

ПРО ПОДІЛЬНІСТЬ СПІЛЬНИХ КРАТНИХ МАТРИЦЬ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ НАД КОМУТАТИВНИМИ ОБЛАСТЯМИ БЕЗУ СТАБІЛЬНОГО РАНГУ 1,5

Над комутативними областями Безу стабільного рангу 1,5 для неособливих матриць третього порядку, за деяких обмежень на їхні інваріантні множники, встановлено зв'язок між подільністю спільних правих кратних матриць та інваріантними множниками матриць та їх кратних.

Ключові слова: комутативна область Безу, стабільний ранг 1,5, спільне кратне матриць, форма Сміта.

Нехай R – комутативна область елементарних дільників [5] з $1 \neq 0$, $M_n(R)$ – кільце $n \times n$ матриць над R і нехай $A \in M_n(R)$ – неособлива матриця. Відомо, що кожна матриця A над R має властивість канонічної діагональної редукції, тобто для неї існують такі оборотні матриці P_A та Q_A відповідних розмірів, що

$$P_A A Q_A = E = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n),$$

де $\varepsilon_i \mid \varepsilon_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$.

Матрицю E називають формою Сміта, елементи ε_i , $i = 1, \dots, n-1$ – інваріантними множниками, а матриці P_A та Q_A – лівою та правою перетворювальними матрицями, тобто матрицями, що зводять матрицю A до її форми Сміта.

Позначимо через P_A множину всіх лівих перетворювальних матриць для матриці A . Згідно з результатами праці [9] $P_A = G_E P_A$, де

$$G_E = \{ H \in GL_n(R) \mid \exists H_1 \in GL_n(R) : HE = EH_1 \}.$$

Множина G_E є мультиплікативною групою [9].

Нехай $A = BC$, де матриця B має форму Сміта:

$$B \sim \Delta = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n),$$

де $\delta_i \mid \delta_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$.

Зауважимо, що символ “ $\sim$ ” позначає еквівалентність матриць. Нагадаємо, що дві матриці A та B називають еквівалентними над R , якщо існують такі оборотні матриці P та Q відповідних розмірів, що $B = PAQ$.

Символами (a, b) та $[a, b]$ позначимо найбільший спільний дільник та найменше спільне кратне елементів a та b , відповідно. Позначення $a \mid b$ означає, що елемент a ділить елемент b .

Розглянемо множину матриць

$$L(E, \Delta) = \{ L \in GL_n(R) \mid \exists L_1 \in M_n(R) : LE = \Delta L_1 \},$$

яка введена у праці [9] та складається з усіх оборотних матриць вигляду

✉ romaniv_a@ukr.net

$$L(E, \Delta) = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1,n-1} & l_{1n} \\ \frac{\delta_2}{(\delta_2, \varepsilon_1)} l_{21} & l_{22} & \dots & l_{2,n-1} & l_{2n} \\ \frac{\delta_3}{(\delta_3, \varepsilon_1)} l_{31} & \frac{\delta_3}{(\delta_3, \varepsilon_2)} l_{32} & \dots & l_{3,n-1} & l_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\delta_n}{(\delta_n, \varepsilon_1)} l_{n1} & \frac{\delta_n}{(\delta_n, \varepsilon_2)} l_{n2} & \dots & \frac{\delta_n}{(\delta_n, \varepsilon_{n-1})} l_{n,n-1} & l_{nn} \end{pmatrix}.$$

З рівності $A = BC$ маємо, що матриця B є лівим дільником матриці A , а матриця A є правим кратним матриці B . Якщо $M = AA_1 = BB_1$, то матрицю M називають спільним правим кратним матриць A та B .

Поняття спільних кратних та спільних дільників матриць пов'язані між собою та їх часто застосовують до розв'язання прикладних задач алгебри. Зокрема, згідно з узагальненою теоремою Безу, пошук розв'язків системи односторонніх матричних рівнянь над полями можна звести до пошуку спільних лівих унітарних дільників першого степеня відповідних матриць. Дослідження спільних кратних, зокрема найменшого спільного кратного, бере свій початок з праці [6], де запропоновано метод його знаходження над комутативною областю головних ідеалів. У статті [10] встановлено, що найменше спільне праве кратне визначене однозначно з точністю до правої асоційованості. У працях [1] та [7, 8] вказано взаємозв'язки між формами Сміта двох матриць та формами Сміта їх найменшого спільного правого кратного для деяких класів матриць. Більше того, у публікації [1] для матриць другого порядку встановлено взаємозв'язок між їх спільними правими кратними над комутативною областю головних ідеалів. Природно виникає потреба дослідити такі задачі для ширших класів матриць.

У цій статті для неособливих матриць третього порядку за певних обмежень на форми Сміта встановлено зв'язок між подільністю спільних правих кратних матриць над комутативними областями Безу стабільного рангу 1,5. Також вказано взаємозв'язок між інваріантними множниками матриць та їх кратних.

Нагадаємо, що комутативною областю Безу називають комутативну область цілісності з одиницею, в якій довільний скінченно породжений ідеал є головним.

У праці [3] введено поняття кільця стабільного рангу 1,5. Зокрема, говоритимемо, що комутативне кільце є кільцем стабільного рангу 1,5, якщо для таких довільних елементів $a, b \in R$ та елемента $0 \neq c \in R$, що $(a, b, c) = 1$, існує такий елемент $r \in R$, що

$$(a + br, c) = 1.$$

Зауважимо, що саме поняття стабільного рангу кільця введено у праці [4]. Стабільним рангом кільця R називають таке найменше натуральне число n , що для довільних взаємно простих зліва елементів $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ з R існують такі елементи $r_1, r_2, \dots, r_n$ із R , що

$$(a_1 + br_1, a_2 + br_2, \dots, a_n + br_n) = 1.$$

Нехай надалі R – комутативна область Безу стабільного рангу 1,5. Згідно з теоремою 1 з праці [2] R є областю елементарних дільників. Розглянемо неособливі матриці A , B третього порядку над R , які мають форми Сміта

$$E = \text{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon),$$

$$\Delta = \text{diag}(1, \delta, \delta),$$

відповідно.

У праці [9] вказано необхідні та достатні умови, щоб матриця B була лівим дільником матриці A над комутативною областю елементарних дільників. Для неособливих матриць третього порядку ці умови можна записати так.

Теорема 1 [9]. Нехай

$$A \sim E = \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3), \quad \varepsilon_i \mid \varepsilon_{i+1}, \quad i = 1, 2,$$

$$B \sim \Delta = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \delta_3), \quad \delta_i \mid \delta_{i+1}, \quad i = 1, 2.$$

Тоді для того, щоб $A = BC$, необхідно та достатньо, щоб виконувалися умови

$$1) \quad \delta_i \mid \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$2) \quad P_B = L P_A, \quad \text{де } P_B \in P_B, \quad P_A \in P_A, \quad L \in L(E, \Delta).$$

Основним результатом цієї статті є теорема 2, в якій вказано умови подільності спільних кратних матриць.

Теорема 2. Нехай R – комутативна область Безу стабільного рангу 1,5 та $A, B \in M_3(R)$ – неособливі матриці з формами Сміта

$$P_A A Q_A = E = \text{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon),$$

$$P_B B Q_B = \Delta = \text{diag}(1, \delta, \delta),$$

відповідно. Нехай також $M, T \in M_3(R)$ – спільні праві кратні матриць A та B , тобто $M = A A_1 = B B_1$ та $T = A A_2 = B B_2$ з формами Сміта

$$P_M M Q_M = \Omega = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad \omega_i \mid \omega_{i+1}, \quad i = 1, 2,$$

$$P_T T Q_T = \Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \quad \gamma_i \mid \gamma_{i+1}, \quad i = 1, 2,$$

відповідно. Якщо виконуються умови

$$1) \quad \omega_1 \mid \gamma_1;$$

$$2) \quad \omega_2 = [\varepsilon, \delta] \quad \text{та} \quad \omega_2 \mid \gamma_2;$$

$$3) \quad \omega_3 = [\varepsilon, \delta] \quad \text{та} \quad \omega_3 \mid \gamma_3,$$

то матриця M є лівим дільником матриці T , тобто $T = MN$, де $N \in M_3(R)$.

Доведення. Згідно з означенням, із рівності $M = A A_1 = B B_1$ випливає, що матриця M є спільним правим кратним матриць A та B . Врахувавши теорему 1, отримаємо, що $P_A = L_M^A P_M$, де $P_A \in P_A$, $P_M \in P_M$,

$$L_M^A = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ \frac{\varepsilon}{(\varepsilon, \omega_1)} I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ \frac{\varepsilon}{(\varepsilon, \omega_1)} I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \in L(\Omega, E). \quad \text{Звідси} \quad P_M = (L_M^A)^{-1} P_A. \quad \text{Аналогічно, з}$$

рівності $M = B B_1$ одержимо, що $P_B = L_M^B P_M$, де $P_B \in P_B$,

$$L_M^B = \left\| \begin{array}{ccc} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ \frac{\delta}{(\delta, \omega_1)} s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ \frac{\delta}{(\delta, \omega_1)} s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{array} \right\| \in L(\Omega, \Delta), \text{ тобто } P_M = (L_M^B)^{-1} P_B.$$

Оскільки матриця T також є спільним правим кратним матриць A та B , то, аналогічно міркуючи, отримаємо, що $P_A = L_T^A P_T$, тобто $P_T = (L_T^A)^{-1} P_A$,

$$\text{де } P_T \in P_T, \quad L_T^A = \left\| \begin{array}{ccc} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ \frac{\varepsilon}{(\varepsilon, \gamma_1)} t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ \frac{\varepsilon}{(\varepsilon, \gamma_1)} t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{array} \right\| \in L(\Gamma, E). \text{ Аналогічно } P_B = L_T^B P_T, \text{ де}$$

$$L_T^B = \left\| \begin{array}{ccc} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ \frac{\delta}{(\delta, \gamma_1)} f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ \frac{\delta}{(\delta, \gamma_1)} f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{array} \right\| \in L(\Gamma, \Delta). \text{ Отримаємо, що } P_T = (L_T^B)^{-1} P_B.$$

Згідно з теоремою 1, матриця M буде лівим дільником матриці T , якщо $P_M = L_T P_T$, тобто $L_T = P_M P_T^{-1} \in L(\Gamma, \Omega)$. Розглянемо добуток матриць

$$P_M P_T^{-1} = (L_M^A)^{-1} P_A ((L_T^A)^{-1} P_A)^{-1} = (L_M^A)^{-1} P_A P_A^{-1} L_T^A = (L_M^A)^{-1} L_T^A =$$

$$= \underbrace{\left\| \begin{array}{ccc} l'_{11} & l'_{12} & l'_{13} \\ \frac{\varepsilon}{(\varepsilon, \omega_1)} l'_{21} & l'_{22} & l'_{23} \\ \frac{\varepsilon}{(\varepsilon, \omega_1)} l'_{31} & l'_{32} & l'_{33} \end{array} \right\|}_{(L_M^A)^{-1}} \cdot \underbrace{\left\| \begin{array}{ccc} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ \frac{\varepsilon}{(\varepsilon, \gamma_1)} t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ \frac{\varepsilon}{(\varepsilon, \gamma_1)} t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{array} \right\|}_{L_T^A} =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ \left(\frac{\varepsilon}{(\varepsilon, \omega_1)}, \frac{\varepsilon}{(\varepsilon, \gamma_1)} \right) h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ \left(\frac{\varepsilon}{(\varepsilon, \omega_1)}, \frac{\varepsilon}{(\varepsilon, \gamma_1)} \right) h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{array} \right\| = K.$$

Врахувавши лему 1 (рівність 2) із праці [1], отримаємо, що

$$\left(\frac{\varepsilon}{(\varepsilon, \omega_1)}, \frac{\varepsilon}{(\varepsilon, \gamma_1)} \right) = \frac{\varepsilon}{(\varepsilon, [\omega_1, \gamma_1])} = \frac{\varepsilon}{(\varepsilon, \gamma_1)}.$$

Тобто

$$K = \left\| \begin{array}{ccc} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ \frac{\varepsilon}{(\varepsilon, \gamma_1)} h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ \frac{\varepsilon}{(\varepsilon, \gamma_1)} h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{array} \right\|.$$

З іншого боку, $P_M P_T^{-1} = (L_M^B)^{-1} P_B ((L_T^B)^{-1} P_B)^{-1} = (L_M^B)^{-1} P_B P_B^{-1} L_T^B = (L_M^B)^{-1} L_T^B =$

$$= \left\| \begin{array}{ccc} s'_{11} & s'_{12} & s'_{13} \\ \frac{\delta}{(\delta, \omega_1)} s'_{21} & s'_{22} & s'_{23} \\ \frac{\delta}{(\delta, \omega_1)} s'_{31} & s'_{32} & s'_{33} \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{ccc} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ \frac{\delta}{(\delta, \gamma_1)} f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ \frac{\delta}{(\delta, \gamma_1)} f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ \frac{\delta}{(\delta, \gamma_1)} h'_{21} & h_{22} & h_{23} \\ \frac{\delta}{(\delta, \gamma_1)} h'_{31} & h_{32} & h_{33} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{array} \right\| = K.$$

Оскільки $\frac{\varepsilon}{(\varepsilon, \gamma_1)} |k_{21}|$ та $\frac{\delta}{(\delta, \gamma_1)} |k_{21}|$, то

$$\left[\frac{\varepsilon}{(\varepsilon, \gamma_1)}, \frac{\delta}{(\delta, \gamma_1)} \right] |k_{21}|.$$

Врахувавши лему 1 (рівність 4) із праці [1], отримаємо, що

$$\left[\frac{\varepsilon}{(\varepsilon, \gamma_1)}, \frac{\delta}{(\delta, \gamma_1)} \right] = \frac{[\varepsilon, \delta]}{([\varepsilon, \delta], \gamma_1)}.$$

Зауваживши, що згідно з умовою цієї теореми $[\varepsilon, \delta] = \omega_2$, тоді

$$\frac{[\varepsilon, \delta]}{([\varepsilon, \delta], \gamma_1)} = \frac{\omega_2}{(\omega_2, \gamma_1)} |k_{21}|.$$

Аналогічно $\frac{[\varepsilon, \delta]}{([\varepsilon, \delta], \gamma_1)} |k_{31}|$. Оскільки також $[\varepsilon, \delta] = \omega_3$, то

$$\frac{\omega_3}{(\omega_3, \gamma_1)} |k_{31}|.$$

Отримаємо, що $K \in L(\Gamma, \Omega)$. А це означає, що $T = MN$, де $N \in M_3(R)$.

1. Романів А. М., Щедрик В. П. Найбільший спільний лівий дільник та найменше спільне праве кратне матриць другого порядку // Мат. вісник НТШ. – 2012. – 9. – С. 269–284.
2. Щедрик В. П. Кільця Безу стабільного рангу 1,5 та розкладність повної лінійної групи у добуток її підгруп // Укр. мат. журн. – 2017. – 69, № 1. – С. 113–120.

3. Щедрик В. П. Кільця стабільного рангу 1,5 // Укр. мат. журн. – 2015. – 67, № 6. – С. 849–860.
4. Bass H. *K*-theory and stable algebra // Publ. Math. I.H.E.S. – 1964. – 22. – P. 5–60.
5. Kaplansky I. Elementary divisor and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – 66. – P. 464–491.
6. MacDuffee C. C. Matrices with elements in a principal ideal ring // Bull. Amer. Math. Soc. – 1933. – 39, No. 8. – P. 564–584.
7. Romaniv A. M. On the Smith normal form of least common multiple matrices from some class of matrices // Mat. Met. Fiz.-Mekh. Polya. – 2021. – 64, No. 2. – P. 47–51. – <https://doi.org/10.15407/mmpmf2021.64.2.47-51>.
8. Romaniv A. M. On the structure of least common multiple matrices from some class of matrices // Carpathian Math. Publ. – 2018. – 10, No. 1. – P. 179–184.
9. Shchedryk V. Factorization of matrices over elementary divisor domain // Algebra Discrete Math. – 2009. – No. 2. – P. 79–98.
10. Stewart B. M. A note on least common left multiples // Bull. Amer. Math. Soc. – 1949. – 55, No. 6. – P. 587–591.

ON THE DIVISIBILITY OF COMMON MULTIPLES OF MATRICES OF THE THIRD ORDER OVER COMMUTATIVE BEZOUT DOMAINS OF STABLE RANGE 1,5

Over commutative Bezout domains of stable range 1,5 for nonsingular matrices of the third order, under certain restrictions on invariant factors, the relationship between the divisibility of common right multiples of the matrices and invariant factors of the matrices and their multiples are established.

Keywords: commutative Bezout domain, stable range 1,5, common multiple of matrices, Smith form.

¹ Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

² Нац. ун-т “Львівська політехніка”, Львів.