma(x, y)$ і проінтегруємо по області S за змінними (x, y) . Тоді отримуємо:

$$J \geq 0,$$

де

$$J = \int_S \int_S \sigma(x, y) \sigma(\xi, \eta) K(x - \xi, y - \eta) dS_{\xi\eta} dS_{xy} - \int_S \sigma(x, y) F(x, y) dS. \quad (9)$$

За побудовою величина J невід'ємна. Легко показати, що за виконання умов (6) і (7) (тобто на розв'язку контактної задачі (4)) вона дорівнює нулю, тобто досягає свого мінімального значення. Таким чином, розв'язування фрикційної контактної задачі зводимо до знаходження мінімального значення величини (9) за виконання умов (8), тобто до задачі квадратичного програмування. Тут використали неваріаційний метод зведення контактної задачі до задачі квадратичного програмування [4].

У частковому випадку, коли $k = 0$ (за відсутності тертя), контактну задачу для півпростору звели до задачі квадратичного програмування іншим методом у праці [12]. Отримані там співвідношення також мають вигляд (8), (9), якщо $K = 1/\rho$.

Побудуємо дискретні аналоги рівнянь-нерівностей (6), (7). Для цього використаємо підходи, які розроблені в методі граничних елементів.

Побудуємо спочатку кубатурну формулу для інтеграла

$$\varphi(x, y) = \int_S \sigma(\xi, \eta) K(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta, \quad \text{при } (x, y) \in S.$$

Зобразимо неперервну функцію $\sigma(x, y)$ в області S у вигляді інтерполяційної формули, яка є кусково-неперервною лінійною функцією по кожній зі змінних [8, 15]:

$$\sigma(x, y) \approx \sum_{n,m} \sigma_{n,m} S_{h_x}(x - x_n) S_{h_y}(y - y_m), \quad (10)$$

де $\sigma_{n,m} = \sigma(x_n, y_m)$, $(x_n, y_m) \in S$,

$$S_H(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{H}, & |x| < H; \\ 0, & |x| > H. \end{cases} \quad H - \text{довільна стала.}$$

$$x_n = x_0 + nh_x, \quad y_m = y_0 + mh_y, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad m = 0, 1, \dots, M.$$

Тут прийняли, що область S є прямокутником з координатами нижньої лівої вершини (x_0, y_0) , яка покрита сіткою з кроками h_x, h_y , де індекси (n, m) вибрані так, щоби відповідні їм координати точок належали до області S . Позначимо сукупність цих індексів через I .

Підставивши співвідношення (10) у формулу (4) та поклавши $x = x_v$, $y = y_\mu$, які належать області S у вибраних вузлових точках, отримаємо:

$$\varphi_{v,\mu} = \sum_{n,m} A_{v,\mu,n,m} \sigma_{n,m}, \quad (11)$$

де $\varphi_{v,\mu} = \varphi(x_v, y_\mu)$, $(v, \mu) \in I$,

$$A_{v,\mu,n,m} = c_{v-n, \mu-m}, \quad c_{i,j} = \int_{-h_x}^{h_x} \int_{-h_y}^{h_y} S_{h_x}(\xi) S_{h_y}(\eta) K(x_i - \xi, y_j - \eta) d\xi d\eta.$$

Для реалізації запропонованого підходу необхідно знайти коефіцієнти $c_{i,j}$. Підставляючи у формулу для їх визначення вираз для функції K , яку обчислимо за співвідношенням (5), отримуємо:

$$c_{i,j} = \gamma (a_{i,j} + \beta b_{i,j} + d_{i,j}),$$

де $\beta = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} k$,

$$a_{i,j} = \int_{-h_x}^{h_x} \int_{-h_y}^{h_y} S_{h_x}(\xi) S_{h_y}(\eta) \frac{1}{\sqrt{(\xi - x_i)^2 + (\eta - y_j)^2}} d\xi d\eta,$$

$$b_{i,j} = \int_{-h_x}^{h_x} \int_{-h_y}^{h_y} S_{h_x}(\xi) S_{h_y}(\eta) \frac{\xi - x_i}{(\xi - x_i)^2 + (\eta - y_j)^2} d\xi d\eta,$$

$$d_{i,j} = \frac{1}{h} \int_{-h_x}^{h_x} \int_{-h_y}^{h_y} S_{h_x}(\xi) S_{h_y}(\eta) F_1(x_i - \xi, y_j - \eta) d\xi d\eta.$$

Підінтегральні функції, через які знаходимо коефіцієнти a_{ij} , b_{ij} , мають особливості, якщо $\xi = x_i$, $\eta = y_j$; $(i, j) \in I$. Ці коефіцієнти знайдені аналітично. Коефіцієнти $d_{i,j}$ обчислювали числово, використовуючи кубатурні формули (при цьому враховували, що підінтегральна функція F_1 обмежена і неперервна).

4. Числовий алгоритм розв'язування контактної задачі.

Застосовуючи дискретну формулу (11), запишемо систему інтегральних рівнянь-нерівностей (6), (7) у вигляді системи алгебричних рівнянь-нерівностей:

$$\sum_{n,m} A_{v,\mu,n,m} \sigma_{n,m} = F_{v,\mu} \quad \text{при} \quad \sigma_{v,\mu} < 0, \quad (12)$$

$$\sum_{n,m} A_{v,\mu,n,m} \sigma_{n,m} \leq F_{v,\mu} \text{ при } \sigma_{v,\mu} = 0, \quad (13)$$

де $F_{v,\mu} = F(x_v, y_\mu)$.

Рівняння (12) відповідають області контакту D , а нерівності (13) виконуються в області $S \setminus D$. При цьому значення $\sigma_{n,m}$ можуть бути від'ємними в області контакту або рівними нулю поза нею. Запишемо їх у вигляді

$$\sum_{n,m} A_{v,\mu,n,m} \sigma_{n,m} \leq F_{v,\mu}; \quad \sigma_{v,\mu} \leq 0, \quad (14)$$

причому $(v, \mu) \in I$. Умова (14) виконується в усій області S .

Вираз (9) містить повторні інтеграли від двовимірних інтегралів, у яких підінтегральні функції мають особливості. Використаємо інший підхід для запису введеної величини J (9) у задачі квадратичного програмування, де не потрібно будувати кубатурні формули для дискретизації інтегралів.

Кожну з нерівностей (14) помножимо на $\sigma_{v,\mu}$ і додамо їх за всіма значеннями v, μ , за яких $(x_v, y_\mu) \in S$. У результаті отримуємо:

$$J = \sum_{v,\mu} \sum_{n,m} A_{v,\mu,n,m} \sigma_{n,m} \sigma_{v,\mu} - \sum_{n,m} F_{v,\mu} \sigma_{v,\mu}. \quad (15)$$

За виконання умов (14) маємо $J > 0$. За додаткового задоволення умов (12), (13) величина J досягає свого мінімального значення.

Тому формулюємо таку задачу: знайти такі величини $\sigma_{n,m}$, аби вони задовольняли умови (14) та мінімізували величину (15). А це є класичною задачею квадратичного програмування.

5. Результати розрахунків. З метою тестування обчислювали контактні напруження для гладкого штампа параболоїдної форми при

$$f(x, y) = \frac{1}{2R}(x^2 + y^2). \quad (16)$$

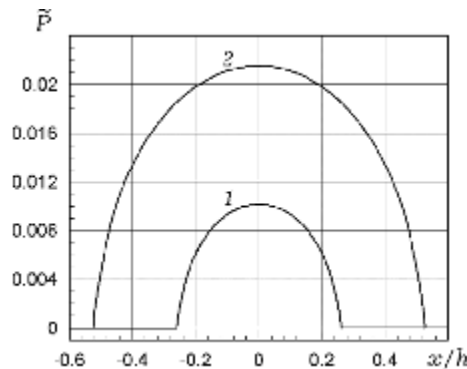


Рис. 2. Відносний контактний тиск під гладким штампом, якщо $w_0 = -0.0011h$; $-0.041h$.

Відносний тиск $\tilde{p} = \sigma \cdot \gamma$, якщо $h_x = h_y = 0.02h$, $w_0 = -0.0011h$, $2R = 10h$, у перерізі $y=0$ описує крива 1 на рис. 2. Знайдений за розробленим алгоритмом максимальний відносний тиск $\tilde{p} = 1.019 \cdot 10^{-2}$. На основі наведеного раніше [6] розв'язку отримуємо $\tilde{p} = 0.1022$. Покладали також $h_x = h_y = 0.035h$, $w_0 = -0.041h$, $2R = 10h$. Відносний контактний тиск описує

крива 2 на рис. 2. Розраховані за розробленим алгоритмом та результатами праці [6] максимальні відносні тиски становили 0.02157 та 0.0216, відповідно.

З використанням розробленого алгоритму розглянемо фрикційну контактну задачу про взаємодію шару зі штампами різної форми. Широке коло контактних задач зводять до розгляду шару, коли форму штампа описує функція $f(x, y) = \frac{1}{h}(Ax^2 + By^2)$ за заданих сталих A і B [7].

Розрахунки виконали за різних A і B , різних значень зміщення штампа w_0 та різних значень коефіцієнта тертя k . Під час вибору області S у першому наближенні використовували аналітичні розв'язки контактних задач для гладких штампів, у яких визначені області контакту [7, 9, 10]. Далі ці області уточнювали, враховуючи тертя.

На початковому етапі область S моделювали у вигляді прямокутника, розміри якого повинні бути більші, ніж очікуваної області контакту. Задану область дискретизували прямокутною сіткою з N кроками уздовж горизонтальної осі (з кроком h_x) та M кроками уздовж вертикальної (з кроком h_y). Значення параметрів N та M фіксували. В результаті числового розв'язання задачі квадратичного програмування отримали контактні напруження у відповідних вузлових точках. Розглядали два характерні випадки. У першому на межах області S спостерігали ненульові контактні тиски, що свідчило про недостатність розмірів обраної області контакту. Тому поступово збільшували кроки h_x , h_y та повторно розв'язували задачу до моменту, коли тиски на межах ставали нульовими. У другому випадку за контактних нульових тисків в областях великих розмірів, які прилеглі до меж, отриманих з першого пробного розрахунку, розміри області S вважали надмірними. Далі їх поступово зменшували, одночасно збільшуючи кількість кроків, підвищуючи точність обчислень. Наприклад, при $N \times M = 900$ загальна кількість вузлових точок становила 900. Під час розв'язання враховували симетрію контактних тисків відносно осі Ox : $\sigma_z(x, y) = \sigma_z(x, -y)$, що давало змогу зменшити кількість невідомих у системі рівнянь-нерівностей.

Допоміжну область S вибирали у вигляді прямокутника, який займав $-c < x < c$, $-d < y < d$, де $c = 15 \cdot h_x$, $d = 15 \cdot h_y$.

Контактний тиск розраховували для півпростору та шару при $A = B = 0.5$, за коефіцієнта Пуассона $\nu = 0.3$ та з урахування тертя ($k = 0.8$). Для цього випадку область D покривали сіткою з кроками $h_x = 0.012h$, $h_y = 0.012h$.

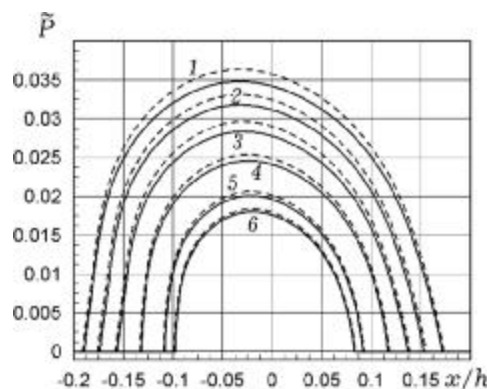


Рис. 3. Відносні контактні тиски в півпросторі та шарі при $A = B = 0.5$, $\nu = 0.3$, $k = 0.8$, $w_0/h = -0.008; -0.01; -0.015; -0.02; -0.025; -0.03$.

Результати розрахунків відносних контактних тисків $\tilde{p} = \sigma \cdot \gamma$ у перерізі $y = 0$ за значень $w_0/h = -0.008; -0.01; -0.015; -0.02; -0.025; -0.03$ наведено на рис. 3.

Виявили, що за малих заглиблень штамп (при $w_0 = -0.015; -0.01; -0.008$) контактні тиски в шарі (штрихові криві) і півпросторі (суцільні) практично збігаються (відповідні криві 4–6). За більших заглиблень штамп $w_0/h = -0.03; -0.025; -0.02$ (криві 1–3 та відповідні штрихові) значення контактних тисків у шарі є більші, ніж у півпросторі, при цьому розмір області контакту для шару також зростає.

Розрахунки виконали при $A = B = 0.03$, коли в шарі контактні напруження істотно відрізняються від напружень у півпросторі. Для цього випадку область D покривали сіткою з кроками $h_x/h = 0.06$, $h_y/h = 0.06$. Результати розрахунків відносних контактних тисків за врахування тертя при $k = 0.3$, коефіцієнта Пуассона $\nu = 0.3$ та $w_0/h = -0.03; -0.025; -0.02$ наведено на рис. 4а (криві 1–3). Значення відносних контактних тисків $\tilde{p}$ при $w_0 = -0.02$ та різних значень коефіцієнта тертя $k = 0.6; 0.4; 0.2$ наведені на рис. 4б (криві 1–3).

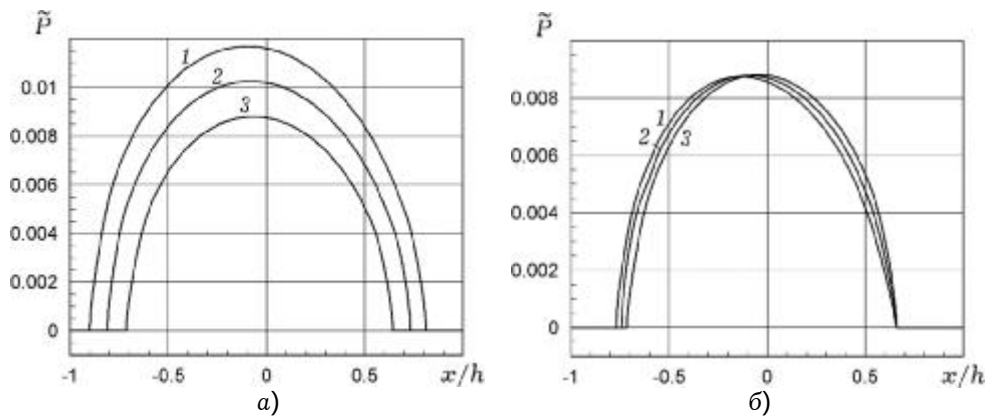


Рис. 4. Відносний контактний тиск при $A = B = 0.03$; $k = 0.3$;
(а) – $w_0 = -0.03; -0.025; -0.02$; (б) – $k = 0.6; 0.4; 0.2$.

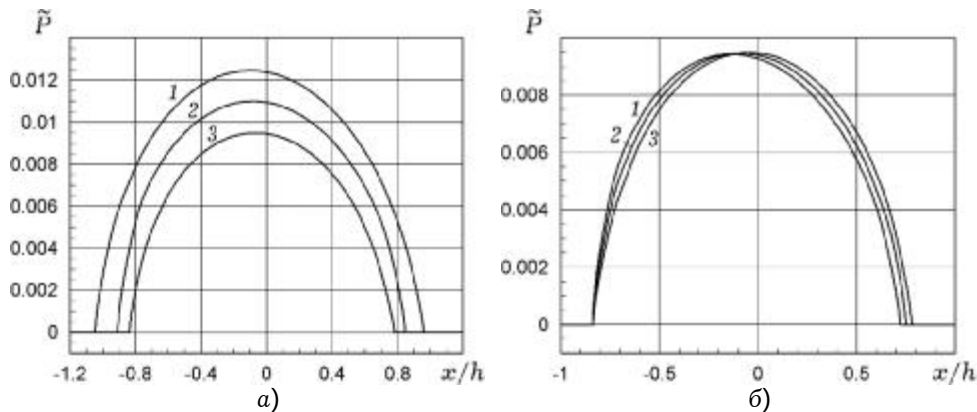


Рис. 5. Відносний контактний тиск при $A = 0.05$ $B = 0.5A$; $k = 0.3$;
(а) – $w_0 = -0.03; -0.025; -0.02$; (б) – $k = 0.6; 0.4; 0.2$.

Зміну відносних контактних тисків уздовж осі Ox за наведених вище значень w_0 , якщо $A = 0.05$, $B = 0.5A$ (параболоїдальний штамп, сплюснутий у напрямку осі Oy), наведено на рис. 5а. Обчислювали за $h_x/h = 0.065$, $h_y/h = 0.065$, коефіцієнта тертя $k = 0.3$ та коефіцієнта Пуассона $\nu = 0.3$. На рис. 5б подано результати розрахунків за $w_0 = -0.02$ та вказаних вище коефіцієнтів тертя.

Аналогічні результати у такому ж порядку, якщо $A = 0.05$, $B = 0.25A$, наведені на рис. 6. Під час обчислень область покривали сіткою $h_x/h = 0.1$, $h_y/h = 0.1$.

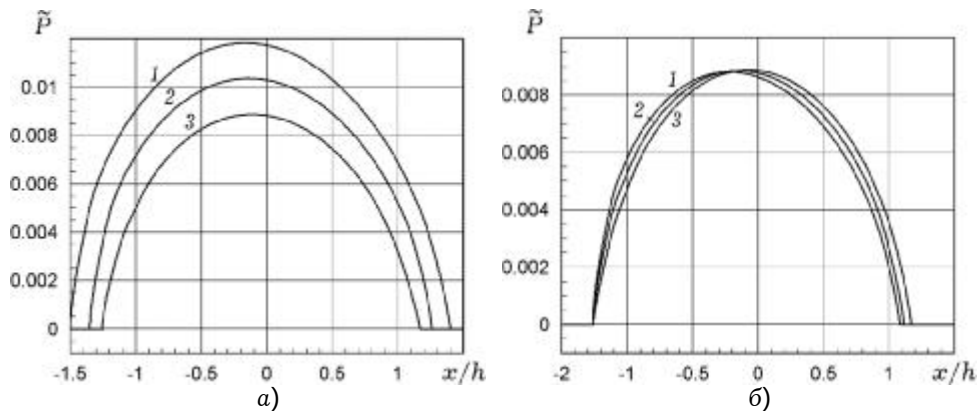


Рис. 6. Відносний контактний тиск при $A = 0.05$; $B = 0.25A$; $k = 0.3$;

(а) – $w_0 = -0.03$; -0.025 ; -0.02 ; (б) – $k = 0.6$; 0.4 ; 0.2 .

На основі аналізу результатів обчислень, наведених на рис. 4–6, можна зробити такі висновки: контактний тиск і розмір область контакту зростають зі збільшенням заглиблення; зі зростом коефіцієнта тертя максимальний тиск дещо зменшується. Для витягнутих в напрямку осі Ox штампів (при $A/B > 2$) зі зростом коефіцієнта тертя область контакту збільшується, в той час як за менших відношень півосей (при $A/B = 1$) – зменшується.

Висновки. Побудовано числовий алгоритм розв'язування фрикційної контактної задачі про взаємодію шару зі штампами складної форми, який ґрунтується на підході Сінйоріні, методі інтегральних рівнянь-нерівностей та зведенні до задачі квадратичного програмування.

Досліджено достовірність отриманих числово результатів. З метою тестування розраховано контактний тиск для півпростору та шару за різних значень зміщення штампа. Виявлено, що за малих його заглиблень контактні тиски в шарі і півпросторі практично збігаються. За більших вони у шарі вищі, ніж у півпросторі, при цьому розмір області контакту для шару також збільшується порівняно з такою ж для півпростору. Контактні тиски для гладкого штампа добре узгоджуються з отриманими іншим методом.

З використанням побудованого алгоритму розраховано контактні тиски для різних форм штампів за різних значень заглиблення та коефіцієнта тертя.

Таким чином, фрикційну контактну задачу зведено до задачі квадратичного програмування. Показано, що розроблений алгоритм є ефективним і дає змогу розв'язувати фрикційні контактні задачі про взаємодію шару зі штампами складної форми з контрольованою точністю.

1. Галанов Б. А. Метод граничных уравнений типа Гаммерштейна для контактных задач теории упругости в случае неизвестных областей контакта // Прикл. математика и механика. – 1985. – 49, № 5. – С. 827–835.
Те саме: Galanov B. A. The method of boundary equations of the Hammerstein-type for contact problems of the theory of elasticity when the regions of contact are not known // J. Appl. Math. Mech. – 1985. – 49, No. 5. – P. 634–640. – [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(85\)90084-X](https://doi.org/10.1016/0021-8928(85)90084-X).
2. Гриліцький Д. В. Термопружні контактні задачі в трибології. – Київ: ІЗМН, 1996. – 204 с.
3. Соляр О. Фрикційна взаємодія пружних тіл з областями контакту складної форми // Матеріали Конференції молодих учених «Підстригачівські читання – 2024» (27–29 травня 2024, Львів).
– <http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2024/abstracts/Solyar.pdf>.
4. Соляр Т. Я., Соляр О. І. Осесиметрична контактна задача для півпростору з незаданими ділянками взаємодії // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2022. – 65, № 3–4. – С. 178–187.
– <https://doi.org/10.15407/mppmf2022.65.3-4.178-187>.
Те саме: Solyar T. Y., Soliar O. I. Axisymmetric contact problem for a half space with nonspecified zones of interaction // J. Math. Sci. – 2025. – 287, No. 2. – P. 321–333. – <https://doi.org/10.1007/s10958-025-07593-8>.
5. Соляр Т. Я., Соляр О. І. Визначення напружень у товстих плитах при локалізованих навантаженнях // Механіка та матем. методи. – 2022. – 4, № 1. – С. 45–63. – <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2022-4-1-45-63>.
6. Александров В. М., Пожарский Д. А. Трёхмерные контактные задачи при учете трения и нелинейной шероховатости // Прикл. математика и механика. – 2004. – 68, № 3. – С. 516–530.
Те саме: Aleksandrov V. M., Pozharskii D. A. Three-dimensional contact problems taking friction and non-linear roughness into account // J. Appl. Math. Mech. – 2004. – 68, No. 3. – P. 463–472.
– [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(04\)00061-9](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(04)00061-9).
7. Биелажев М. М. Wytrzymałość materiałów. – Wydawnictwo MON, 1956. – 787 p.
8. Brebbia C. A., Telles J. C. F., Wrobel L. C. Boundary Element. Techniques: Theory and Applications in Engineering. – Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1984. – xiv+464 p.
9. Galin L. A. Contact Problems. – Springer, 2008. – 316 p.
10. Johnson K. L. Contact Mechanics. – Cambridge, UK: Cambridge University Press Publ., 1987. – 464 p.
11. Kalker J. J. Rolling contact phenomena: linear elasticity. – Vienna: Springer, 2000. – 84 p.
12. Kalker J. J. Variational principles of contact elastostatics // IMA J. Appl. Math. – 1977. – 20, No. 2. – P. 199–219.
– <https://doi.org/10.1093/imamat/20.2.199>.
13. Кравчук А. С. К теории контактных задач с учетом трения на поверхности соприкосновения // Прикл. математика и механика. – 1980. – 44, № 1. – С. 122–129.
Те саме: Kravchuk A. S. On the theory of contact problems taking account of friction on the contact surface // J. Appl. Math. Mech. – 1980. – 44, Is. 1. – P. 83–88.
– [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(80\)90178-1](https://doi.org/10.1016/0021-8928(80)90178-1).
14. Lions J. L. On the free surface problems: Methods of variational and quasivariational inequalities // In: Oden J. T. (ed.) Computational Mechanics. – Ser. Lecture Notes in Mathematics. – Vol. 461. – Berlin–Heidelberg: Springer, 1975. – P. 129–148. – <https://doi.org/10.1007/BFb0074152>.
15. Maksymovych O., Solyar T. Determination of non-axisymmetric stresses in the bodies of revolution based on regularized integral equations // Eur. J. Mech. A Solids. – 2021. – 87. – Art. 104218.

- <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104218>.
16. Paggi M., Bemporad A., Reinoso J. Computational methods for contact problems with roughness // In: Paggi M., Hills D. (eds) *Modeling and Simulation of Tribological Problems in Technology*. – Cham: Springer, 2020. – P. 131–178. – https://doi.org/10.1007/978-3-030-20377-1_4.
 17. Roda-Casanova V., Sanchez-Marin F. An adaptive mesh refinement approach for solving non-Hertzian elastic contact problems // *Meccanica*. – 2018. – 53, No 8. – P. 2013–2028. – <https://doi.org/10.1007/s11012-017-0806-y>.
 18. Signorini A. Questioni di elasticita non linearizzata e semilinearizzata // *Rend. Mat. Appl. Ser. V*. – 1959. – 18, No. 1-2. – P. 95–139.
 19. Wriggers P. *Computational Contact Mechanics*. – Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2006. – 518 p. – <https://doi.org/10.1007/978-3-540-32609-0>.

FRICIONAL CONTACT PROBLEM FOR A LAYER

A numerical algorithm has been developed for solving a frictional contact problem concerning the interaction of a layer with punches of complex shapes. The algorithm is based on the application of the integral equation method and reduction to a quadratic programming problem. The kernels of the integral equations are derived using the fundamental solution for a layer, represented in a compact analytical form. The contact problem with an unknown contact region is formulated in terms of Signorini-type integral equations-inequalities. By employing cubature formulas, the problem is discretized into a system of linear algebraic equations-inequalities, which is subsequently transformed into a quadratic programming problem. The efficiency and applicability of the developed algorithm are demonstrated through the analysis of frictional contact interactions between the layer and punches of various shapes.

Keywords: frictional interaction, contact pressure, friction, layer, stamp, contact area, method of integral equations, quadratic programming.