

## МЕТОДИ ПОБУДОВИ УЗАГАЛЬНЕНИХ РЕТРАКТІВ

*Розглянуто конструкції і функтори, що дають змогу будувати узагальнені ретракти, пов'язані з продовженнями відображень у топологічні групи.*

**Ключові слова:** вільна топологічна група,  $G$ -ретракт.

**Вступ.** Концепцію узагальнених ретрактів, пов'язаних з продовженнями неперервних відображень в об'єкти топологічної алгебри, взято зі статті [6]. У публікаціях [2] та [3] досліджували властивості узагальнених ретрактів, пов'язаних з топологічними групами, а також запропонували застосовувати узагальнені ретракти до розв'язання деяких задач теорії топологічних груп. Нижче встановлено конструкції і функтори, діючи якими на уже відомі пари тихоновських просторів та їхніх підпросторів, що є узагальненими ретрактами, можна отримувати нові приклади узагальнених ретрактів.

Нехай  $X$  – тихоновський простір. Через  $F(X)$  позначатимемо вільну топологічну групу простору  $X$  у сенсі Маркова, через  $A(X)$  – вільну абелеву топологічну групу простору  $X$  у сенсі Маркова, через  $L(X)$  – вільний локально опуклий простір над  $X$  (див. [6] та [8]).

**Означення 1.** Підпростір  $Y$  топологічного простору  $X$  називають  $G$ -ретрактом в  $X$ , якщо кожне неперервне відображення з топологічного простору  $Y$  у відокремлювану топологічну групу  $H$  неперервно продовжується на  $X$ .

**Означення 2.** Підпростір  $Y$  топологічного простору  $X$  називають  $G_A$ -ретрактом в  $X$ , якщо кожне неперервне відображення з топологічного простору  $Y$  у відокремлювану абелеву топологічну групу  $H$  неперервно продовжується на  $X$ .

**Означення 3.** Підпростір  $Y$  топологічного простору  $X$  називають  $L$ -ретрактом в  $X$ , якщо кожне неперервне відображення з топологічного простору  $Y$  у лінійний топологічний простір  $W$  неперервно продовжується на  $X$ .

Кожен топологічний простір  $X \in G$ -ретрактом вільної топологічної групи  $F(X)$ , але не кожен топологічний простір є ретрактом своєї вільної топологічної групи [10].

Безпосередньо з цих означень випливає, що кожен ретракт є  $G$ -ретрактом, кожен  $G$ -ретракт –  $G_A$ -ретрактом, кожен  $G_A$ -ретракт –  $L$ -ретрактом. Нагадаємо, що неперервне сюр'єктивне відображення  $p: X \rightarrow Y$  називають  $R$ -факторним, якщо неперервність довільної дійснозначної функції  $f: Y \rightarrow R$  рівносильна неперервності композиції  $f \circ p: X \rightarrow R$ . Якщо  $p: X \rightarrow Y$  – відображення топологічного простору  $X$  на множину  $Y$ , то існує єдина цілком регулярна топологія на  $Y$ , щодо якої відображення  $p$  є неперервним. Цю топологію називають  $R$ -факторною. Нагадаємо, що неперервне сюр'єктивне відображення  $p: X \rightarrow Y$  тихоновських просторів є  $R$ -факторним тоді і тільки тоді, коли гомоморфізм топологічних груп  $p^*: F(X) \rightarrow F(Y)$ ,

---

✉ pnazar@ukr.net

що його продовжує, є відкритим [13]. У монографії [11] можна знайти найповнішу на сьогодні збірку властивостей вільних топологічних груп, які використовуватимемо у цьому дослідженні.

### 1. Про спеціальні гомоморфізми та $G$ -ретракти

Нагадаємо основні твердження, які найчастіше використовуватимемо.

**Твердження 1** (див. [3]). *Нехай  $Y$  є підпростором тихоновського простору  $X$ . Тоді наступні умови є еквівалентними:*

- 1)  $Y \in G$ -ретрактом у  $X$ ;
- 2) існує такий неперервний гомоморфізм  $h : F(X) \rightarrow F(Y)$ , що  $h(y) = y$  для всіх  $y \in Y$ ;
- 3) існує таке неперервне відображення  $g : X \rightarrow F(Y)$ , що  $g(y) = y$  для всіх  $y \in Y$ .

Аналогічне твердження справедливе також для абелевих топологічних груп та локально опуклих просторів.

**Твердження 2.** *Якщо підпростір  $Y \in L$ -ретрактом тихоновського простору  $X$ , то  $Y$  є замкненим у  $X$ .*

**Доведення.** За твердженням 1 існує такий неперервний гомоморфізм  $h : L(X) \rightarrow L(Y)$ , що  $h(x) = x$  для всіх  $x \in Y$ . Нехай  $L_X(Y)$  – лінійна оболонка множини  $Y$  у  $L(X)$ . Тотожне відображення  $i : Y \rightarrow Y$  можемо продовжити до неперервного лінійного відображення  $w : L(Y) \rightarrow L_X(Y)$ . Тоді композиція  $w \circ h : L(X) \rightarrow L_X(Y)$  є неперервним відображенням, причому для всіх  $y \in Y$  маємо, що  $w \circ h(y) = w(y) = i(y) = y$ . Звідси, зокрема, випливає, що  $w \circ h(A) = A$  для всіх  $A \in L_X(Y)$ . Тобто підпростір  $L_X(Y)$  є ретрактом тихоновського простору  $L(X)$ , а отже, є замкненим у цьому просторі. Таким чином, підпростір  $Y = X \cap L_X(Y)$  є замкненим у  $X$ .  $\diamond$

**Твердження 3.** *Нехай  $\{X_s : s \in S\}$  – сім'я тихоновських просторів,  $Y_s \subseteq X_s$  для кожного  $s \in S$ . Тоді підпростір  $\bigoplus_{s \in S} Y_s \in G$ -ретрактом ( $G_A$ -ретрактом,  $L$ -ретрактом) простору  $\bigoplus_{s \in S} X_s$  тоді і тільки тоді, коли підпростір  $Y_s \in G$ -ретрактом ( $G_A$ -ретрактом,  $L$ -ретрактом) простору  $X_s$  для кожного  $s \in S$ .*

**Доведення.** Необхідність. Нехай підпростір  $\bigoplus_{s \in S} Y_s \in G$ -ретрактом простору  $\bigoplus_{s \in S} X_s$ . Нехай  $f_j = Y_j \rightarrow G$  – неперервне відображення з топологічного простору  $Y_j$  у топологічну групу  $G$ . Розглянемо неперервне відображення  $f : \bigoplus_{s \in S} Y_s \rightarrow G$ , означене як  $f|_{Y_j} = f_j$  і  $f|_{Y_s} = e$  для всіх  $s \in S \setminus \{j\}$ . За означенням  $G$ -ретракту відображення  $f$  продовжується до такого неперервного відображення  $h : \bigoplus_{s \in S} X_s \rightarrow G$ , що  $h|_{\bigoplus_{s \in S} Y_s} = f$ . Нехай  $h_j = h_{X_j} : X_j \rightarrow G$  – звуження відображення  $h$ . Тоді для кожного  $y \in Y_s$  маємо, що  $h_j(y) = h(y) = f(y) = f_j(y)$ . Тобто відображення  $h_j$  є продовженням відображення  $f_j$ .

**Достатність.** Оскільки підпростір  $Y_s \in G$ -ретрактом простору  $X_s$  для кожного  $s \in S$ , то існує таке неперервне відображення  $g_s : X_s \rightarrow F(Y_s)$ , що  $g_s(y) = y$  для всіх  $y \in Y_s$ . Розглянемо неперервне відображення  $g : \bigoplus_{s \in S} X_s \rightarrow \bigoplus_{s \in S} Y_s$ , поклавши  $g(y) = g_s(y) \in F(Y_s) \subseteq F\left(\bigoplus_{s \in S} Y_s\right)$ . Оскільки  $g(y) = y$  для всіх  $y \in \bigoplus_{s \in S} Y_s$ , то підпростір  $\bigoplus_{s \in S} Y_s \in G$ -ретрактом простору  $\bigoplus_{s \in S} X_s$ .

Аналогічно доводимо це твердження для  $G_A$ - та  $L$ -ретрактів.  $\diamond$

**Твердження 4.** (див. [3]) Якщо підпростір  $Y \in G$ -ретрактом тихоновського простору  $X$ , то підгрупа вільної топологічної групи  $F(X)$ , алгебрично породжена множиною твірних  $Y$ , є топологічно ізоморфною вільній топологічній групі  $F(Y)$ .

**Твердження 5.** Нехай підпростір  $Y \in G$ -ретрактом тихоновського простору  $X$ ,  $h : F(X) \rightarrow F(Y)$  – такий гомоморфізм, що  $h(y) = y$  для всіх  $y \in Y$ . Тоді гомоморфізм  $h$  є відкритим, а топологічна група  $F(Y)$  є фактор-групою топологічної групи  $F(X)$ .

**Доведення.** З того, що підпростір  $Y \in G$ -ретрактом простору  $X$ , випливає, що підгрупа топологічної групи  $F(X)$ , породжена множиною твірних  $Y$ , є топологічно ізоморфною вільній топологічній групі  $F(Y)$ , тому звуження гомоморфізму  $h$  на цю підгрупу є топологічним ізоморфізмом. За лемою 2.7 з праці [12] отримаємо, що гомоморфізм  $h$  є відкритим, а отже, топологічна група  $F(Y)$  є фактор-групою топологічної групи  $F(X)$ .  $\diamond$

**Теорема.** Нехай  $f : X_1 \rightarrow X_2$  –  $R$ -факторне відображення тихоновських просторів,  $Y_1 \subseteq X_1$ ,  $Y_2 = f(X_2)$ ,  $g = f|_{Y_1}$ . Нехай також  $f^* : F(X_1) \rightarrow F(X_2)$  та  $g^* : F(Y_1) \rightarrow F(Y_2)$  – гомоморфні продовження відображень  $f$  та  $g$ . Якщо існує такий гомоморфізм  $h : F(X_1) \rightarrow F(Y_1)$ , що  $h(x) = x$  для всіх  $x \in Y_1$  і  $h(\ker f^*) = \ker g^*$ , то існує такий гомоморфізм  $w : F(X_2) \rightarrow F(Y_2)$ , що  $w(z) = z$  для всіх  $z \in Y_2$  і  $w \circ f^* = g^* \circ h$ . Тобто підпростір  $Y_2 \in G$ -ретрактом простору  $X_2$ , гомоморфізм  $g^*$  є топологічно ізоморфним гомоморфізму  $f^*|_{\langle Y_1 \rangle}$ . Крім того, відображення  $g$  буде  $R$ -факторним.

**Доведення.** Означимо гомоморфізм  $h : F(X_2) \rightarrow F(Y_2)$ , покладаючи  $w(a) = g^*\left(h\left(f^*\right)^{-1}(a)\right)$  для кожного  $a \in F(X_2)$ . З того, що  $h(\ker f^*) = \ker g^*$  випливає, що відображення  $w$  є коректно означеним і таким гомоморфізмом, що  $w \circ f^* = g^* \circ h$ :

$$\begin{array}{ccc} F(X_1) & \xrightarrow{h} & F(Y_1) \\ f^* \downarrow & & \downarrow g^* \\ F(X_2) & \xrightarrow{w} & F(Y_2) \end{array}.$$

Як встановлено раніше [13], продовження  $R$ -факторного відображення  $f : X_1 \rightarrow X_2$  до гомоморфізму  $f^* : F(X_1) \rightarrow F(X_2)$  є відкритим відображенням.

З відкритості гомоморфізму  $f^*$  і неперервності композиції  $w \circ f^* = g^* \circ h$  випливає неперервність відображення  $w$ . Нехай тепер  $z \in Y_2 \subseteq X_2$ ,  $a \in (f^*)^{-1}(z) \cap Y_1$ . Тоді  $w(z) = g^* \circ h(a) = g^*(a) = f(a) = z$ .

За твердженням 1 підпростір  $Y_2 \in G$ -ретрактом простору  $X_2$ . За твердженням 5 гомоморфізм  $w$  буде відкритим. З відкритості гомоморфізму  $w \circ f^* = g^* \circ h$  і неперервності відображення  $h$  випливає відкритість відображення  $g^*$ . Оскільки гомоморфізм  $g^*$  є відкритим, то відображення  $g \in R$ -факторним. Оскільки підпростір  $Y_i \in G$ -ретрактом простору  $X_i$  ( $i = 1, 2$ ), то підгрупа в  $F(X_i)$ , породжена множиною  $Y_i$ , є топологічно ізоморфною  $F(Y_i)$ , а тому гомоморфізм  $f^*|_{Y_1}$  є топологічно ізоморфним гомоморфізму  $g$ .  $\diamond$

**Наслідок 1.** Нехай  $f: X_1 \rightarrow X_2$  –  $R$ -факторне відображення тихонівських просторів,  $Y_1 \subseteq X_1$ ,  $Y_2 = f(X_2)$ .  $g = f|_{Y_1}$ ,  $g^*: F(Y_1) \rightarrow F(Y_2)$  – гомоморфне продовження відображення  $g$ . Якщо існує таке неперервне відображення  $t: X_1 \rightarrow F(Y_1)$ , що  $h(x) = x$  для всіх  $x \in Y$  і  $g^* \circ t(x_1) = g^* \circ t(x_2)$  для всіх таких  $x_1, x_2 \in X_1$ , що  $f(x_1) = f(x_2)$ , то існує таке неперервне відображення  $s: X_2 \rightarrow F(Y_2)$ , що  $s(z) = z$  для всіх  $z \in Y_2$  і  $s \circ f = g^* \circ t$ . Тобто підпростір  $Y_2 \in G$ -ретрактом простору  $X_2$ , гомоморфізм  $g^*$  є топологічно ізоморфним гомоморфізму  $f^*|_{Y_1}$ . Крім того, відображення  $g$  буде  $R$ -факторним.

Доведення. Нехай  $h: F(X_1) \rightarrow F(X_2)$  – гомоморфне продовження відображення  $t$ ,  $f^*: F(X_1) \rightarrow F(X_2)$  – гомоморфне продовження відображення  $f$ . Тоді діаграма

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{t} & F(Y_1) \\ f \downarrow & & \downarrow g^* \\ X_2 & \xrightarrow{s} & F(Y_2) \end{array}$$

є комутативною.

Оскільки  $\ker f^*$  – мінімальна нормальна підгрупа, яку породжують всі можливі елементи вигляду  $x_1 x_2^{-1}$ , де  $f(x_1) = f(x_2)$ , то достатньо показати, що  $h(x_1 x_2^{-1}) \in \ker g^*$  для всіх таких  $x_1, x_2 \in X$ , що  $f(x_1) = f(x_2)$ . Дійсно  $g^*(h(x_1)h(x_2)^{-1}) = g^*(t(x_1)t(x_2)^{-1}) = (g^* \circ t)(x_1) \cdot ((g^* \circ t)(x_2))^{-1} \in \ker g^*$ .

З теореми 1 отримаємо, що існує такий гомоморфізм  $w: F(X_2) \rightarrow F(Y_2)$ , що  $w(z) = z$  для всіх  $z \in Y_2$  і  $w \circ f^* = g^* \circ h$ . Тобто підпростір  $Y_2 \in G$ -ретрактом простору  $X_2$ , гомоморфізм  $g^*$  є топологічно ізоморфним гомоморфізму  $f^*|_{Y_1}$ , а відображення  $g$  буде  $R$ -факторним. Покладемо  $s = w|_{Y_1}$ . Тоді для всіх  $z \in Y_2$  маємо, що  $s(z) = w(z) = z$ . Нехай  $x \in X_1$ . Тоді  $s \circ f(x) = w \circ f^*(x) = g^* \circ h(x) = g^* \circ t(x)$ .  $\diamond$

Твердження, аналогічні до теореми та наслідку 1, будуть справедливими також і для  $G_A$  - та  $L$  -ретрактів.

Скажемо, що гомоморфізм  $i : F(X) \rightarrow F(Y)$  є *спеціальним*, якщо композиція  $e_Y^* \circ i$  є постійним відображенням на  $X$ , де  $e_Y^* : F(Y) \rightarrow R$  – гомоморфізм, що продовжує функцію  $e_Y : Y \rightarrow R$ , яка тотожно рівна 1 на  $Y$ . Аналогічно означимо поняття спеціального гомоморфізму вільних абелевих топологічних груп та вільних локально опуклих просторів.

**Твердження 6.** Нехай  $X$  – тихоновський простір,  $Y$  – його  $G$  -ретракт. Тоді існує ретракція  $f^* : F(X) \rightarrow F(Y)$ , яка є спеціальним гомоморфізмом.

**Доведення.** Нехай  $h : X \rightarrow F(Y)$  – таке неперервне відображення, що  $h(y) = y$  для всіх  $y \in Y$ . Нехай  $e_Y : Y \rightarrow Z$  – функція, тотожно рівна 1 на  $Y$ ,  $e_Y^* : F(Y) \rightarrow Z$  – її гомоморфне продовження. Розглянемо композицію  $g = e_Y^* \circ h$ . Позначимо  $X_n = g^{-1}(n)$ . Топологічний простір  $X$  є дискретною сумою своїх підпросторів  $X_n$ . Позначимо  $h_n = h|_{X_n}$ . Для кожного  $n \in Z$  означимо відображення  $f_n(x)$ , поклавши  $f_n(x) = h_n(x) \times a^{1-n}$ , де  $a \in Y$ . Розглянемо відображення  $f : X \rightarrow F(Y)$ , означене як  $f(x) = f_n(x)$ , якщо  $x \in X_n$ . Продовжимо відображення  $f$  до гомоморфізму вільних топологічних груп  $f^* : F(X) \rightarrow F(Y)$ . Покажемо, що  $f^*$  – спеціальний гомоморфізм. Нехай  $x \in X_n$ . Тоді

$$e_Y^* \circ f(x) = e_Y^* \circ f_n(x) = e_Y^*(h_n(x) \times a^{1-n}) = e_Y^*(h_n(x)) + (1-n)e_Y^*(a) = n + 1 - n = 1. \diamond$$

**Твердження 7.** Нехай підпростір  $Y \in G_A$  -ретрактом тихоновського простору  $X$ . Тоді існує такий спеціальний неперервний гомоморфізм  $h : A(X) \rightarrow A(Y)$ , що  $h(x) = x$  для всіх  $x \in Y$ .

**Твердження 8.** Нехай підпростір  $Y \in L$  -ретрактом тихоновського простору  $X$ . Тоді існує такий спеціальний лінійний неперервний гомоморфізм  $h : L(X) \rightarrow L(Y)$ , що  $h(x) = x$  для всіх  $x \in Y$ .

**Доведення.** Нехай  $e : Y \rightarrow R$  – відображення, тотожно рівне 1 на  $Y$ ,  $\varphi : L(Y) \rightarrow R$  – продовження відображення  $e$  до лінійного відображення. Якщо підпростір  $Y \in L$  -ретрактом тихоновського простору  $X$ , то існує такий неперервний гомоморфізм  $g : L(X) \rightarrow L(Y)$ , що  $g(x) = x$  для всіх  $x \in Y$ . Тоді відображення  $h(x) = g(x) + (1 - \varphi \circ g(x))y_0$ , де  $y_0 \in Y$  є неперервним. Таким чином,

$$\varphi \circ h(x) = \varphi \circ g(x) + (1 - \varphi \circ g(x))\varphi(y_0) = \varphi \circ g(x) + (1 - \varphi \circ g(x)) \cdot 1 = 1.$$

Тобто гомоморфізм  $h$  є спеціальним. Крім того, якщо  $y \in Y$ , то  $h(y) = g(y) + (1 - \varphi \circ g(y))y_0 = g(y) + (1 - 1)y_0 = g(y) = y$ .  $\diamond$

**Твердження 9.** Нехай підпростір  $Y \in G$  -ретрактом ( $G_A$  -,  $L$  -ретрактом) тихоновського простору  $X$ ,  $Z$  – такий тихоновський простір, що  $Z$  є локально компактним, або простір  $Y \times Z$  є  $k$ -простором. Тоді підпростір  $Y \times Z \in G$  -ретрактом ( $G_A$  -ретрактом,  $L$  -ретрактом) топологічного простору  $X \times Z$ .

Доведення. Нехай підпростір  $Y$  є  $G$ -ретрактом топологічного простору  $X$ . За твердженням 1 існує таке неперервне відображення  $g: X \rightarrow F(Y)$ , що  $g(y) = y$  для всіх  $y \in Y$ . Розглянемо відображення  $g_Z: X \times Z \rightarrow F(Y \times Z)$ , поклавши  $g(x, z) = (y_1, z)^{e_1} (y_2, z)^{e_2} \cdots (y_n, z)^{e_n}$ , якщо  $g(y) = y_1^{e_1} y_2^{e_2} \cdots y_n^{e_n}$ . Якщо  $Z$  є локально компактним простором або простір  $Y \times Z$  є  $k$ -простором, то відображення  $g_Z$  є неперервним (див. [1]). Зауважимо, що  $g_Z(y, z) = (y, z)$  для всіх  $y \in Y$ ,  $z \in Z$ . Тобто за твердженням 1 підпростір  $Y \times Z$  є  $G$ -ретрактом топологічного простору  $X \times Z$ .

Аналогічно доведемо це твердження для абелевих топологічних груп та локально опуклих просторів. Зауважимо, що якщо гомоморфізм, який продовжує відображення  $g$ , є спеціальним, то гомоморфізм, який продовжує відображення  $g_Z$ , буде також спеціальним.  $\diamond$

## 2. Конструкції і функтори, що зберігають властивість бути узагальненим ретрактом

Нехай  $\{X_s\}_{s \in S}$  – сім'я просторів з відміченими точками  $x_s \in X_s$ . Тоді фактор-простір  $\bigvee_{s \in S} (X_s, x_s) = \bigoplus_{s \in S} X_s / \left( \bigoplus_{s \in S} \{x_s\} \right)$  називатимемо *букетом* сім'ї  $\{(X_s, x_s)\}_{s \in S}$ . Нескладно пересвідчитись, що букет сім'ї тихоновських просторів буде знову тихоновським простором.

**Твердження 10.** Нехай підпростір  $Y_s$  є  $G$ -ретрактом ( $G_A$ -,  $L$ -ретрактом) тихоновського простору  $X_s$  для кожного  $s \in S$ ,  $a_s \in Y_s$  – виділені точки. Тоді підпростір  $\bigvee_{s \in S} (Y_s, a_s)'$  з топологією, індукованою з простору  $\bigvee_{s \in S} (X_s, a_s)$ , є  $G$ -ретрактом ( $G_A$ -ретрактом,  $L$ -ретрактом) тихоновського простору  $\bigvee_{s \in S} (X_s, a_s)$  і є гомеоморфним простору  $\bigvee_{s \in S} (Y_s, a_s)$ .

Доведення. Нехай підпростір  $Y_s$  є  $G$ -ретрактом тихоновського простору  $X_s$ . Тоді, за твердженням 1 для кожного  $s \in S$  існує таке неперервне відображення  $i_s: X_s \rightarrow F(Y_s)$ , що  $i_s(y_s) = y_s$  для всіх  $y_s \in Y_s$ . Означимо відображення  $i: \bigoplus_{s \in S} X_s \rightarrow F\left(\bigoplus_{s \in S} Y_s\right)$ , поклавши  $i(x) = i_s(x) \in F(Y_s) \subseteq F\left(\bigoplus_{s \in S} Y_s\right)$ , якщо  $x \in X_s$ . Нехай  $p_X = \bigoplus_{s \in S} X_s \rightarrow \bigvee_{s \in S} (X_s, a_s)$  – фактор-відображення,  $p_Y = p_X|_Y = \bigoplus_{s \in S} Y_s \rightarrow \bigvee_{s \in S} (Y_s, a_s)'$  – його звуження на  $Y$ ,  $p_X^*$ ,  $p_Y^*$  – гомоморфні продовження відображень  $p_X$  та  $p_Y$ , відповідно. Тоді діаграма

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{s \in S} X_s & \xrightarrow{t} & F\left(\bigoplus_{s \in S} Y_s\right) \\ p_X \downarrow & & \downarrow g^* \\ \bigvee_{s \in S} (X_s, a_s) & \xrightarrow{s} & F\left(\bigvee_{s \in S} (X_s, a_s)'\right) \end{array}$$

є комутативною.

Нехай  $p(x) = p(y)$  і  $x \neq y$ . Тоді  $x = a_s$ ,  $y = a_t$  для деяких  $s, t \in S$ . Таким чином,  $p_Y^* \circ i(a_s) = p_Y(a_s) = p_Y^* \circ i(a_t) = p_Y^* \circ i(a_t)$ .

Звідси, за наслідком 1, матимемо, що підпростір  $\bigvee_{s \in S} (Y_s, a_s)'$  є  $G$ -ретрактом простору  $\bigvee_{s \in S} (X_s, a_s)$ . Підпростір  $\bigvee_{s \in S} (Y_s, a_s)'$ , будучи  $G$ -ретрактом простору  $\bigvee_{s \in S} (X_s, a_s)$ , є замкненим у просторі  $\bigvee_{s \in S} (X_s, a_s)$ . Оскільки  $\rho_X^{-1} \left( \rho_X \left( \bigoplus_{s \in S} Y_s \right) \right) = \bigoplus_{s \in S} Y_s$ , то відображення  $\rho_Y$  є факторним як звуження факторного відображення  $\rho_X$  на прообраз замкненої множини  $\bigvee_{s \in S} (Y_s, a_s)'$  (див. твердження 2.4.15 з [9]). Таким чином, простір  $\bigvee_{s \in S} (Y_s, a_s)'$  є гомеоморфним простору  $\bigvee_{s \in S} (Y_s, a_s)$ .

Доведення цього твердження для абелевих топологічних груп та лінійних просторів аналогічне.  $\diamond$

**Твердження 11.** *Нехай підпростір  $Y$  є  $G$ -ретрактом  $(G_A, L$ -ретрактом) тихоновського простору  $X$  і топологічний простір  $X^{n-1} \times Y$  є  $k$ -простором. Тоді підпростір  $Y^n$  є  $G$ -ретрактом  $(G_A, L$ -ретрактом) тихоновського простору  $X^n$ .*

Для доведення цього твердження потрібна така очевидна лема

**Лема.** *Нехай підпростір  $Y_1$  є  $G$ -ретрактом  $(G_A, L$ -ретрактом) простору  $Y_2$ , підпростір  $Y_2$  є  $G$ -ретрактом  $(G_A, L$ -ретрактом) простору  $Y_3, \dots$ , підпростір  $Y_{n-1}$  є  $G$ -ретрактом  $(G_A, L$ -ретрактом) простору  $Y_n$ . Тоді підпростір  $Y_1$  є  $G$ -ретрактом  $(G_A, L$ -ретрактом) простору  $Y_n$ .*

Доведення. З того, що  $X^{n-1} \times Y$  є  $k$ -простором, випливає, що  $X^m \times Y^{n-m}$  є  $k$ -простором для всіх  $m = 0, \dots, n-1$ . Тоді за твердженням 9 підпростір  $Y \times (X^m \times Y^{n-m-1})$  є  $G$ -ретрактом простору  $X \times (X^m \times Y^{n-m-1})$  для всіх  $m = 0, \dots, n-1$ . Тому за лемою підпростір  $Y^n$  є  $G$ -ретрактом простору  $X^n$ . Таким чином, за кожним таким неперервним (спеціальним) гомоморфізмом  $h: F(X) \rightarrow F(Y)$ , що  $h(x) = x$  для всіх  $x \in Y$ , можемо побудувати такий (спеціальний) неперервний гомоморфізм  $h_n: F(X^n) \rightarrow F(Y^n)$ , що  $h(z) = z$  для всіх  $z \in Y^n$ .  $\diamond$

Позначимо через  $S(X)$  вільну топологічну напівгрупу простору  $X$ .

Оскільки  $S(X) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} X^n$  [8], то функтор вільної топологічної напівгрупа тихоновського простору є тихоновським простором.

**Твердження 12.** *Нехай підпростір  $Y$  є  $G$ -ретрактом  $(G_A, L$ -ретрактом) тихоновського простору  $X$  і топологічний простір  $S(X)$  є  $k$ -простором. Тоді підпростір  $S(Y)$  є  $G$ -ретрактом  $(G_A, L$ -ретрактом) тихоновського простору  $S(X)$ .*

Доведення. Оскільки  $S(X) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} X^n$  і простір  $S(X)$  є  $k$ -простором,

то простір  $X^n$  для довільного  $n \in N$  є  $k$ -простором, а отже, і замкнений підпростір  $X^m \times Y^{n-m}$  простору  $X^n$  буде  $k$ -простором для таких  $m$ , що  $0 \leq m \leq n$ . Так як підпростір  $Y \in G$ -ретрактом простору  $X$ , то за твердженням 11 маємо, що підпростір  $Y^n \in G$ -ретрактом простору  $X^n$  для всіх натуральних  $n$ . Отже, за твердженням 3 підпростір  $S(Y) \in G$ -ретрактом простору  $S(X)$ . Зауважимо, що для кожного натурального  $n$  топологія на  $Y^n$ , індукована з простору  $X^n$ , збігається з топологією тихоновського добутку  $Y^n$ . А тому піднапівгрупа в  $S(X)$ , породжена множиною твірних  $Y$ , буде природно топологічно ізоморфною вільній топологічній напівгрупі  $S(Y)$ .  $\diamond$

Нехай  $(X, x_0)$  і  $(Y, y_0)$  – топологічні простори з відміченими точками. Фактор-простір  $(X \times Y) / ((X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y))$  називають *приведеним добутком* просторів  $X$  і  $Y$  і позначають  $(X, x_0) \vee (Y, y_0)$ . У наступному твердженні на приведеному добутку замість факторної розглядатимемо  $R$ -факторну топологію. Оскільки підпростір  $(X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y)$  замкнений у  $X \times Y$ , то за твердженням 1.3 з праці [13], використовуючи  $R$ -факторні топології, можна у роботі з приведеними добутками тихоновських просторів не виходити за межі тихоновських просторів.

**Твердження 13.** Нехай  $X, Z$  – тихоновські простори,  $Y \subseteq Z$ ,  $y_0 \in Y$ ,  $z_0 \in Z$ , підпростір  $Y \in G$ -ретрактом ( $G_A$ -,  $L$ -ретрактом) простору  $X$ , простір  $Z$  є локально компактним, або простір  $X \times Z$  є  $k$ -простором. Тоді підпростір  $(Y, y_0) \wedge (Z, z_0)'$  з топологією, індукованою з простору  $(X, y_0) \wedge (Z, z_0)$ , є  $G$ -ретрактом ( $G_A$ -,  $L$ -ретрактом) простору  $(X, y_0) \wedge (Z, z_0)$  і гомеоморфним простору  $(Y, y_0) \wedge (Z, z_0)$ .

Доведення. Нехай  $h: X \rightarrow F(Y)$  – таке неперервне відображення, що  $h(x) = x$  для всіх  $x \in Y$ , а гомоморфне продовження  $h^*: F(X) \rightarrow F(Y)$  – спеціальний гомоморфізм. Нехай  $p_X: X \times Z \rightarrow (X, x_0) \wedge (Z, z_0)$  – факторне відображення,  $p_Y = p_X|_{Y \times Z}$  – звуження відображення  $p_X$ ,  $p_Y^*: F(Y \times Z) \rightarrow F((Y, y_0) \wedge (Z, z_0))'$  – гомоморфне продовження відображення  $p_Y$ ,  $h_Z: X \times Z \rightarrow F(Y \times Z)$  – гомоморфізм, побудований за гомоморфізмом  $h$  методом, описаним у твердженні 9. Тоді діаграма

$$\begin{array}{ccc} X \times Z & \xrightarrow{h_Z} & F(Y \times Z) \\ p_X \downarrow & & \downarrow p_Y^* \\ (X, y_0) \wedge (Z, z_0) & \xrightarrow{w} & F((Y, y_0) \wedge (Z, z_0))' \end{array}$$

є комутативною.

Нехай  $p_X(x_1, z_1) = p_X(x_2, z_2)$  і  $(x_1, z_1) \neq (x_2, z_2)$ . Тоді елементи  $(x_1, z_1)$  і  $(x_2, z_2)$  можуть мати вигляд  $(x, z_0)$  або  $(y_0, z)$ . Покладемо  $w_0 = p_Y^*(y_0, z_0) = p_Y(Y \times \{z_0\})$ . Нехай маємо деякий елемент  $v = (x, z_0)$ , де

$$h(x) = y_1^{\varepsilon_1} y_2^{\varepsilon_2} \dots y_n^{\varepsilon_n}, \quad \sum_{i=1}^n \varepsilon_i = 1. \quad \text{Тоді } h_Z(x, z_0) = (y_1, z_0)^{\varepsilon_1} (y_2, z_0)^{\varepsilon_2} \dots (y_n, z_0)^{\varepsilon_n} \text{ і}$$



$$p_Y^* \circ h_Z(X, Z_0) = p_Y(Y_1, Z_0)^{\varepsilon_1} p_Y(Y_2, Z_0)^{\varepsilon_2} \dots p_Y(Y_n, Z_0)^{\varepsilon_n} = w_0^{\varepsilon_1} w_0^{\varepsilon_2} \dots w_0^{\varepsilon_n} = w_0^{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i} = w_0.$$

Нехай  $v = (y_0, z)$ . Тоді  $h(y_0) = y_0$ , а тому  $h_Z(y_0, z) = (y_0, z)$  і  $p_Y^*(v) = p(y_0, z) = w_0$ . Таким чином,  $p_Y^* \circ h_Z(x_1, z_1) = p_Y^* \circ h_Z(x_2, z_2) = w_0$ , а отже, за наслідком 1 підпростір  $(Y, y_0) \wedge (Z, z_0)'$  є  $G$ -ретрактом простору  $(X, y_0) \wedge (Z, z_0)$ . Покажемо, що відображення  $p_Y$  буде  $R$ -факторним. Нехай  $f : (Y, y_0) \wedge (Z, z_0)' \rightarrow R$  – така функція, що композиція  $f_1 = f \circ p_Y : Y \times Z \rightarrow R$  є неперервною. За твердженням 9 підпростір  $Y \times Z$  є  $G$ -ретрактом простору  $X \times Z$ , тому функція  $f_1$  допускає неперервне продовження  $f_2$  на  $X \times Z$ . Розглянемо неперервну функцію  $f_3 : X \times Z \rightarrow R$ , означену як  $f_3(x, z) = f_2(y_0, z) - f_2(x, z_0) + f_2(x, z)$ . Нехай  $y \in Y$ . Тоді

$$f_3(y, z) = f_2(y_0, z) - f_2(y, z_0) + f_2(y, z) = f_1(y_0, z) - f_1(y, z_0) + f_1(y, z).$$

Оскільки  $p_Y|_{(Y \times \{z_0\}) \cup (\{y_0\} \times Z)} = \text{const}$ , то  $f_1|_{(Y \times \{z_0\}) \cup (\{y_0\} \times Z)} = \text{const}$ . Таким чином,  $f_1(y_0, z) = f_1(y, z_0)$  і  $f_3(y, z) = f_1(y, z)$ . Отже, функція  $f_3(x, z)$  є також продовженням функції  $f_1(x, z)$ . Нехай  $x \in X$ . Тоді  $f_3(x, z_0) = f_2(y_0, z_0) - f_2(x, z_0) + f_2(x, z_0) = f_2(y_0, z_0) = f_1(y_0, z_0)$ .

Тобто  $f_3|_{(X \times \{z_0\}) \cup (\{y_0\} \times Z)} = \text{const}$ , а тому існує така дійснозначна функція  $f_4 : (Y, \{y_0\}) \wedge (Z, \{z_0\}) \rightarrow R$ , що  $f_3 = f_4 \circ p_X$ . З неперервності функції  $f_3$  та  $R$ -факторності відображення  $p_X$  випливає неперервність функції  $f_4$ , а отже, і неперервність функції  $f = f_4|_{(Y, y_0) \wedge (Z, z_0)}$ . З того, що відображення  $p_Y$  є факторним, випливає, що простори  $(Y, y_0) \wedge (Z, z_0)'$  і  $(Y, y_0) \wedge (Z, z_0)$  є гомеоморфними.

Аналогічно доведемо таке твердження для абелевих топологічних груп та локально опуклих просторів.  $\diamond$

Нехай  $G$  – підгрупа симетричної групи  $S_n$ . Нагадаємо, що через  $SP_G^n$  позначатимемо  $G$ -симетричний степеневий функтор [15], означений так. Для простору  $X$  простір  $SP_G^n X$  є простором орбіт  $n$ -го степеня  $X^n$  за дією групи  $G$ , означеної як  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ , де  $\sigma \in G$ . Орбіту, що містить елемент  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  позначимо  $[x_1, x_2, \dots, x_n]_G$ . Множину  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  називатимемо носієм елемента  $[x_1, x_2, \dots, x_n]_G$  і позначатимемо  $\text{supp}([x_1, x_2, \dots, x_n]_G)$ . Якщо  $G = S_n$ , то скорочено запишемо  $SP^n X$  замість  $SP_G^n X$ .

**Твердження 14.** Нехай підпростір  $Y$  є  $G_A$ -ретрактом ( $L$ -ретрактом) тихоновського простору  $X$ , топологічний простір  $X^{n-1} \times Y$  є  $k$ -простором,  $G$  – підгрупа симетричної групи  $S_n$ . Тоді підпростір  $SP_G^n Y'$  з топологією, індукованою з простору  $SP_G^n X$ , є  $G_A$ -ретрактом ( $L$ -ретрактом) простору  $SP_G^n X$  і гомеоморфним простору  $SP_G^n Y$ .

Доведення. Покажемо, що для кожного тихоновського простору  $X$ , для кожної  $G \in S_n$  простір  $SP_G^n X$  є тихоновським. Позначимо через  $s_X : X^n \rightarrow SP_G^n X$  фактор-відображення. Покажемо спочатку, що простір  $SP_G^n X$  є  $T_1$ -простором. Дійсно, для довільної точки  $a \in SP_G^n X$  прообраз  $s_X^{-1}(a)$  є скінченним, тобто замкненим у  $X^n$ . За факторністю відображення  $s_X$  множина  $\{a\}$  є замкнутою у  $SP_G^n X$ . Нехай  $A$  – замкнена множина у  $SP_G^n X$ ,  $a \notin A$ . Покажемо, що існує така неперервна дійснозначна функція  $f : SP_G^n X \rightarrow R$ , що  $f(a) = 0$  і  $f|_A = 1$ . Нехай  $B = s_X^{-1}(A)$ ,  $b \in s_X^{-1}(a)$ . Оскільки підмножина  $B$  є замкнутою у  $X^n$ , а простір  $X^n$  є тихоновським, то існує така неперервна дійснозначна функція  $g : X^n \rightarrow R$ , що  $g|_B = 1$ ,  $g(b) = 0$ . Нехай  $\sigma \in G$ . Тоді відображення  $h_\sigma : X^n \rightarrow X^n$ , означене як  $h_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ , є неперервним. Тоді функція  $h = \prod_{\sigma \in G} g \circ h_\sigma$  є неперервною. За побудовою  $h(z_1) = h(z_2)$  для всіх таких  $z_1, z_2 \in X^n$ , що  $s_X(z_1) = s_X(z_2)$ . Отже, існує така неперервна функція  $f : SP_G^n X \rightarrow R$ , що  $h = g \circ s_X$ . За факторністю відображення  $s_X$  отримаємо, що відображення  $f$  є неперервним. Крім того,  $f(a) = h(b) = 0$  і  $h|_B = f|_A = 1$ .

Нехай  $h : A(X) \rightarrow A(Y)$  – такий неперервний гомоморфізм, що  $h(y) = y$  для всіх  $y \in Y$ . Можемо "продовжити" цей гомоморфізм за допомогою конструкції, розглянутої у твердженні 11, до такого гомоморфізму  $h_n : A(X^n) \rightarrow A(Y^n)$ , що  $h_n(z) = z$  для всіх  $x \in Y^n$ . Нехай

$$h(x_m) = \sum_{i_m=1}^{k_m} \lambda_{i_m} y_{i_m}. \text{ Тоді } h_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i_1=1}^{k_1} \sum_{i_2=1}^{k_2} \dots \sum_{i_n=1}^{k_n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_n} (y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_n}).$$

Нехай  $s_Y = s_X|_{Y^n} : Y^n \rightarrow SP_G^n Y$  – звуження відображення  $s_X$ ,  $s_X^* : A(X^n) \rightarrow A(SP_G^n X)$ ,  $s_Y^* : A(Y^n) \rightarrow A(SP_G^n Y)$  – гомоморфні продовження відображень  $s_X$  та  $s_Y$ . Тоді діаграма

$$\begin{array}{ccc} A(X^n) & \xrightarrow{h_n} & A(Y^n) \\ s_X^* \downarrow & & \downarrow s_Y^* \\ A(SP_G^n X) & \xrightarrow{h_G} & A(SP_G^n Y) \end{array}$$

є комутативною.

Доведемо, що  $h_n(\ker s_X^*) = \ker s_Y^*$ . Підгрупа  $\ker s_X^*$  породжена елементами вигляду  $(x_1, x_2, \dots, x_n) - (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ , де  $x_i \in X$ ,  $\sigma \in G$ . Подіємо на них відображенням  $h_n$ . Тоді

$$\begin{aligned} h_n((x_1, x_2, \dots, x_n) - (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)})) &= \\ &= \sum_{i_1=1}^{k_1} \sum_{i_2=1}^{k_2} \dots \sum_{i_n=1}^{k_n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_n} (y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_n}) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i_{\sigma(1)}=1}^{k_{\sigma(1)}} \sum_{i_{\sigma(2)}=1}^{k_{\sigma(2)}} \dots \sum_{i_{\sigma(n)}=1}^{k_{\sigma(n)}} \lambda_{i_{\sigma(1)}} \lambda_{i_{\sigma(2)}} \dots \lambda_{i_{\sigma(n)}} (y_{i_{\sigma(1)}}, y_{i_{\sigma(2)}}, \dots, y_{i_{\sigma(n)}}) = \\
& = \sum_{i_1=1}^{k_1} \sum_{i_2=1}^{k_2} \dots \sum_{i_n=1}^{k_n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_n} (y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_n}) - \\
& - \sum_{i_1=1}^{k_1} \sum_{i_2=1}^{k_2} \dots \sum_{i_n=1}^{k_n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_n} (y_{i_{\sigma(1)}}, y_{i_{\sigma(2)}}, \dots, y_{i_{\sigma(n)}}) = \\
& = \sum_{i_1=1}^{k_1} \sum_{i_2=1}^{k_2} \dots \sum_{i_n=1}^{k_n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_n} \left( (y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_n}) - (y_{i_{\sigma(1)}}, y_{i_{\sigma(2)}}, \dots, y_{i_{\sigma(n)}}) \right).
\end{aligned}$$

Оскільки кожен доданок  $(y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_n}) - (y_{i_{\sigma(1)}}, y_{i_{\sigma(2)}}, \dots, y_{i_{\sigma(n)}})$  належить підгрупі  $\ker s_Y^*$ , то

$$\sum_{i_1=1}^{k_1} \sum_{i_2=1}^{k_2} \dots \sum_{i_n=1}^{k_n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_n} \left( (y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_n}) - (y_{i_{\sigma(1)}}, y_{i_{\sigma(2)}}, \dots, y_{i_{\sigma(n)}}) \right) \in \ker s_Y^*.$$

Отже, за теоремою існує такий неперервний гомоморфізм  $h_G : A(SP_G^n X) \rightarrow A(SP_G^n Y')$ , що  $s_Y^* \circ h_n = h_G \circ s_X^*$ , а підпростір  $SP_G^n Y' \in G_A$ -ретрактом простору  $SP_G^n X$ . Підпростір  $SP_G^n Y'$ , будучи  $G_A$ -ретрактом тихонівського простору  $SP_G^n X$ , є замкненим у цьому просторі. Оскільки  $SP_G^n Y' = s_X^{-1}(s_X(SP_G^n Y'))$ , то відображення  $s_Y$  буде факторним як звуження факторного відображення  $s_X$  на прообраз замкненої підмножини  $SP_G^n Y'$ . Тобто простір  $SP_G^n Y'$  є гомеоморфним простору  $SP_G^n Y$ .  $\diamond$

Позначимо через  $S_A(X)$  вільну абелеву топологічну напівгрупу простору  $X$ .

**Твердження 15.** Нехай підпростір  $Y \in G_A$ -ретрактом ( $L$ -ретрактом) тихонівського простору  $X$  і топологічний простір  $S(X)$  є  $k$ -простором. Тоді піднапівгрупа  $S_A(Y)'$  в  $S_A(X)$ , породжена множиною  $Y$ , є  $G_A$ -ретрактом ( $L$ -ретрактом) простору  $S_A(X)$  і гомеоморфна вільній абелевій топологічній напівгрупі  $S_A(Y)'$ .

Доведення. Зауважимо, що  $S_A(X) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} SP^n X$  (див. [8]). Оскільки

$$S(X) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} X^n \text{ і простір } S(X) \text{ є } k\text{-простором, то простір } X^n \text{ для довільного}$$

$n \in \mathbb{N}$  є  $k$ -простором. Тому і замкнений підпростір  $X^m \times Y^{n-m}$  простору  $X^n$  буде  $k$ -простором для таких  $m$ , що  $0 \leq m \leq n$ . Отже, за твердженням 14 підпростір  $SP^n Y'$  з топологією, індукованою з простору  $SP^n X$ , є  $G_A$ -ретрактом простору  $SP^n X$  і гомеоморфний простору  $SP^n Y$  для всіх натуральних  $n$ . Отже, з твердження 3 випливає, що підпростір

$$S_A(Y)' = \bigoplus_{n=1}^{\infty} SP^n Y' \in G_A\text{-ретрактом простору } S_A(X) \text{ і гомеоморфним про-}$$

$$\text{простору } S_A(Y) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} SP^n Y. \quad \diamond$$

Нехай  $a \in X$ . Означимо відношення еквівалентності на вільній топологічній напівгрупі  $S(X)$ , поклавши

$(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_m) \sim (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m)$  для довільних  $m \leq n$ ,  $i \leq m$ , та  $x_1, x_2, \dots, x_m \in X$ . Позначимо фактор-простір  $S(X)/\sim$  через  $S(X, a)$ . Алгебрично  $S(X, a)$  є вільним топологічним моноїдом з множиною твірних  $X$  і нейтральним елементом  $a$ .

**Твердження 16.** *Нехай підпростір  $Y \in G_A$ -ретрактом ( $L$ -ретрактом) тихоновського простору  $X$ , топологічний простір  $S(X)$  є  $k$ -простором,  $a \in X$ . Тоді підпростір  $S(Y, a)'$  з топологією, індукованою з простору  $S(X, a)$ , є  $G_A$ -ретрактом ( $L$ -ретрактом) простору  $S(X, a)$  і гомеоморфний простору  $S(Y, a)$ .*

Доведення. Нехай  $h : A(X) \rightarrow A(Y)$  – такий неперервний гомоморфізм, що  $h(y) = y$  для всіх  $y \in Y$ . Тоді згідно з твердженням 12 можемо задати такий неперервний гомоморфізм  $h_S : A(S(X)) \rightarrow A(S(Y))$ , що  $h_S(t) = t$

для всіх  $t \in S(Y)$ . Причому, якщо  $h(x_m) = \sum_{i_m=1}^{k_m} \lambda_{i_m} y_{i_m}$ , то

$$h_S(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i_1=1}^{k_1} \sum_{i_2=1}^{k_2} \dots \sum_{i_n=1}^{k_n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_n} (y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_n}).$$

Нехай  $s_X : S(X) \rightarrow S(X, a)$  – фактор-відображення,  $s_Y = s_X|_Y : S(Y) \rightarrow S(Y, a)'$  – його звуження,  $s_X^* : A(S(X)) \rightarrow A(S(X, a))$ ,  $s_Y^* : A(S(Y)) \rightarrow A(S(Y, a)')$  – гомоморфні продовження відображень  $s_X$  та  $s_Y$ :

$$\begin{array}{ccc} A(S(X)) & \xrightarrow{h_S} & A(S(Y)) \\ s_X^* \downarrow & & \downarrow s_Y^* \\ A(S(X, a)) & \xrightarrow{h_M} & A(S(Y, a)) \end{array}.$$

Доведемо, що  $h_n(\ker s_X^*) = \ker s_Y^*$ . Підгрупа  $\ker s_X^*$  породжена елементами вигляду

$$(x_1, x_2, x_{q-1}, a, x_{q+1}, \dots, x_n) - (x_1, x_2, x_{q-1}, x_{q+1}, \dots, x_n).$$

Подіємо на них відображенням  $h_S$ . Оскільки  $h(a) = a$ , то  $k(q) = 1$ ,  $\lambda_{q_1} = 1$ , а тому

$$\begin{aligned} h_S & \left( (x_1, x_2, \dots, x_{q-1}, a, x_{q+1}, \dots, x_n) - (x_1, x_2, \dots, x_{q-1}, x_{q+1}, \dots, x_n) \right) = \\ &= \sum_{i_1=1}^{k_1} \sum_{i_2=1}^{k_2} \dots \sum_{i_n=1}^{k_n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_n} (y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_{q-1}}, a, y_{i_{q+1}}, \dots, y_{i_n}) - \\ &- \sum_{i_1=1}^{k_1} \sum_{i_2=1}^{k_2} \dots \sum_{i_n=1}^{k_n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_n} (y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_{q-1}}, y_{i_{q+1}}, \dots, y_{i_n}) = \\ &= \sum_{i_1=1}^{k_1} \dots \sum_{i_2=1}^{k_2} \dots \sum_{i_n=1}^{k_n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_n} \left( (y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_{q-1}}, a, y_{i_{q+1}}, \dots, y_{i_n}) - \right. \end{aligned}$$

$$-(y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_{q-1}}, y_{i_{q+1}}, \dots, y_{i_n})) \in \ker s_Y^*.$$

Отже, за теоремою, існує такий неперервний гомоморфізм  $h_M : A(S(X, a)) \rightarrow A(S(Y, a))$ , що  $s_Y^* \circ h_S = h_M \circ s_X^*$ , а підпростір  $S(Y, a)'$  є  $G_A$ -ретрактом простору  $S(X, a)$ . Підпростір  $s(Y, a)'$  будучи  $G_A$ -ретрактом тихоновського простору  $S(X, a)$ , є замкненим у цьому просторі. Оскільки  $s(Y, a)' = s_X^{-1}(s_X(SP(Y, a)'))$ , то відображення  $s_Y$  буде факторним як звуження факторного відображення  $s_X$  на прообраз замкненої підмножини  $s(Y, a)'$ . Тобто простір  $s(Y, a)'$  є гомеоморфним простору  $s(Y, a)$ .  $\diamond$

Нехай  $a \in X$ . Означимо відношення еквівалентності на  $S_A(X)$ , поклавши  $[x_1, x_2, \dots, x_m] \sim [a, x_1, x_2, \dots, x_m]$  для довільних  $m \in N$  та  $x_1, x_2, \dots, x_m \in X$ . Позначимо фактор-простір  $S_A(X)/\sim$  через  $SP(X, a)/\sim$ . Алгебрично  $S(X, a)$  є вільним абелевим топологічним моноїдом з множиною твірних  $X$  і нейтральним елементом  $a$ .

**Твердження 17.** *Нехай підпростір  $Y$  є  $G_A$ -ретрактом ( $L$ -ретрактом) тихоновського простору  $X$ , топологічний простір  $S(X)$  є  $k$ -простором,  $a \in Y$ . Тоді піднапівгрупа  $SP(Y, a)'$  в  $SP(X, a)$ , породжена множиною  $Y$ , є  $G_A$ -ретрактом ( $L$ -ретрактом) простору  $SP(X, a)$  і гомеоморфна простору  $SP(Y, a)$ .*

Доведення. Нехай  $h : A(X) \rightarrow A(Y)$  – такий спеціальний неперервний гомоморфізм, що  $h(x) = x$  для всіх  $x \in Y$ . Тоді згідно з твердженням 15 можемо побудувати неперервний гомоморфізм  $h_A : A(S_A(X)) \rightarrow A(S_A(Y))$ ,

причому, якщо  $h(x_n) = \sum_{i_n=1}^{k_n} \lambda_{i_n} y_{i_n}$ , тоді

$$h([x_1, x_2, \dots, x_n]) = \sum_{i_1=1}^{k_1} \sum_{i_2=1}^{k_2} \dots \sum_{i_n=1}^{k_n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_n} [y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_n}].$$

Нехай  $s_X : S_A(X) \rightarrow SP(X, a)$  – фактор-відображення,  $s_Y = s_X|_Y : S_A(Y) \rightarrow SP(Y, a)'$  – його звуження,  $s_X^* : A(S_A(X)) \rightarrow A(SP(X, a))$ ,  $s_Y^* : A(S_A(Y)) \rightarrow A(SP(Y, a)')$  – гомоморфні продовження відображень  $s_X$  та  $s_Y$ .

$$\begin{array}{ccc} A(S_A(X)) & \xrightarrow{h_A} & A(S_A(Y)) \\ s_X^* \downarrow & & \downarrow s_Y^* \\ A(SP(X, a)) & \xrightarrow{h_M} & A(SP(Y, a)) \end{array}.$$

Доведемо, що  $h_A(\ker s_X^*) = \ker s_Y^*$ . Підгрупа  $\ker s_X^*$  породжена елементами вигляду

$$[x_1, x_2, \dots, x_m] - [a, x_1, x_2, \dots, x_m].$$

Подіємо на них відображенням  $h_A$ . Одержимо

$$\begin{aligned} & h_A([x_1, x_2, \dots, x_m] - [a, x_1, x_2, \dots, x_m]) = \\ & = \sum_{i_1=1}^{k_1} \sum_{i_2=1}^{k_2} \dots \sum_{i_n=1}^{k_n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_n} [y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_n}] - \sum_{i_1=1}^{k_1} \sum_{i_2=1}^{k_2} \dots \sum_{i_n=1}^{k_n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_n} [a, y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_n}] = \end{aligned}$$

$$= \sum_{i_1=1}^{k_1} \sum_{i_2=1}^{k_2} \dots \sum_{i_n=1}^{k_n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_n} \left( [y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_n}] - [a, y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_n}] \right) \in \ker s_Y^*.$$

Отже, за теоремою існує такий неперервний гомоморфізм  $h_{SP} : A(SP(X, a)) \rightarrow A(SP(Y, a))$ , що  $s_Y^* \circ h = h_{SP} \circ s_X^*$ , а підпростір  $SP(Y, a)'$  є  $G_A$ -ретрактом простору  $SP(X, a)$ . Підпростір  $SP(Y, a)'$ , будучи  $G_A$ -ретрактом тихоновського простору  $SP(X, a)$ , є замкненим у цьому просторі. Оскільки  $SP(Y, a)' = s_X^{-1}(s_X(SP(Y, a)'))$ , то відображення  $s(Y)$  буде факторним як звуження факторного відображення  $s_X$  на прообраз замкненої підмножини  $SP(Y, a)'$ . Тобто простір  $SP(Y, a)'$  є гомеоморфним простору  $SP(Y, a)$ .  $\diamond$

Джойн  $X * Y$  просторів  $X$  та  $Y$  зручно уявити як об'єднання відрізків, що з'єднують кожну точку простору  $X$  з кожною точкою простору  $Y$ . Формально означити джойн можна так: візьмемо добуток  $X \times Y \times I$  і утотожнимо кожну точку  $(x, y_1, 0)$  з точкою  $(x, y_2, 0)$  для довільних  $x \in X$  та  $y_1, y_2 \in Y$ ; аналогічно утотожнимо кожну точку  $(x_1, y, 1)$  з точкою  $(x_2, y, 1)$  для довільних  $x_1, x_2 \in X$  та  $y \in Y$ .

**Твердження 18.** *Нехай підпростір  $Y$  є  $G$ -ретрактом ( $G_A$ -,  $L$ -ретрактом) тихоновського простору  $X$  і простір  $Z$  є локально компактним, або простір  $Y \times Z$  є  $k$ -простором, простір  $X * Z$  є тихоновським. Тоді підпростір  $Y * Z'$  з топологією, індукованою з простору  $X * Y$ , є  $G$ -ретрактом ( $G_A$ -,  $L$ -ретрактом) простору  $X * Z$ .*

**Доведення.** Нехай підпростір  $Y$  є  $G$ -ретрактом ( $G_A$ -,  $L$ -ретрактом) простору  $X$ , тоді існує такий спеціальний топологічний гомоморфізм  $p : F(X) \rightarrow F(Y)$ , що  $h(y) = y$  для всіх  $y \in Y$ .

Означимо неперервний гомоморфізм  $h_l : F(X \times Z \times I) \rightarrow F(Y \times Z \times I)$  методом, описаним у твердженні 9. Як встановлено раніше [1], за виконання вказаних у формулюванні твердження умов з неперервності відображення  $p$  випливає неперервність відображення  $h_l$ . Нехай  $x \in X$  і  $h(x) = y_1^{e_1} y_2^{e_2} \dots y_n^{e_n}$ . Розглянемо відображення  $h : X \times Z \rightarrow F(Y \times Z \times I)$ , поклавши

$$h(x, z, r) = (y_1, z, r)^{e_1} (y_2, z, r)^{e_2} \dots (y_n, z, r)^{e_n}.$$

Продовжимо відображення  $h$  до неперервного гомоморфізму  $h : F(X \times Z \times I) \rightarrow F(Y \times Z \times I)$ . Позначимо через  $p_X : X \times Z \times I \rightarrow X * Z$  –  $R$ -факторне відображення,  $p_Y = p_X|_Y$ ,  $p_X^* : F(X \times Z \times I) \rightarrow F(X * Z)$ ,  $p_Y^* : F(Y \times Z \times I) \rightarrow F(Y * Z)$  – гомоморфні продовження відображень  $p_X$  та  $p_Y$ :

$$\begin{array}{ccc} X \times Z \times I & \xrightarrow{h} & F(Y \times Z \times I) \\ p_X \downarrow & & \downarrow p_Y^* \\ X * Z & \xrightarrow{w} & F(Y * Z) \end{array}$$

Щоб довести це твердження згідно з теоремою, достатньо показати, що  $h(\ker p_X^*) = \ker p_Y^*$ . Підгрупа  $\ker p_X^*$  породжена всеможливими елементами вигляду  $u_1 u_2^{-1}$ , де  $u_1 = (x_1, z)$ ,  $u_2 = (x_2, z)$  або  $u_1 = (x, z_1)$ ,  $u_2 = (x, z_2)$ . Нехай  $p(x_1) = y_1^{e_1} y_2^{e_2} \dots y_n^{e_n}$ . Тоді

$$i(u_1) = i(x_1, z_0) = (y_1, z_0)^{\varepsilon_1} (y_2, z_0)^{\varepsilon_2} \dots (y_n, z_0)^{\varepsilon_n}.$$

$$\text{Отже, } p_Y^*(i(u_1)) = (y, z_0)^{\varepsilon_1} (y, z_0)^{\varepsilon_2} \dots (y, z_0)^{\varepsilon_n} = (y, z_0)^{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i} = (y, z_0)^1 = (y, z_0).$$

Аналогічно  $p_Y^*(i(u_2)) = (y, z_0)$ . Таким чином,  $p_Y^*(i(u_1)) = p_Y^*(i(u_2))$ . Тобто  $i(u_1 u_2^{-1}) \in \ker p_Y^*$ .

Другий випадок:  $u_1 = (x, z_1, 1)$ ,  $u_2 = (x, z_2, 1)$ ,  $z_1 \neq z_2$ . Нехай  $p(x) = y_1^{\varepsilon_1} y_2^{\varepsilon_2} \dots y_n^{\varepsilon_n}$ , тоді

$$i(u_1) = i(x, z_1, 1) = (y_1, z_1, 1)^{\varepsilon_1} (y_2, z_1, 1)^{\varepsilon_2} \dots (y_n, z_1, 1)^{\varepsilon_n}.$$

Отже,  $p_Y^*(i(u_1)) = (y, z_0)^{\varepsilon_1} (y, z_0)^{\varepsilon_2} \dots (y, z_0)^{\varepsilon_n} = p_Y^*(i(u_2))$ . Таким чином,  $i(u_1 u_2^{-1}) \in \ker p_Y^*$ .  $\diamond$

Аналогічно доводимо це твердження для  $G_A$ - та  $L$ -ретрактів.

Позначимо через  $Q(X)$  простір квазікомпонент тихоновського простору  $X$ , через  $q_X$  – фактор-відображення  $X \rightarrow Q(X)$ , яке кожну квазікомпоненту простору  $X$  стягує в одноточкову множину. Топологічний простір  $X$  називають *цілком незв'язним*, якщо усі його квазікомпоненти одноточкові множини.

**Твердження 19.** *Нехай підпростір  $Y \in G$ -ретрактом ( $G_A$ -ретрактом) такого тихоновського простору  $X$ , що простір  $Q(X)$  є тихоновським. Нехай також  $q: X \rightarrow Q(X)$  – фактор-відображення. Тоді підпростір  $q(Y) \in G$ -ретрактом ( $G_A$ -ретрактом) простору  $Q(X)$  і гомеоморфним простору  $Q(Y)$ .*

**Доведення.** Нехай  $h: X \rightarrow F(Y)$  – таке неперервне відображення, що  $h(x) = x$  для всіх  $x \in Y$ ,  $q_X: X \rightarrow Q(X)$  – фактор-відображення,  $q_Y = q_X|_Y$  – звуження відображення  $q_X$ ,  $q_X^*: F(X) \rightarrow F(Q(X))$ ,  $q_Y^*: F(Y) \rightarrow F(Q(Y))$  – гомоморфні продовження відображень  $q_X$  і  $q_Y$  відповідно:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & F(Y) \\ q_X \downarrow & & \downarrow q_Y^* \\ Q(X) & \xrightarrow{h_Q} & F(q(Y)). \end{array}$$

Нехай  $x_1 \neq x_2$  такі точки, що  $q(x_1) = q(x_2)$ . Тоді точки  $x_1$  та  $x_2$  належать одній квазікомпоненті. Оскільки відображення  $q_Y^* \circ i$  є неперервним, то точки  $q_Y^* \circ h(x_1)$  та  $q_Y^* \circ h(x_2)$  також належать одній квазікомпоненті. Простір  $q(Y)$ , будучи підпростором цілком незв'язного простору  $Q(X)$ , є цілком незв'язним, а отже, за теоремою з праці [5] простір  $F(q(Y))$  є також цілком незв'язним. Таким чином,  $q_Y^* \circ h(x_1) = q_Y^* \circ h(x_2)$ . За наслідком 1 існує таке неперервне відображення  $h_Q: Q(X) \rightarrow F(q(Y))$ , що  $h_Q(z) = z$  для всіх  $z \in q(Y)$  і  $h_Q \circ q_X = q_Y^* \circ h$ . Тобто підпростір  $q(Y) \in G$ -ретрактом простору  $Q(X)$ .

Покажемо, що точки  $x_1, x_2 \in Y$  належать одній квазікомпоненті простору  $X$  тоді і тільки тоді, якщо вони належать одній квазікомпоненті простору  $Y$ . Нагадаємо, що точки  $x_1$  та  $x_2$  топологічного простору  $X$  належать різним квазікомпонентам тоді і лише тоді, коли існує таке неперервне відображення  $f: X \rightarrow Z_2$  у двоточковий дискретний простір  $Z_2$ , що  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . Нехай точки  $x_1, x_2 \in Y$  належать різним квазікомпонентам простору  $X$ , тоді існує таке неперервне відображення  $f: X \rightarrow Z_2$ , що  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . Тоді відображення  $g = f_Y: Y \rightarrow Z_2$  є неперервним і  $g(x_1) \neq g(x_2)$ , а отже,  $x_1$  та  $x_2$  належать різним квазікомпонентам простору  $Y$ .

Нехай тепер точки  $x_1$  та  $x_2$  належать різним квазікомпонентам простору  $Y$ . Тоді існує таке неперервне відображення  $g: Y \rightarrow Z_2$ , що  $g(x_1) \neq g(x_2)$ . Оскільки підпростір  $Y \in G$ -ретрактом простору  $X$ , а простір  $Z_2$  є топологічною групою, то існує таке неперервне відображення  $f: X \rightarrow Z_2$ , що  $f_Y = g$ , тобто  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , а отже,  $x_1$  та  $x_2$  належать різним квазікомпонентам простору  $X$ . Таким чином,  $q^{-1}(q(Y)) = Y$ . Підпростір  $q(Y)$ , будучи  $G$ -ретрактом тихоновського простору  $Q(X)$ , є замкненим у цьому просторі. Відображення  $q(Y)$ , яке є звуженням факторного відображення  $q$  на прообраз замкненої підмножини  $q(Y)$ , буде також факторним, а отже, простір  $q(Y)$  є гомеоморфним простору  $Q(Y)$ .  $\diamond$

Для тихоновського простору  $X$  позначимо через  $\mu X$  поповнення за Дьедонне простору  $X$ .

**Твердження 20.** *Нехай підпростір  $Y \in G$ -ретрактом ( $G_A$ -ретрактом) тихоновського простору  $X$ . Тоді підпростір  $\mu Y \in G$ -ретрактом ( $G_A$ -ретрактом) тихоновського простору  $\mu X$ .*

**Доведення.** Нехай підпростір  $Y \in G$ -ретрактом тихоновського простору  $X$ . Тоді існує такий неперервний гомоморфізм  $h: F(X) \rightarrow F(Y)$ , що  $h(x) = x$  для всіх  $x \in Y$ . Гомоморфізм  $h$  допускає неперервне продовження до гомоморфізму  $\rho h: \rho F(X) \rightarrow \rho F(Y)$  поповнень за Вейлем груп  $F(X)$  та  $F(Y)$ . Як встановлено раніше [14], функтори  $F \circ \mu$  і  $\rho \circ F$  є природно ізоморфними. Тому гомоморфізм  $\rho h$  можемо розглядати як гомоморфізм з групи  $F(\mu X)$  на групу  $F(\mu Y)$ . Оскільки  $\rho h(x) = x$  для всіх  $x \in Y$ , то  $\rho h(x) = x$  для всіх  $x \in \overline{\mu X} = \mu Y$ , тобто  $\mu Y \in G$ -ретрактом простору  $\mu X$ .

Для абелевих топологічних груп твердження, аналогічне до твердження 20, випливає з результатів праці [4].  $\diamond$

Нехай  $X, Z$  – тихоновські простори,  $A$  – замкнена підмножина в  $Z$ . Позначимо через  $(X \times Z)_A$   $R$ -факторний простір добутку  $(X \times Z)$  за відношенням еквівалентності  $\sim$ , означеним як  $(x_1, z_1) \sim (x_2, z_2)$ , якщо  $(x_1, z_1) = (x_2, z_2)$ , або  $z_1 = z_2 \in A$ . Як встановлено раніше [1], для тихоновських просторів  $X, Z$  та замкненого підпростору  $A$  у  $Z$   $R$ -факторний простір  $(X \times Z)_A$  є тихоновським.

**Твердження 21.** *Нехай підпростір  $Y \in G$ -ретрактом ( $G_A$ -,  $L$ -ретрактом) тихоновського простору  $X$ ,  $Z$  – такий тихоновський простір,*



що  $Z$  є локально компактним, або простір  $Z \times Y$  є  $k$ -простором,  $A$  – замкнений підпростір у  $Z$ . Тоді підпростір  $(Y \times Z)_A$  з топологією, індукованою з простору  $(X \times Z)_A$ , є  $G$ -ретрактом ( $G_A$ -,  $L$ -ретрактом) простору  $(X \times Z)_A$ .

Доведення. Нехай підпростір  $Y$  є  $G$ -ретрактом тихоновського простору  $X$ . Тоді існує таке неперервне відображення  $h: X \rightarrow F(Y)$ , що  $h(x) = x$  для всіх  $x \in Y$ , а гомоморфне продовження відображення  $h$  є спеціальним гомоморфізмом:

$$\begin{array}{ccc} X \times Z & \xrightarrow{h} & F(Y \times Z) \\ p_X \downarrow & & \downarrow p_Y^* \\ (X \times Z)_A & \xrightarrow{w} & F((Y \times Z)_A). \end{array}$$

Методом, описаним у твердженні 9, побудуємо таке неперервне відображення  $h_Z: X \times Z \rightarrow F(Y \times Z)$ , що  $h_Z(x, z) = (x, z)$  для всіх  $(x, z) \in Y \times Z$ . Нехай  $p: X \times Z \rightarrow (X \times Z)_A$  –  $R$ -факторне відображення,  $p_Y: Y \times Z \rightarrow (Y \times Z)_A$  – його звуження на  $Y \times Z$ ,  $p_Y^*: F(Y \times Z) \rightarrow F((Y \times Z)_A)$  – гомоморфне продовження відображення  $p_Y$ . Для  $z \in A$  позначимо  $p_Y(Y \times \{z\}) = pz$ . Нехай  $p_X(x_1, z_1) = p_X(x_2, z_2)$  і  $(x_1, z_1) \neq (x_2, z_2)$ . Тоді  $x_1 = x_2$  і  $z_1 \neq z_2 \in A$ ,  $h(x_1) = y_1^{\varepsilon_1} y_2^{\varepsilon_2} \dots y_n^{\varepsilon_n}$ , де  $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i = 1$ . Тоді

$$\begin{aligned} p_Y \circ h(x_1, z_1) &= p_Y((y_1, z_1)^{\varepsilon_1} (y_2, z_1)^{\varepsilon_2} \dots (y_n, z_1)^{\varepsilon_n}) = \\ &= (p_Y(y_1, z_1))^{\varepsilon_1} (p_Y(y_2, z_2))^{\varepsilon_2} \dots (p_Y(y_n, z_n))^{\varepsilon_n} = \\ &= (pz_1)^{\varepsilon_1} (pz_1)^{\varepsilon_2} \dots (pz_1)^{\varepsilon_n} = pz_1^{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i} = pz_1. \end{aligned}$$

Аналогічно  $p_Y^* \circ h(x_2, z_2) = pz_2$ . Оскільки  $z_1 = z_2 \in A$ , то  $p_Y^* \circ h(x_2, z_2) = pz_2 = pz_1 = p_Y^* \circ h(x_1, z_1)$ . Отже, за наслідком 1 маємо, що підпростір  $(Y \times Z)_A$  є  $G$ -ретрактом простору  $(X \times Z)_A$ .

Аналогічно доводимо це твердження для абелевих топологічних груп та локально-опуклих просторів.  $\diamond$

Нехай  $I = [0, 1]$  – відрізок,  $J = (0, 1]$  – напіввідкритий інтервал. Тоді фактор-простір  $CX = (X \times I)_{\{0\}}$  називають конусом над простором  $X$ , фактор-простір  $\Sigma X = (X \times I)_{\{0, 1\}}$  – надбудовою над простором  $X$ , а фактор-простір  $OX = (X \times J)_{\{1\}}$  – відкритим конусом над простором  $X$  (див. [14]).

З теореми 21 випливає такий наслідок.

**Наслідок 2.** Нехай підпростір  $Y$  є  $G$ -ретрактом ( $G_A$ -,  $L$ -ретрактом) тихоновського простору  $X$ . Тоді підпростір  $CY$  є  $G$ -ретрактом ( $G_A$ -,  $L$ -ретрактом) тихоновського простору  $CX$ ; підпростір  $\Sigma Y$  є  $G$ -ретрактом ( $G_A$ -,  $L$ -ретрактом) тихоновського простору  $\Sigma X$ ; підпростір  $JY$  є  $G$ -ретрактом ( $G_A$ -,  $L$ -ретрактом) тихоновського простору  $JX$ .

**Зауваження 1.** У монографії [7] К. Борсук ввів поняття  $r$ -рівних просторів. Простори  $X$  та  $Y$  називають  $r$ -рівними, якщо простір  $X$  містить ретракт, гомеоморфний  $Y$ , а простір  $Y$  – ретракт, гомеоморфний  $X$ . Топологічну властивість  $P$  називають  $r$ -інваріантом, якщо для довільної пари  $r$ -рівних просторів  $X$  та  $Y$  маємо, що  $X$  володіє властивістю  $P$  тоді і тільки тоді, коли  $Y$  володіє властивістю  $P$ . Одним з важливих аспектів теорії ретрактів є вивчення  $r$ -інваріантів. Скажемо, що простори  $X$  та  $Y \in I_G$ -рівними, якщо простір  $X$  містить  $G$ -ретракт, гомеоморфний  $Y$ , і простір  $Y$  містить  $G$ -ретракт, гомеоморфний  $X$ . У праці [3] наведено приклад  $I_G$ -рівних просторів, які не є рівними. Діючи функторами, розглянутими в розділі 3 за вказаних там умов, на пари  $I_G$ -рівних просторів, зможемо отримувати нові пари  $I_G$ -рівних просторів.

**Зауваження 2.** Як зазначалось у праці [2]  $G$ -ретракти використовують для побудови негомеоморфних просторів з топологічно ізоморфними вільними топологічними групами. Відтак запропоновані там методи побудови узагальнених ретрактів дають можливість також отримувати нові пари просторів з топологічно ізоморфними вільними об'єктами.

1. Окунев О. Г. М-эквивалентность произведений // Тр. Моск. мат. общества. – 1995. – 56. – С. 192–205.
2. Пирч Н. М. Узагальнені ретракти і ізоморфізми вільних топологічних груп // Математичні студії. – 2010. – 33, №1. – С. 29–38.
3. Пирч Н. М. Узагальнені ретракти, пов'язані з топологічними групами // Вісник НУ «Львівська політехніка», фіз.-мат. науки. – 2007. – 601. – С. 54–58.
4. Ткаченко М. Г. О полноте свободных абелевых топологических групп // Докл. АН СССР. – 1983. – 269. – № 2. – С. 299–303.
5. Юнусов А. С. О квазикомпоненте свободных топологических групп // Математические исследования. – Кишинев, 1983. – 74. – С. 163–165.
6. Arhangel'skii A. V., Choban M. M., The extension property of Tychonoff spaces and generalized retracts // Comp. Rendus l'academie Bulgare des Sciences. – 1988. – 41, No 12. – P. 5–7.
7. Borsuk K. Theory of retracts. – Warszawa: Panstwowe Wydawn. Naukowe, 1967. – 251 s.
8. Choban M. M. Algebraic equivalence of topological spaces // Buletinul A.S. a R.M. Matematica. – 2001. – 35. – P. 12–36.
9. Engelking R. General Topology. – Berlin: Heldermann Verlag, 1989. – 530 p.
10. Gartside P. M., Reznichenko E. A., Sipacheva O. V. Maltsev and retral spaces // Topology and its Applications. – 1997. – 80, No 1–2. P. 115–129.
11. Kuratowski K. Topology. Volume 2. – Warszawa: Panstwowe Wydawn. Naukowe, 1968. – 603 s.
12. Morris S. A. Free products of topological groups // Bull. Austr. Math. Soc. – 1971. – 4, No. 1. – P. 17–29. Correction: Bull. Austr. Math. Soc. – 1975. – 12, No. 3. – P. 480.
13. Okunev O. G. A method for constructing examples of M-equivalent spaces // Topology and its Applications. – 1990. – 36, No. 2. – P. 157–171; Correction: Topology and its Applications. – 1993. – 49, No. 2. – P. 191–192.
14. Sipacheva O. V. Free topological groups of spaces and their subspaces // Topology and its Applications. – 2000. – 101, No. 3. – P. 181–212.
15. Wagner C. H. Symmetric, cyclic and permutation products of manifolds // Dissertationes mathematicae. – 182. – Warszawa. – 1980.

#### METHODS FOR CONSTRUCTING GENERALIZED RETRACTS

We consider structures and functors for constructing examples of the generalized retracts concerned with the extensions of the continuous mappings into topological groups.

Keywords: free topological group,  $G$ -retract.