

ОПЕРАТОРНЕ ЧИСЛЕННЯ ВЕЙЛЯ В УЗАГАЛЬНЕНИХ АЛГЕБРАХ ПЕЛІ–ВІНЕРА

Побудовано операторне числення Вейля для генераторів обмежених C_0 -груп в узагальнених алгебрах Пелі–Вінера.

Ключові слова: операторне числення Вейля, добуток Мояла, алгебри Пелі–Вінера.

Вступ. Операторне числення Вейля дає можливість представляти оператори через функції на фазовому просторі, використовуючи методи перетворення Фур'є та символьного аналізу. Це забезпечує глибше розуміння структури і властивостей операторів. Одним із важливих понять у цьому численні є перетворення Вейля, яке встановлює відповідність між функціями на фазовому просторі (символами операторів) та самими операторами. Це перетворення є центральним у квантовій механіці, оскільки дозволяє побудову операторів з класичних фазових функцій, що важливо у квантуванні фізичних систем. Класична алгебра Пелі–Вінера — важливий інструмент для аналізу функцій експоненціального типу, які широко застосовують в обробці сигналів та гармонійному аналізі. Оскільки операторне числення Вейля тісно пов'язане з аналізом функцій у фазовому просторі, алгебра Пелі–Вінера та її узагальнення є природними засобами для роботи з відповідними функціональними просторами. Дослідженням у цьому напрямку присвячені праці [5], [8–10].

Нижче наведено попередні результати про розподіли експоненціального типу та узагальнені алгебри Пелі–Вінера. Розглянуто такі замкнені щільно визначені в банаховому просторі X оператори A, B , що iA та iB породжують обмежені C_0 -групи. Оператор $\phi(A, B)$ задано як перетворення Фур'є з експоненціальними множниками, що дає можливість представити функції в термінах цих операторів. Основний результат теореми 4 полягає в тому, що композиція операторів виду $\hat{\phi}(A, B)$ та $\hat{\psi}(A, B)$, де $\hat{\phi}$ і $\hat{\psi}$ — функції, визначені через перетворення Фур'є, еквівалентна застосуванню добутку Мояла до цих функцій. Отже, композиція операторів у численні Вейля пов'язана з добутком Мояла. Розглянуто проективний тензорний добуток просторів $X \hat{\otimes} L_1(\mathbb{R}^2)$, що дозволяє узагальнено працювати з функціями, які набувають значень у банаховому просторі. У теоремі 5 доведено, що дія оператора $\hat{f}(A, B)$ на функцію з $\hat{E}(X)$ є коректно визначеною та зберігає неперервність. Встановлено, що композиція операторів $\hat{f}(A, B) \circ \hat{g}(A, B)$ відповідає добутку Мояла розподілів, який є ключовою операцією в операторному численні Вейля, що підтверджує властивість гомоморфізму. Отже, такий оператор забезпечує коректне узагальнення операторного числення.

1. Попередні відомості і позначення. Розподіли експоненціального типу. Нехай $L_1(\mathbb{R}^2)$ — комплексний банаховий простір функцій $\phi(t)$, $t \in \mathbb{R}^2$, з нормою $\|\phi\|_{L_1} := \int_{\mathbb{R}^2} |\phi(t)| dt < \infty$. На просторі $L_1(\mathbb{R}^2)$ розглянемо ізометричну групу зсувів: $T_s = e^{-i(s_1 D_1 + s_2 D_2)} : \phi(t) \rightarrow \phi(t - s)$, $s \in \mathbb{R}^2$, де $D_1 = \frac{-i\partial}{\partial t_1}$, $D_2 = \frac{-i\partial}{\partial t_2}$.

✉ vlozynska@yahoo.com

Для довільного вектора $v = (v_1, v_2), v_1 > 0, v_2 > 0$ визначимо простір

$$E^v := \left\{ \varphi \in \bigcap_{k \in \mathbb{Z}_+^2} \text{dom}(D^k) : \|\varphi\|_{E^v} = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+^2} \frac{\|D^k \varphi\|_{L_1}}{v^k} < \infty \right\},$$

де $k = (k_1, k_2)$, $v^k = v_1^{k_1} \cdot v_2^{k_2}$, $D^k = D_1^{k_1} D_2^{k_2}$, $\text{dom}(D^k)$ – область визначення оператора D^k .

У класі цілих аналітичних функцій $\mathbb{C}^2 \ni t + i\tau \rightarrow \Phi(t + i\tau) \in \mathbb{C}$ розглянемо підпростір $M^v = M^v(\mathbb{C}^2)$ таких функцій Φ , що для кожного фіксованого вектора $\tau = (\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{R}^2$ відповідні функції $\mathbb{R}^2 \ni t \rightarrow \Phi(t + i\tau)$ належать простору $L_1(\mathbb{R}^2)$, а норма

$$\|\Phi\|_{M^v} = \sup_{\tau \in \mathbb{R}^2} \exp(-v_1 |\tau_1| - v_2 |\tau_2|) \int_{\mathbb{R}^2} |\Phi(t + i\tau)| dt$$

є скінченною. Відомо [2, 3], що простори M^v складаються з функцій експоненціального типу. Функції $\Phi(t + i\tau)$ з класу M^v , для яких кожна функція $\varphi(t) = \Phi(t + i0) \in L_1(\mathbb{R}^2)$, задовольняють на $\mathbb{R}^2$ нерівність Бернштейна ([2], III, 3.2.2) $\|D^k \varphi\|_{L_1} \leq v^k \|\varphi\|_{L_1}$.

Теорема 1 [1]. (i) Відображення $M^v \ni \Phi(t + i\tau) \rightarrow \varphi(t) = \Phi(t + i0) \in E^v$ є ізометрією нормованих просторів.

(ii) Вкладення $E^v \subset L_1(\mathbb{R}^2)$ є ізометричними.

(iii) Простори E^v є інваріантними відносно дії групи T_{-s} і звуження $T_{-s} : E^v \rightarrow E^v$ є ізометрією нормованих просторів.

(iiii) Простори E^v є банаховими.

Розглянемо об'єднання просторів з топологією індуктивної границі

$$E := \bigcup_v E^v = \lim_{\text{ind}} E^v$$

відносно неперервних вкладень $E^v \subset E^\mu$, де вектор $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ такий, що $v_1 \leq \mu_1$, $v_2 \leq \mu_2$. Локально-опуклий простір E називатимемо простором основних функцій.

Спряжений простір до E позначимо через E' і наділимо слабкою топологією. Двоїстість $\langle E', E \rangle$ визначає білінійна форма $\langle f | \varphi \rangle = \langle f_v | \varphi \rangle$, де v такий довільний вектор, що $\varphi \in E^v$ і $f_v := f|_{E^v}$. Функціонали $f \in E'$ називаємо розподілами експоненціального типу.

Для довільних $f \in E'$ та $\varphi \in E$ співвідношення $\langle D^k f | \varphi \rangle = (-1)^{|k|} \langle f | D^k \varphi \rangle$, ($k \in \mathbb{Z}_+^2$) коректно визначає операцію узагальненого диференціювання розподілів.

Згортку довільного розподілу $f \in E'$ та функції $\varphi \in E$ визначаємо співвідношенням $(f * \varphi)(t) := \langle f(s) | \varphi(t + s) \rangle = \langle f(s) | T_{-s} \varphi(t) \rangle = \langle f(s) | T_{-t} \varphi(s) \rangle$, де $f(s)$ позначає дію функціонала f по змінній s .

Нехай $L(E)$ – алгебра лінійних неперервних операторів на просторі E зі сильною операторною топологією.

Теорема 2. [1, 7]. Нехай $f, g \in E'$ та $\varphi \in E$. Простір E' є комутативною алгеброю відносно згортки, визначеної співвідношенням $(f * g) * \varphi := f * (g * \varphi)$. Відображення $E' \ni f \rightarrow K_f \in L(E)$, де $K_f \varphi := f * \varphi$, є алгебричним ізоморфізмом на комутант групи $T_{\mathbb{S}}$ в алгебрі $L(E)$.

Перетворення Фур'є та узагальнені алгебри Пелі–Вінера. Позначимо $\hat{E} = F(E)$, де F – перетворення Фур'є, що задане формулою

$$(F\varphi)(u, v) := \hat{\varphi}(u, v) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(ut_1+vt_2)} \varphi(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

для довільного $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Простір $\hat{E}$ наділимо топологією, для якої F є гомоморфізмом. Використовуючи ізометрію $E' \simeq M^v(\mathbb{C}^2)$ з теореми 1 та факт, що Фур'є-образи функцій експоненціального типу є скінченними [1], визначимо обернене перетворення:

$$F^{-1} : \hat{E} \ni \hat{\varphi}(u, v) \rightarrow \varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \iint e^{-i(t_1 u + t_2 v)} \hat{\varphi}(u, v) du dv \in E.$$

Двоїстість $\langle E', E \rangle$ визначає спряжене відображення до оберненого $(F^{-1})' : E' \ni f \rightarrow \hat{f} \in \hat{E}'$, де $\langle \hat{f} | \hat{\varphi} \rangle := 2\pi \langle f | \varphi \rangle$. Його образ $\hat{E}'$, що породжує нову двоїстість $\langle \hat{E}', \hat{E} \rangle$, наділяємо слабкою топологією, яка збігається з індуктивною відносно $(F^{-1})'$.

Теорема 3 [1, 7]. Для будь-яких $f, g \in E'$, $\varphi, \psi \in E$ перетворення Фур'є має властивості $\widehat{\varphi * \psi} = \hat{\varphi} \cdot \hat{\psi}$, $\widehat{f * \varphi} = \hat{f} \cdot \hat{\varphi}(-t)$, де $\langle \hat{f} \cdot \hat{\varphi}(-t) | \hat{\psi} \rangle = \langle \hat{f} | \hat{\varphi}(-t) \cdot \hat{\psi} \rangle$.

Простір $\hat{E}'$ є комутативною алгеброю (яку називаємо узагальненою алгеброю Пелі–Вінера) відносно множення, яке визначає співвідношення $\langle \hat{g} \cdot \hat{f} | \hat{\varphi} \rangle = \langle \hat{g} | \hat{f} \cdot \hat{\varphi} \rangle$. Крім того, виконується співвідношення $\widehat{g * f} = \hat{g} \cdot \hat{f}$.

2. Пари Вейля. Нехай $\{X, \|\cdot\|\}$ – комплексний банаховий простір, $L(X)$ – алгебра лінійних обмежених операторів на X з рівномірною нормою $\|\cdot\|_{L(X)}$. Нехай A і B – замкнуті та щільно визначені оператори, що діють на X . Припустимо, що кожен з операторів iA та iB генерує обмежену C_0 -групу на X . Позначимо ці групи як $(e^{iuA})_{u \in \mathbb{R}}$ і $(e^{ivB})_{v \in \mathbb{R}}$, відповідно. Оператор, породжений парою Вейля $e^{i(uA+vB)} \in L(X)$, у банаховому просторі X [9]

$$e^{i(uA+vB)} \varphi(t) = e^{iuv/2} e^{iuA} e^{ivB} \varphi(t) = e^{i(uA+vB)/2} \varphi(t+v)$$

для всіх $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^2)$.

Для $\varphi \in E$ визначимо:

$$\varphi(A, B) := \frac{1}{2\pi} \iint \hat{\varphi}(u, v) e^{i(uA+vB)} du dv,$$

де $\hat{\varphi}(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(t) e^{i(t_1 u + t_2 v)} dt$ – Фур'є-образ з квазікомпактним носієм, тобто

для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує така компактна множина $K_\varepsilon \subset \mathbb{R}^2$, що $\iint_{\mathbb{R}^2 \setminus K_\varepsilon} |\hat{\varphi}(u, v)| du dv < \varepsilon$.

Згідно зі співвідношенням Вейля $e^{i(uA+vB)} \circ e^{i(u'A+v'B)} = e^{i(u'v-uv')/2} e^{i(u+u')A+i(v+v')B}$ [9], отримуємо:

$$\varphi(A, B) \circ \psi(A, B) = (\varphi \# \psi)(A, B),$$

де добуток Мойла

$$(\varphi \# \psi)(t) = \frac{1}{\pi^2} \iiint \varphi(t_1 + u, t_2 + u') \psi(t_1 + v, t_2 + v') du dv du' dv'.$$

Теорема 4. Оператор

$$\widehat{\varphi}(A, B) := \iint e^{i(uA+vB)} \varphi(u, v) du dv$$

є обмеженим лінійним оператором у банаховому просторі X , тобто $\widehat{\varphi}(A, B) \in L(X)$. Тоді для будь-яких функцій $\varphi, \psi \in E$, для яких відповідні оператори $\widehat{\varphi}(A, B)$, $\widehat{\psi}(A, B)$ визначені, виконується рівність

$$\widehat{\varphi}(A, B) \circ \widehat{\psi}(A, B) = \widehat{(\varphi \# \psi)(A, B)}.$$

Доведення. Оскільки $\varphi \in E$ є гладкою і інтегрованою функцією, а операторнозначна функція $(u, v) \mapsto e^{i(uA+vB)}$ є обмежена і неперервна в сильній операторній топології, то $\widehat{\varphi}(A, B) \in L(X)$. Композицію операторів $\widehat{\varphi}(A, B)$ та $\widehat{\psi}(A, B)$, використовуючи співвідношення Вейля, записуємо так:

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(A, B) \circ \widehat{\psi}(A, B) &= \iint e^{i(uA+vB)} \varphi(u, v) du dv \circ \iint e^{i(u'A+v'B)} \psi(u', v') du' dv' = \\ &= \iint \iint e^{i(uA+vB)} \circ e^{i(u'A+v'B)} \varphi(u, v) \psi(u', v') du dv du' dv' = \\ &= \iint e^{i(u'v-uv')/2} e^{i(u+u')A+i(v+v')B} \varphi(u, v) \psi(u', v') du dv du' dv' = \\ &= \iint [e^{i(u'v-uv')/2} \varphi(u, v) \psi(u', v')] e^{i(u+u')A+i(v+v')B} du dv du' dv'. \end{aligned}$$

Виконаємо заміну змінних $s_1 = u + u'$, $s_2 = v + v'$:

$$\widehat{\varphi}(A, B) \circ \widehat{\psi}(A, B) = \iint e^{i(s_1 A + s_2 B)} \circ \left[\iint e^{i(u s_2 - v s_1)/2} \varphi(u, v) \psi(s_1 - u, s_2 - v) du dv \right] ds_1 ds_2.$$

Остання формула узгоджується з класичним визначенням добутку Мойла, оскільки внутрішній подвійний інтеграл (враховуючи, що відмінності у позначеннях і коефіцієнтах зумовлені вибором нормалізації та змінних інтегрування) задає вираз $(\varphi \# \psi)(s_1, s_2)$. Отже, отримуємо:

$$\widehat{\varphi}(A, B) \circ \widehat{\psi}(A, B) = \iint e^{i(s_1 A + s_2 B)} (\varphi \# \psi)(s_1, s_2) ds_1 ds_2.$$

Згідно з визначенням $\widehat{(\varphi \# \psi)(A, B)}$ маємо:

$$\widehat{(\varphi \# \psi)(A, B)} = \iint e^{i(s_1 A + s_2 B)} (\varphi \# \psi)(s_1, s_2) ds_1 ds_2.$$

Отже, $\widehat{\varphi}(A, B) \circ \widehat{\psi}(A, B) = \widehat{(\varphi \# \psi)(A, B)}$ ◇

3. Операторне числення Вейля. Нехай $X \tilde{\otimes} L_1(\mathbb{R}^2)$ – поповнення проективного тензорного добутку X і $L_1(\mathbb{R}^2)$. Як відомо ([4], III, 3.2.5), маємо ізометричне представлення $L_1(\mathbb{R}^2; X) \simeq X \tilde{\otimes} L_1(\mathbb{R}^2)$, де $L_1(\mathbb{R}^2; X)$ – банаховий простір усіх X -значних функцій $\mathbb{R}^2 \ni t \rightarrow x(t) \in X$ з нормою $\|x\|_{L_1(X)} := \int_{\mathbb{R}^2} \|x(t)\| dt$.

Використовуючи ізометричне вкладення $E^v \subset L_1(\mathbb{R}^2)$ для кожного вектора v , можемо визначити підпростір

$$E^v(\mathbb{R}^2; X) := X \tilde{\otimes} E^v \subset X \tilde{\otimes} L_1(\mathbb{R}^2).$$

Вкладення $E^v(\mathbb{R}^2; X) \subset E^\mu(\mathbb{R}^2; X)$, $(v_1 \leq \mu_1, v_2 \leq \mu_2)$ є неперервними, тому на об'єднанні всіх таких просторів можна задати структуру індуктивної границі:

$$E(\mathbb{R}^2; X) := \bigcup_v E^v(\mathbb{R}^2; X) = \lim_v \text{ind } E^v(\mathbb{R}^2; X) \subset X \tilde{\otimes} L_1(\mathbb{R}^2).$$

Згортку довільного розподілу $f \in E'$ та вектор-функції $x(t) \in E(\mathbb{R}^2; X)$ визначаємо зі співвідношення $(f * x)(t) := (I \otimes K_f)x(t)$, де I – одиничний оператор в X .

Справедливим є топологічний ізоморфізм

$$\lim_v \text{ind } E^v(\mathbb{R}^2; X) \simeq X \tilde{\otimes} \lim_v \text{ind } E^v = X \tilde{\otimes} E,$$

що є безпосереднім наслідком відомої властивості індуктивної границі та проективного тензорного добутку [6]. З цього твердження та відомого представлення Гротендіка ([4], III, § 6) випливає, що для кожної функції $x(t) \in E(\mathbb{R}^2; X)$ існує такий вектор v , що $x(t)$ належить простору $E^v(\mathbb{R}^2; X)$ і її можна подати у вигляді абсолютно збіжного ряду:

$$x(t) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \otimes \varphi_j(t), \text{ де } x_j \in X, \varphi_j \in E^v. \quad (1)$$

Використовуючи це зображення для довільного розподілу $f \in E'$ та вектор-функції $x(t) \in E(\mathbb{R}^2; X)$, отримуємо $(f * x)(t) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \otimes (f * \varphi_j)(t)$. Визначимо ізометрію, що зберігає топологічну структуру простору:

$$E(\mathbb{R}^2; X) \ni x(u, v) \mapsto \bar{x} \in \bar{E}(X) := \left\{ \bar{x} = \iint (e^{i(uA+vB)} \otimes I)x(u, v)dudv \right\}. \quad (2)$$

Теорема 5. Для довільного розподілу $f \in E'$ оператор $\hat{f}(A, B)$ задає формула

$$\hat{f}(A, B) : \bar{E}(X) \ni \bar{x} \mapsto \hat{f}(A, B)\bar{x} := \iint (e^{i(uA+vB)} \otimes K_f)x(u, v)dudv,$$

де K_f – оператор згортки. Оператор $\hat{f}(A, B)$ є неперервним гомоморфізмом у просторі $L(\bar{E}(X))$ і задовольняє рівність

$$\hat{f}(A, B) \circ \widehat{f \# g}(A, B) = \widehat{f \# g}(A, B),$$

де добуток $\widehat{f \# g}(A, B)$ задають за допомогою двоїстості $\langle \bar{E}' | \bar{E} \rangle$.

Доведення. Нехай $f, g \in E'$ і $x(u, v) \in E(\mathbb{R}^2; X)$. Використовуючи ізометрію (2), представимо дію оператора $\hat{f}(A, B)$ на $\bar{x}$:

$$\hat{f}(A, B)\bar{x} := \iint (e^{i(uA+vB)} \otimes K_f)x(u, v)dudv.$$

Оскільки $x(u, v) \in E(\mathbb{R}^2; X)$ можна розкласти за допомогою представлення (1), то, підставляючи це у визначення $\hat{f}(A, B)$, отримуємо:

$$\widehat{f}(A, B)\bar{x} := \sum_{j=1}^{\infty} x_j \otimes \iint (e^{i(uA+vB)} \otimes K_f) \varphi_j(u, v) du dv.$$

Оператор K_f є неперервним на E через властивості розподілів експоненціального типу і просторів основних функцій. Інтеграл, що визначає $\widehat{f}(A, B)$, абсолютно збігається, оскільки $x(u, v) \in E(\mathbb{R}^2; X)$, а $e^{i(uA+vB)}$ є обмеженим оператором для всіх $u, v \in \mathbb{R}^2$. Отже, $\widehat{f}(A, B)$ є неперервним на $\widehat{E}(X)$.

Щоб показати, що $\widehat{f}(A, B)$ є гомоморфізмом, обчислимо $\widehat{f}(A, B) \circ \widehat{g}(A, B)$. Використовуючи визначення $\widehat{f}(A, B)$, маємо:

$$\widehat{f}(A, B) \circ \widehat{g}(A, B)\bar{x} = \iint (e^{i(uA+vB)} \otimes K_f) \left[\iint (e^{i(u'A+v'B)} \otimes K_g) x(u', v') du' dv' \right] du dv.$$

Змінюючи порядок інтегрування та використовуючи властивість композиції $e^{i(uA+vB)}$, отримуємо:

$$\widehat{f}(A, B) \circ \widehat{g}(A, B)\bar{x} = \iint \left[\iint (e^{i(u+u')A+i(v+v')B} \otimes K_f K_g) du' dv' \right] x(u, v) du dv.$$

За визначенням $(f \# g)$ це дорівнює $\widehat{f \# g}(A, B)\bar{x}$. Отже, $\widehat{f}(A, B) \circ \widehat{g}(A, B) = \widehat{f \# g}(A, B)$, і $\widehat{f}(A, B)$ є неперервним гомоморфізмом в $L(\widehat{E}(X))$. $\diamond$

1. Лопушанський О. В., Лозинська В. Я. Аналітичні розподіли експоненціального типу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – 42, № 4. – С. 46–55.
2. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – Москва: Наука, 1969. – 480 с.
3. Радько Я. В. Векторы экспоненциального типа в операторном исчислении и дифференциальных уравнениях // Дифференц. уравнения. – 1985. – 21, № 9. – С. 1559–1569.
4. Шеффер Х. Топологические векторные пространства. – Москва: Мир, 1971. – 360 с.
5. Gross D. J., Hashimoto A., Itzhaki N. Observables of non-commutative gauge theories // Adv. Theor. Math. Phys. – 2000. – 4, No. 4. – P. 893–928.
– <https://doi.org/10.4310/atmp.2000.v4.n4.a4>.
6. Grothendieck A. Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires // Memoirs of the American Mathematical Society. – No. 16. – Providence: AMS, 1955. – 336 p.
– <https://doi.org/10.1090/memo/0016>.
7. Lozynska V. Ya. Exponential type distributions and a generalized functional calculus for generators of C_0 -groups // Carpathian Math. Publ. – 2011. – 3, No. 1. – P. 73–84.
8. Maillard J. M. On the twisted convolution product and the Weyl transformation of tempered distributions // J. Geom. Phys. – 1986. – 3, No. 2. – P. 231–261.
– [https://doi.org/10.1016/0393-0440\(86\)90021-5](https://doi.org/10.1016/0393-0440(86)90021-5).
9. van Neerven J., Portal P. The Weyl calculus for group generators satisfying the canonical commutation relations // J. Operat. Theory. – 2020. – 83, No. 2. – P. 253–298.
– <https://doi.org/10.7900/jot2018jun13.2250>.
10. Wightman A. S. The choice of test functions in quantum field theory / In: Mathematical Analysis and Applications. – Ser. Advances in Mathematics. Supplementary Studies. Volume 7B. – Academic Press, 1981. – P. 769–791.

WEYL OPERATOR CALCULUS IN GENERALIZED PALEY-WIENER ALGEBRAS

Weyl operator calculus for generators of bounded C_0 -groups in generalized Paley–Wiener algebras is constructed.

Keywords: Weyl operator calculus, Moyal product, Paley–Wiener algebras.