

ВИЗНАЧЕННЯ СТАТИЧНИХ ТЕРМОНАПРУЖЕНЬ У ПРУЖНОМУ ПРОСТОРІ З ВИКОРИСТАННЯМ ФУНКЦІЙ ВІГАКА

Ефективність побудови аналітичних розв'язків просторових задач теорії пружності та термopужності у термінах напружень залежить від вирішення проблеми перевизначеності системи ключових рівнянь. Ця проблема, яка тісно пов'язана з класичним парадоксом Саусвелла, стосується вибору із системи трьох рівнянь рівноваги та шести рівнянь Бельтрамі–Мічелла достатньої кількості незалежних рівнянь для визначення шести компонент тензора напружень. Для розв'язання просторової задачі термopужності у необмеженому тілі за довільного локального розподілу температурного поля використано метод безпосереднього інтегрування із застосуванням функцій Вігака. Встановлено, що для цієї задачі три функції Вігака визначають за інтегральними виразами через єдину функцію, для якої отримано інтегральне рівняння. У просторі потрібного інтегрального перетворення Фур'є одержано явний вираз уведеної функції через задане температурне поле. Показано, що із системи шести рівнянь суцільності в напруженнях можна без втрати загальності вибрати три ключові рівняння сімнадцятьма різними способами, що узгоджується з висновками, отриманими іншими шляхами.

Ключові слова: тривимірна задача термopужності, функції Вігака, інтегральні умови, пружний простір, рівняння суцільності.

Не зважаючи на те, що класичну теорію пружності сформовано в окрему наукову дисципліну ще зі середини XIX століття, у ній досі залишається чимало невирішених проблем і парадоксальних результатів. Один із парадоксальних результатів отримав англійський математик та інженер-дослідник сер Річард Вінн Саусвелл (sir Richard Vynne Southwell) ще в 1936 р. Хоч сам парадокс Саусвелла не стосувався саме рівнянь у напруженнях, проте він безпосередньо пов'язаний із явною перевизначеністю системи «незалежних» рівнянь сумісності деформацій Сен-Венана в тривимірному формулюванні задач теорії пружності.

Намагаючись мінімізувати вираз для повної енергії деформації U у пружному тілі V , обмеженому гладкою поверхнею ∂V із напрямними косинусами (l, n, m) , Саусвелл з використанням теореми Кастильйо записав варіацію δU у формі [11]

$$\delta U = \iiint_V (\varepsilon_{xx} \delta \sigma_{xx} + \dots + \varepsilon_{yx} \delta \sigma_{yx} + \dots) dx dy dz, \quad (1)$$

де $\varepsilon_{k\ell}$ та $\sigma_{k\ell}$ – компоненти симетричних тензорів деформації та напружень, $\{k, \ell\} = \{x, y, z\}$, x, y, z – безрозмірні декартові координати.

Із допомогою потенціальних функцій Максвелла χ_j , $j = 1, 2, 3$, які пов'язано із напруженнями співвідношеннями [9]

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial y^2}, \dots, \\ \sigma_{yz} &= -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial y \partial z}, \dots, \end{aligned} \quad (2)$$

варіацію енергії пружної деформації подано у вигляді

 yuzvyaky@ukr.net

$$\delta U = \iiint_V \left(\varepsilon_{xx} \left(\frac{\partial^2 \delta \chi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \delta \chi_3}{\partial y^2} \right) + \dots - \varepsilon_{yz} \frac{\partial^2 \delta \chi_1}{\partial y \partial z} - \dots \right) dx dy dz. \quad (3)$$

У разі застосування з тією ж метою функцій Морери ψ_1, ψ_2, ψ_3 , які пов'язані з напруженнями за допомогою співвідношень [9]

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y \partial z}, \dots, \quad \sigma_{yz} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi_3}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right), \dots, \quad (4)$$

варіація (1) набуває вигляду

$$\delta U = \iiint_V \left(\varepsilon_{xx} \frac{\partial^2 \delta \psi_1}{\partial y \partial z} + \dots - \frac{\varepsilon_{yz}}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \delta \psi_3}{\partial z} + \frac{\partial \delta \psi_2}{\partial y} - \frac{\partial \delta \psi_1}{\partial x} \right) - \dots \right) dx dy dz. \quad (5)$$

Вживаючи перетворення Гріна до виразу (3), Саусвелл одержав:

$$\begin{aligned} \delta U = & \iiint_V \left(\delta \chi_1 \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} \right) + \dots \right) dx dy dz + \\ & + \frac{1}{2} \iint_{\partial V} \left((2m\varepsilon_{zz} - n\varepsilon_{yz}) \frac{\partial \delta \chi_1}{\partial y} + (2n\varepsilon_{yy} - m\varepsilon_{yz}) \frac{\partial \delta \chi_1}{\partial z} + \right. \\ & \left. + \left(\left(m \frac{\partial}{\partial z} + n \frac{\partial}{\partial y} \right) \varepsilon_{yz} - 2m \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial y} - 2n \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial z} \right) \right) ds. \end{aligned} \quad (6)$$

Аналогічно на основі виразу (5) він отримав

$$\begin{aligned} \delta U = & \iiint_V \left(\left(2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) \right) \delta \psi_1 + \dots \right) dx dy dz + \\ & + \frac{1}{2} \iint_{\partial V} \left(\left(\left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) \delta \psi_1 + \varepsilon_{yz} \frac{\partial \delta \psi_1}{\partial x} \right) l + \right. \\ & + \left(\varepsilon_{xx} \frac{\partial \delta \psi_1}{\partial z} - \delta \psi_1 \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z} - \varepsilon_{xz} \frac{\partial \delta \psi_1}{\partial x} \right) m + \\ & \left. + \left(\varepsilon_{xx} \frac{\partial \delta \psi_1}{\partial y} - \delta \psi_1 \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} - \varepsilon_{xy} \frac{\partial \delta \psi_1}{\partial x} \right) n + \dots \right) ds. \end{aligned} \quad (7)$$

У виразах (6) та (7) через ds позначено елемент поверхні ∂V .

Оскільки варіації $\delta \chi_1, \delta \chi_2, \delta \chi_3$ є довільними функціями, рівність нулю об'ємного інтеграла в (6) означає рівність нулю його інтегранда, звідки

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (8)$$

Аналогічно на основі виразу (7) встановлено такі рівності:

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right), \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} \right), \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Рівняння груп (8) і (9) – добре відомі рівняння сумісності деформацій Сен-Венана [13], які класично отримують, вилучаючи компоненти вектора переміщень з рівнянь Коші [14]. У межах класичної теорії пружності ці групи рівнянь використовують для виведення шести рівнянь Бельтрамі–Мічелла, які разом із трьома рівняннями рівноваги складають перевизначену систему дев'яти ключових рівнянь для відшукування шести невідомих компонент симетричного тензора напружень.

Той факт, що за використання функцій Максвелла (2) мінімізація пружної енергії деформації призводить лише до групи рівнянь (8), а за вживання функцій Морери (4) – лише групи рівнянь (9), названий парадоксом Саусвелла, спричинив довготривалу дискусію у наукових колах щодо можливої лінійної залежності окремих рівнянь у цих групах, а також щодо того, які саме рівняння є незалежними і слід використовувати під час розв'язування тривимірних задач теорії пружності [3, 5–8, 10, 12, 16 та ін.].

У праці [1] методом безпосереднього інтегрування В. М. Вігак показав, що будь-які три зі шести рівнянь (8), (9) можна використати для визначення компонент вектора переміщень, а інші три – для утворення еквівалентних наборів (у сімнадцять різних способів комбінування) рівнянь сумісності деформацій, які для обмежених областей, взагалі кажучи, є інтегро-диференціальними. У межах цього ж методу у працях [4, 15, 17] запроваджено визначальні функції, названі функціями Вігака, які є альтернативними до потенціальних функцій (2), (4). На відміну від класичних потенціальних функцій, вирази компонент тензора напружень через функції Вігака уведено не диференціальними, а інтегральними виразами. Переваги виконання функцій Вігака для розв'язання просторових задач теорії пружності та термопружності для обмежених областей з кутовими точками наголошено у публікаціях [15, 17, 18].

У цій статті метод безпосереднього інтегрування із використанням функцій Вігака застосовано для побудови аналітичного розв'язку тривимірної задачі теорії термопружності у необмеженому тілі за довільно заданого локального розподілу температурного поля. При цьому показано, що функції Вігака можна виразити через єдину функцію, а рівняння (8) та (9) зведено до єдиного рівняння для її визначення.

1. Формулювання задачі. Розглянемо квазістатичну задачу термопружності для однорідного ізотропного простору в декартовій системі координат (x, y, z) . Для знаходження шести компонент тензора напружень $\sigma_{k\ell} = \sigma_{\ell k}$, $\{k, \ell\} = \{x, y, z\}$, що описують термопружний стан простору, зумовлений відомим локальним розподілом температурного поля $T(x, y, z)$, маємо три рівняння рівноваги

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0, \quad (10)$$

та шість рівнянь суцільності

$$(1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} \right) = \Delta_{xy} (\nu \sigma - T), \quad (11a)$$

$$(1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial y \partial z} \right) = \Delta_{yz} (\nu \sigma - T), \quad (11b)$$

$$(1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial x \partial z} \right) = \Delta_{xz} (\nu \sigma - T), \quad (11c)$$

$$(1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial x \partial y} \right) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\nu \sigma - T), \quad (11d)$$

$$(1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial y \partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} (\nu \sigma - T), \quad (11e)$$

$$(1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial x \partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\nu \sigma - T), \quad (11f)$$

де $\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$, $\Delta_{k\ell} = \partial^2 / \partial k^2 + \partial^2 / \partial \ell^2$, $\{k, \ell\} = \{x, y, z\}$, $k \neq \ell$, ν – коефіцієнт Пуассона. Напруження у рівняннях (10), (11) мають розмірність температури через нормування фактичних напружень за величиною $E\alpha_T$, де E – модуль пружності, α_T – коефіцієнт лінійного температурного розширення. Систему рівнянь (10), (11) розв'язуватимемо за умови згасання напружень та температурного поля у безмежно віддалених точках, тобто при $x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty$.

Зауважимо, що рівняння (11a), (11b) та (11c) отримано із використанням рівнянь сумісності деформацій (8), а рівняння (11d), (11e) та (11f) – на основі (9). Тому визначальна система рівнянь (10), (11) є перевизначеною, оскільки для шести шуканих компонент тензора напружень маємо дев'ять диференціальних рівнянь.

2. Побудова розв'язку. Для розв'язання сформульованої задачі використаємо метод безпосереднього інтегрування [1, 3, 17]. Рівняння рівноваги (10) задовольнятимуться тотожно [15, 17], якщо компоненти тензора напружень подати у вигляді інтегральних залежностей від трьох функцій $\mathcal{V}_\ell(x, y, z)$, $\ell = x, y, z$, так:

$$\sigma_{xx}(x, y, z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{V}_y(\xi, y, z) + \mathcal{V}_z(\xi, y, z)) |x - \xi| d\xi,$$

$$\sigma_{yy}(x, y, z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{V}_x(x, \eta, z) + \mathcal{V}_z(x, \eta, z)) |y - \eta| d\eta,$$

$$\sigma_{zz}(x, y, z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{V}_x(x, y, \zeta) + \mathcal{V}_y(x, y, \zeta)) |z - \zeta| d\zeta,$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy}(x, y, z) &= -\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{V}_z(\xi, \eta, z) \operatorname{sgn}(x - \xi) \operatorname{sgn}(y - \eta) d\xi d\eta, \\
\sigma_{xz}(x, y, z) &= -\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{V}_y(\xi, y, \zeta) \operatorname{sgn}(x - \xi) \operatorname{sgn}(z - \zeta) d\xi d\zeta, \\
\sigma_{yz}(x, y, z) &= -\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{V}_x(x, \eta, \zeta) \operatorname{sgn}(y - \eta) \operatorname{sgn}(z - \zeta) d\eta d\zeta.
\end{aligned} \tag{12}$$

Оскільки за використання виразів для напружень (12) рівняння (10) задовольняються, вирази для функцій Вігака $\mathcal{V}_\ell(x, y, z)$, $\ell = x, y, z$, вочевидь, слід визначити шляхом розв'язання перевизначеної системи рівнянь (11) з урахуванням подань (12).

Зауважимо, що умови зникання напружень та їх похідних, якщо $x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty$, які є фізично обумовленими за локального розподілу температурного поля, виконуються, якщо введені співвідношеннями (12) функції задовольняють такі інтегральні умови:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{V}_k d\ell = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \ell \mathcal{V}_k d\ell = 0, \quad \{k, \ell\} = \{x, y, z\}, \quad k \neq \ell. \tag{13}$$

Враховуючи умови (13), для побудови розв'язку поставленої задачі можна застосувати потрібне інтегральне перетворення Фур'є за координатами x, y, z з параметрами перетворень p, q, r :

$$\bar{f} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) \exp(-i(xp + yq + zr)) dx dy dz, \tag{14}$$

де $i^2 = -1$, а $f(x, y, z)$ – функція трьох змінних, для якої інтеграл у (14) має сенс.

У просторі зображень перетворення (14) рівняння (11) набувають вигляду

$$\begin{aligned}
&p^2(p^2 r^2 - v q^2 t^2) \bar{\mathcal{V}}_x + q^2(q^2 r^2 - v p^2 t^2) \bar{\mathcal{V}}_y + \\
&+ r^2(p^2 + q^2)^2 \bar{\mathcal{V}}_z = p^2 q^2 r^2 (p^2 + q^2) \bar{T},
\end{aligned} \tag{15a}$$

$$\begin{aligned}
&p^2(q^2 + r^2)^2 \bar{\mathcal{V}}_x + q^2(q^2 p^2 - v r^2 t^2) \bar{\mathcal{V}}_y + \\
&+ r^2(p^2 r^2 - v q^2 t^2) \bar{\mathcal{V}}_z = p^2 q^2 r^2 (r^2 + q^2) \bar{T},
\end{aligned} \tag{15б}$$

$$\begin{aligned}
&p^2(p^2 q^2 - v r^2 t^2) \bar{\mathcal{V}}_x + q^2(p^2 + r^2) \bar{\mathcal{V}}_y + \\
&+ r^2(q^2 r^2 - v p^2 t^2) \bar{\mathcal{V}}_z = p^2 q^2 r^2 (r^2 + p^2) \bar{T},
\end{aligned} \tag{15в}$$

$$p^2(q^2 + r^2) \bar{\mathcal{V}}_x - q^2(q^2 + v t^2) \bar{\mathcal{V}}_y + r^2(p^2 + q^2) \bar{\mathcal{V}}_z = p^2 q^2 r^2 \bar{T}, \tag{15г}$$

$$p^2(q^2 + r^2) \bar{\mathcal{V}}_x + q^2(r^2 + p^2) \bar{\mathcal{V}}_y - r^2(r^2 + v t^2) \bar{\mathcal{V}}_z = p^2 q^2 r^2 \bar{T}, \tag{15r}$$

$$-p^2(p^2 + v t^2) \bar{\mathcal{V}}_x + q^2(r^2 + p^2) \bar{\mathcal{V}}_y + r^2(p^2 + q^2) \bar{\mathcal{V}}_z = p^2 q^2 r^2 \bar{T}, \tag{15д}$$

де $t^2 = p^2 + q^2 + r^2$.

Аналіз лінійно залежної системи рівнянь (15) свідчить, що із двадцяти можливих комбінацій вибору трійки незалежних рівнянь для визначення трьох функцій $\mathcal{V}_\ell(x, y, z)$, $\ell = x, y, z$, лише три трійки не дають однозначного розв'язку, зокрема, поєднання рівнянь (15a), (15г), (15r) та (15в), (15г), (15д),

а також (15б), (15д), (15е), що підтверджує результат, наведений раніше [1]. В оригіналі ці три трійки – це групи рівнянь (11а), (11з), (11д) та (11б), (11р), (11д), а також (11в), (11з), (11д). Як видно, ці системи не містять другої похідної по одній із координат. Решта сімнадцять можливих трійок забезпечують єдиний розв'язок:

$$\bar{\mathcal{V}}_x = \frac{r^2 q^2}{(1-v)t^2} \bar{T}, \quad \bar{\mathcal{V}}_y = \frac{r^2 p^2}{(1-v)t^2} \bar{T}, \quad \bar{\mathcal{V}}_z = \frac{p^2 q^2}{(1-v)t^2} \bar{T}. \quad (16)$$

З допомогою виразів (16) та співвідношень (12) у просторі перетворення (14) знаходимо компоненти тензора напружень:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx} &= -\frac{q^2 + r^2}{(1-v)t^2} \bar{T}, & \bar{\sigma}_{yy} &= -\frac{p^2 + r^2}{(1-v)t^2} \bar{T}, & \bar{\sigma}_{zz} &= -\frac{q^2 + p^2}{(1-v)t^2} \bar{T}, \\ \bar{\sigma}_{xy} &= \frac{pq}{(1-v)t^2} \bar{T}, & \bar{\sigma}_{yz} &= \frac{qr}{(1-v)t^2} \bar{T}, & \bar{\sigma}_{xz} &= \frac{pr}{(1-v)t^2} \bar{T}. \end{aligned} \quad (17)$$

Таким чином, використовуючи будь-яку групу трьох рівнянь зі сімнадцяти комбінацій, які мають однозначний розв'язок, можна встановити вирази (16), а отже визначити напруження у вигляді (17).

Зауважимо, що для розглянутої задачі для необмеженого тіла за локального розподілу температурного поля (аналогічні висновки можна зробити й для заданих масових сил, які, однак, потрібно відповідно змодельовати локальними розподілами) із формул (16) випливають рівності

$$p^2 \bar{\mathcal{V}}_x = q^2 \bar{\mathcal{V}}_y = r^2 \bar{\mathcal{V}}_z = \bar{\Phi} = \frac{p^2 q^2 r^2}{(1-v)t^2} \bar{T}, \quad (18)$$

або

$$\bar{\mathcal{V}}_x = \frac{\bar{\Phi}}{p^2}, \quad \bar{\mathcal{V}}_y = \frac{\bar{\Phi}}{q^2}, \quad \bar{\mathcal{V}}_z = \frac{\bar{\Phi}}{r^2}. \quad (19)$$

Повернувшись у формулах (19) до оригіналу з використанням оберненого перетворення

$$f(x, y, z) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(p, q, r) \exp(i(xp + yq + zr)) dp dq dr, \quad (20)$$

отримаємо вирази

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_x(x, y, z) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi, y, z) |x - \xi| d\xi, \\ \mathcal{V}_y(x, y, z) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, \eta, z) |y - \eta| d\eta, \\ \mathcal{V}_z(x, y, z) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, y, \zeta) |z - \zeta| d\zeta. \end{aligned} \quad (21)$$

Застосувавши (20) до виразів (18), знаходимо вирази компонент тензора напружень через єдину скалярну функцію:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x, y, z) &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi, \eta, \zeta) (|z - \zeta| \delta(y - \eta) + \\ &+ |y - \eta| \delta(z - \zeta)) |x - \xi| d\xi d\eta d\zeta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{yy}(x, y, z) &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi, \eta, \zeta) (|z - \zeta| \delta(x - \xi) + \\
&\quad + |x - \xi| \delta(z - \zeta)) |y - \eta| d\xi d\eta d\zeta, \\
\sigma_{zz}(x, y, z) &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi, \eta, \zeta) (|y - \eta| \delta(x - \xi) + \\
&\quad + |x - \xi| \delta(y - \eta)) |z - \zeta| d\xi d\eta d\zeta, \\
\sigma_{xy}(x, y, z) &= -\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi, \eta, \zeta) |z - \zeta| \operatorname{sgn}(x - \xi) \times \\
&\quad \times \operatorname{sgn}(y - \eta) d\xi d\eta d\zeta, \\
\sigma_{yz}(x, y, z) &= -\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi, \eta, \zeta) |x - \xi| \operatorname{sgn}(z - \zeta) \times \\
&\quad \times \operatorname{sgn}(y - \eta) d\xi d\eta d\zeta, \\
\sigma_{xz}(x, y, z) &= -\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi, \eta, \zeta) |y - \eta| \operatorname{sgn}(x - \xi) \operatorname{sgn}(z - \zeta) d\xi d\eta d\zeta \quad (22)
\end{aligned}$$

Тут $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака. Зауважимо, що у праці [2] аналогічні формули отримано для плоскої задачі теорії пружності у неоднорідній прямокутній області, де функцію, через яку виражено напруження, названо густиною дотичних напружень.

Вирази (22) є альтернативною формою виразів (12) з урахуванням (19) або (21). Не складно переконатись, що як і за використання (12), рівняння рівноваги (10) задовольняються тотожно і для виразів (22). Рівняння суцільності (11) після підставлення (22) набувають вигляду

$$\begin{aligned}
\Delta_{xy} \left(\sigma - \frac{2}{1-\nu} T \right) &= 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\sigma - \frac{2}{1-\nu} T \right) = 0, \\
\Delta_{xz} \left(\sigma - \frac{2}{1-\nu} T \right) &= 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\sigma - \frac{2}{1-\nu} T \right) = 0, \\
\Delta_{yz} \left(\sigma - \frac{2}{1-\nu} T \right) &= 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\sigma - \frac{2}{1-\nu} T \right) = 0. \quad (23)
\end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned}
\sigma(x, y, z) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi, \eta, \zeta) G(x - \xi, y - \eta, z - \zeta) d\xi d\eta d\zeta, \\
G(x - \xi, y - \eta, z - \zeta) &= |x - \xi| |y - \eta| \delta(z - \zeta) + \\
&\quad + |x - \xi| |z - \zeta| \delta(y - \eta) + |y - \eta| |z - \zeta| \delta(x - \xi). \quad (24)
\end{aligned}$$

Для необмеженого тіла всі шість рівнянь (23) з урахуванням позначень (24) звели до одного інтегрального рівняння

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi, \eta, \zeta) G(x - \xi, y - \eta, z - \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \frac{2}{1-\nu} T(x, y, z). \quad (25)$$

Рівняння (25) є ключовим інтегральним рівнянням тривимірної задачі термопружності для простору за відомого розподілу температурного поля $T(x, y, z)$. Після визначення функції Φ з цього рівняння компоненти тензора напружень не важко обчислити за формулами (22). Ключове рівняння (25) зручно розв'язувати у просторі зображень. Не складно показати, що, застосувавши до (25) потрібне інтегральне перетворення Фур'є (14), отримаємо просте співвідношення

$$\left(\frac{1}{p^2 q^2} + \frac{1}{p^2 r^2} + \frac{1}{r^2 q^2} \right) \bar{\Phi} = \frac{1}{1-\nu} \bar{T},$$

звідки знаходимо розв'язок (18).

Висновки. З використанням методу безпосереднього інтегрування побудовано розв'язок просторової задачі термопружності для необмеженого тіла за локального розподілу температурного поля. За допомогою уведених трьох функцій Вігака (12) рівняння рівноваги задоволено тотожно, а шість рівнянь суцільності в напруженнях записано у просторі потрібного інтегрального перетворення Фур'є. Такий запис дав змогу виявити три трійки рівнянь, для яких неможливо побудувати розв'язок цієї системи. За використання будь-якої іншої комбінації трьох рівнянь суцільності у просторі зображень Фур'є, які можна отримати сімнадцятьма різними способами, розв'язок подано в єдиному вигляді, з якого випливає, що усі три функції Вігака можна визначити через єдину скалярну функцію виразами (19) або (21). Записано вирази компонент тензора напружень через цю функцію, а також встановлено інтегральне рівняння (25) для її визначення. Це рівняння зручно застосовувати, зокрема, для числової реалізації, коли використання прямого (14) або оберненого (20) перетворення є ускладненим для певних розподілів температурного поля.

1. Вігак В. М. Рівняння суцільності для деформівного твердого тіла // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 1998. – 41, № 2. – С. 117–123.
Те саме: Vihak V. M. Continuity equations for a deformable solid // *J. Math. Sci.* – 2000. – 99, No. 5. – P. 1655–1661. – <https://doi.org/10.1007/BF02674189>.
2. Калиняк Б. М. Зведення задачі пружності для неоднорідної прямокутної області до інтегро-диференціальних рівнянь // *Прикл. проблеми механіки і математики.* – 2012. – № 10. – С. 168–171.
3. Калиняк Б. М., Токовий Ю. В., Ясінський А. В. Прямі та обернені задачі термомеханіки стосовно оптимізації та ідентифікації термонапруженого стану деформівних твердих тіл // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2016. – 59, № 3. – С. 28–42.
Те саме: Kalynyak B. M., Tokovyy Y. V., Yasinskyi A. V. Direct and inverse problems of thermomechanics concerning the optimization and identification of the thermal stressed state of deformed solids // *J. Math. Sci.* – 2019. – 236, No. 1. – P. 21–34. – <https://doi.org/10.1007/s10958-018-4095-3>.
4. Кушнір Р. М., Токовий Ю. В., Юзв'як М. Й., Ясінський А. В. Зведення двовимірних задач термопружності для тіл з кутовими точками до ключових інтегро-диференціальних рівнянь // *Укр. мат. журнал.* – 2021. – 73, № 10. – С. 1355–1367. – <https://doi.org/10.37863/umzh.v73i10.6784>.
Те саме: Kushnir R. M., Tokovyi Y. V., Yuzvyak M. Y., Yasinskyi A. V. Reduction of the two-dimensional thermoelasticity problems for solids with corner points to key integrodifferential equations // *Ukr. Math. J.* – 2022. – 73, No. 10. – P. 1566–1579. – <https://doi.org/10.1007/s11253-022-02014-4>.
5. Малый В. И. Об одном представлении условий совместности деформаций // *Прикл. математика и механика.* – 1986. – 50, № 5. – С. 872–875.
6. Малый В. И. Независимые условия совместности напряжений для упругого изотропного тела // *Докл. АН СССР, сер. А.* – 1987. – № 7. – С. 43–46.

7. Andrianov I. V., Awrejcewicz J. Compatibility equations in the theory of elasticity // J. Vib. Acoust. – 2003. – 125, No. 2. – P. 244–245.
– <https://doi.org/10.1115/1.1547681>.
8. Kozák I. Remarks and contributions to the variational principles of the linearized theory of elasticity in terms of the stress functions // Acta Tech. Acad. Sci. Hung. – 1981. – 92, No. 1-2. – P. 45–65.
9. Love A. E. H. A treatise on the mathematical theory of elasticity. – Cambridge: Cambridge University Press, 1906. – 354 p.
10. Ostrosablin N. I. Compatibility conditions of small deformations and stress functions // J. Appl. Mech. Tech. Phys. – 1997. – 38, No. 5. – P. 774–783.
– <https://doi.org/10.1007/BF02467892>.
11. Southwell R. V. Castigliano's principle of minimum strain-energy // Proc. Royal Soc. London A. – 1936. – 154, No. 881 – P. 4–21. – <https://doi.org/10.1098/rspa.1936.0033>.
12. Southwell R. V. Castigliano's principle of minimum strain-energy, and the conditions of compatibility for strain // Phil. Mag. – 1940. – 30, No. 200 – P. 252–258.
– <https://doi.org/10.1080/14786444008520715>.
13. Timoshenko S. P. History of strength of materials: with a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures. – New York: McGraw-Hill, 1953. – 425 p.
14. Timoshenko S. P., Goodier J. N. Theory of elasticity. – New York: McGraw-Hill Book Company, 1951. – 506 p.
15. Tokovyy Y., Yuzvyak M. Spatial stress analysis in an elastic parallelepiped // J. Mech. – 2024. – 40. – P. 625–643. – <https://doi.org/10.1093/jom/ufae049>.
16. Washizu K. A note on the conditions of compatibility // J. Math. Phys. – 1957. – 36, No. 1–4. – P. 306–312. – <https://doi.org/10.1002/sapm1957361306>.
17. Yuzvyak M., Tokovyy Y. Thermal stresses in an elastic parallelepiped // J. Thermal Stresses. – 2022. – 45, No. 12. – P. 1009–1028.
– <https://doi.org/10.1080/01495739.2022.2120940>.
18. Yuzvyak M., Tokovyy Y., Yasinskyy A. Axisymmetric thermal stresses in an elastic hollow cylinder of finite length // J. Thermal Stresses. – 2021. – 44, No. 3. – P. 359–376. – <https://doi.org/10.1080/01495739.2020.1826376>.

DETERMINATION OF THE STEADY-STATE THERMAL STRESSES IN AN ELASTIC SPACE THROUGH THE USE OF VIHAK'S FUNCTIONS

The efficiency in constructing analytical solutions to the spatial elasticity and thermoelasticity problems in terms of stresses relies on clarifying the problem concerned with the overdetermined system of governing equations. The latter problem is closely connected to the classical Southwell paradox which implies the selection of a sufficient number of independent equations for the determination of the six stress tensor components out of the system of three equilibrium and six Beltrami–Michell equations. In this paper, the direct integration method is employed along with Vihak's functions for solving a spatial thermoelasticity problem in an unbounded solid subject to an arbitrary local distribution of the temperature field. It is shown that three Vihak's functions for this problem can be expressed through a single function, for which an integral equation is derived. In the mapping domain of the triple Fourier integral transform, an explicit expression is obtained for the introduced function through the temperature field. It is shown that without loss of generality, there are seventeen different ways to select three governing equations out of six compatibility equations in terms of stresses which agrees well with conclusions drawn by other means.

Keywords: *three-dimensional thermoelasticity problem, Vihak's functions, integral conditions, elastic space, compatibility equations*