

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗГИНУ ЛОКАЛЬНО НАГРІТОЇ ОРТОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ ШАРУВАТОЇ СТРУКТУРИ

Досліджено згин прямокутної ортотропної пластини шаруватої нерегулярної структури за нестационарного локального нагрівання довкіллям. Для цього використано двовимірні рівняння теплопровідності та рівняння зсувної теорії першого порядку неоднорідних ортотропних пластин. Аналітичний розв'язок нестационарної задачі теплопровідності та квазістатичної задачі термopружності, за граничних умов шарнірного оперття, побудовано методами інтегрального перетворення Лапласа за часом та скінченного перетворення Фур'є за координатами. Числові результати наведено для тришарових пластин симетричної та несиметричної структур.

Ключові слова: термopружність, температурне навантаження, теплообмін, шаруваті пластини.

Вступ. Багатошарові композитні матеріали, які володіють унікальними властивостями, часто використовують у багатьох галузях сучасної техніки, зокрема, для зміцнення конструкції, теплоізоляції або інтенсифікації передачі тепла, захисту від агресивного середовища тощо. Тому дослідження напружено-деформованого стану (НДС) елементів конструкцій шаруватої структури – важлива інженерна задача.

Тонкостінні елементи неоднорідної структури досліджували [3, 4, 11] багато вчених. Зокрема, отримані [1, 2, 8, 9] аналітичні розв'язки про згин неоднорідних і композитних пластин за дії термомеханічного навантаження. Побудовані [10, 15] точні розв'язки задач термopружності для шаруватих пластин з використанням тривимірних рівнянь. Досліджували температурну стійкість [5, 14] та динамічну поведінку [6, 7] неоднорідних пластин зі змінною товщиною та дефектами. Застосовували [14, 16] числові методи для вивчення термopружних процесів у шаруватих пластинах. Вивчали [14] вплив термомеханічної взаємодії та залежності механічних властивостей від температури на термopружний стан п'єзоелектричних композитних пластин. Детальніший огляд різних моделей і методів дослідження неоднорідних тонкостінних конструкцій наведено в працях [4, 12, 13]. Однак у більшості з них використовували задане стаціонарне температурне поле, а не розв'язували рівняння теплопровідності, не враховували теплообміну з навколишнім середовищем.

Мета статті – на основі рівнянь термopружності теорії пластин з п'ятьма степенями свободи та двовимірних рівнянь теплопровідності з урахуванням конвективного теплообміну дослідити термopружний згин прямокутної ортотропної шаруватої пластини за нагріву її навколишнім середовищем.

1. Визначення напружено-деформованого стану. Розглянемо прямокутну пластину з розмірами $a \times b$ і сталою товщиною $2h$, виготовлену з неоднорідного в поперечному напрямку ортотропного матеріалу. В декартовій системі координат x, y, z пластина займає область $[0, a] \times [0, b] \times [-h, h]$.

Нехай на неї діють зовнішні сили, і вона нагрівається навколишнім середовищем шляхом конвективного теплообміну з поверхонь $z = \pm h$. Для дослідження НДС пластини використаємо основні рівняння термopружності двовимірної зсувної теорії першого порядку [2]. Цими рівняннями, записаними

✉ flyachok@ukr.net

для неоднорідного ортотропного матеріалу через узагальнені переміщення $u_1, u_2, w, \gamma_1, \gamma_2$, будуть:

– фізичні рівняння для напружень у довільній точці пластини

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= c_{11} (\partial_1 u_1 + z \partial_1 \gamma_1) + c_{12} (\partial_2 u_2 + z \partial_2 \gamma_2) - \beta_{11} t, \\ \sigma_{22} &= c_{12} (\partial_1 u_1 + z \partial_1 \gamma_1) + c_{22} (\partial_2 u_2 + z \partial_2 \gamma_2) - \beta_{22} t, \\ \sigma_{12} &= c_{66} (\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1 + z (\partial_1 \gamma_2 + \partial_2 \gamma_1)), \\ \sigma_{13} &= c_{55} (\gamma_1 + \partial_1 w), \\ \sigma_{23} &= c_{44} (\gamma_2 + \partial_2 w),\end{aligned}\quad (1)$$

де $\beta_{11} = c_{11} \alpha_{11}^t + c_{12} \alpha_{22}^t$; $\beta_{22} = c_{12} \alpha_{11}^t + c_{22} \alpha_{22}^t$; $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x, y, z, \tau)$; $c_{ij} = c_{ij}(z)$; $\beta_{ij} = \beta_{ij}(z)$; $\alpha_{ij}^t = \alpha_{ij}^t(z)$; $\partial_1 = \partial/\partial x$; $\partial_2 = \partial/\partial y$; $c_{ij}(z)$ – коефіцієнти пружності ортотропного тіла [11]; $\alpha_{ij}^t(z)$ – коефіцієнти теплового лінійного розширення; u_1, u_2, w – компоненти вектора переміщень точок середньої поверхні ($z = 0$); γ_1, γ_2 – кути повороту нормалі у напрямках x і y , відповідно; $t(x, y, z, \tau)$ – функція температурного поля; τ – змінна часу;

– фізичні рівняння для зусиль і моментів у середній поверхні

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & B_{11} & B_{12} \\ A_{12} & A_{22} & B_{12} & B_{22} \\ B_{11} & B_{12} & D_{11} & D_{12} \\ B_{12} & B_{22} & D_{12} & D_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 u_1 \\ \partial_2 u_2 \\ \partial_1 \gamma_1 \\ \partial_2 \gamma_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{11}^t T_1 + B_{11}^t T_2 / h \\ A_{22}^t T_1 + B_{22}^t T_2 / h \\ B_{11}^t T_1 + D_{11}^t T_2 / h \\ B_{22}^t T_1 + D_{22}^t T_2 / h \end{pmatrix}, \\ N_{12} &= A_{66} (\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2) + B_{66} (\partial_2 \gamma_1 + \partial_1 \gamma_2), \\ M_{12} &= B_{66} (\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2) + D_{66} (\partial_2 \gamma_1 + \partial_1 \gamma_2), \\ N_{13} &= k' A_{55} (\gamma_1 + \partial_1 w), \quad N_{23} = k' A_{44} (\gamma_2 + \partial_2 w),\end{aligned}\quad (2)$$

$$\text{де } \{A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}\} = \int_{-h}^h c_{ij}(z) \{1, z, z^2\} dz; \quad \{A_{ij}^t, B_{ij}^t, D_{ij}^t\} = \int_{-h}^h \beta_{ij}(z) \{1, z, z^2\} dz;$$

$$T_i = \frac{2i-1}{2h^i} \int_{-h}^h t z^{i-1} dz; \quad k' - \text{коефіцієнт зсуву [2];}$$

– рівняння рівноваги

$$\begin{aligned}& (A_{11} \partial_{11}^2 + A_{66} \partial_{22}^2) u_1 + (A_{12} + A_{66}) \partial_{12}^2 u_2 + (B_{11} \partial_{11}^2 + B_{66} \partial_{22}^2) \gamma_1 + \\ & + (B_{12} + B_{66}) \partial_{12}^2 \gamma_2 = -q_1 + A_{11}^t \partial_1 T_1 + B_{11}^t \partial_1 T_2 / h, \\ & (A_{12} + A_{66}) \partial_{12}^2 u_1 + (A_{66} \partial_{11}^2 + A_{22} \partial_{22}^2) u_2 + (B_{12} + B_{66}) \partial_{12}^2 \gamma_1 + \\ & + (B_{66} \partial_{11}^2 + B_{22} \partial_{22}^2) \gamma_2 = -q_2 + A_{22}^t \partial_2 T_1 + B_{22}^t \partial_2 T_2 / h, \\ & k' (A_{55} \partial_1^2 + A_{44} \partial_2^2) w + k' A_{55} \partial_1 \gamma_1 + k' A_{44} \partial_2 \gamma_2 = -q_3, \\ & (B_{11} \partial_{11}^2 + B_{66} \partial_{22}^2) u_1 + (B_{12} + B_{66}) \partial_{12}^2 u_2 - k' A_{55} \partial_1 w + \\ & + (D_{11} \partial_{11}^2 + D_{66} \partial_{22}^2 - k' A_{55}) \gamma_1 + (D_{12} + D_{66}) \partial_{12}^2 \gamma_2 =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -m_1 + B_{11}^t \partial_1 T_1 + D_{11}^t \partial_1 T_2 / h, \\
&(B_{12} + B_{66}) \partial_{12}^2 u_1 + (B_{66} \partial_{11}^2 + B_{22} \partial_{22}^2) u_2 - k' A_{44} \partial_2 w + (D_{12} + D_{66}) \partial_{12}^2 \gamma_1 + \\
&+ (D_{66} \partial_{11}^2 + D_{22} \partial_{22}^2 - k' A_{44}) \gamma_2 = -m_2 + B_{22}^t \partial_2 T_1 + D_{22}^t \partial_2 T_2 / h, \quad (3)
\end{aligned}$$

де q_i m_i – компоненти поверхневого навантаження [11];

– граничні умови шарнірного опертя країв пластини

$$\text{для } x = 0 \text{ і } x = a: w = u_2 = \gamma_2 = 0, N_1 = M_1 = 0,$$

$$\text{для } y = 0 \text{ і } y = b: w = u_1 = \gamma_1 = 0, N_2 = M_2 = 0. \quad (4)$$

Система диференціальних рівнянь (3) разом з граничними умовами (4) складає крайову квазістатичну задачу про визначення температурних напружень в ортотропних неоднорідних прямокутних пластинах через узагальнені переміщення. Для її розв'язання використаємо метод скінченного перетворення Фур'є. Тоді

$$\begin{aligned}
\{u_1, \gamma_1\} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \{U_{1mn}, \Gamma_{1mn}\} \cos \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi n}{b} y, \\
\{u_2, \gamma_2\} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \{U_{2mn}, \Gamma_{2mn}\} \sin \frac{\pi m}{a} x \cos \frac{\pi n}{b} y, \\
w &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi n}{b} y, \\
\{T_1, T_2\} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \{T_{1mn}, T_{2mn}\} \sin \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi n}{b} y. \quad (5)
\end{aligned}$$

Після підстановки виразів (5) у (3) одержимо систему алгебричних рівнянь для визначення коефіцієнтів Фур'є шуканих узагальнених переміщень:

$$\mathbf{M}\mathbf{U} = \mathbf{Q} + \mathbf{V}T_{1mn} + \mathbf{S}T_{2mn}, \quad (6)$$

де $\mathbf{U} = \{U_{1mn}, U_{2mn}, W_{mn}, \Gamma_{1mn}, \Gamma_{2mn}\}^T$ – матриця коефіцієнтів Фур'є узагальнених переміщень; $\mathbf{Q} = \{q_{1mn}, q_{2mn}, q_{3mn}, m_{1mn}, m_{2mn}\}^T$ – матриця коефіцієнтів Фур'є силового навантаження; T_{1mn} і T_{2mn} – коефіцієнти Фур'є температурних характеристик T_1 і T_2 ; $\mathbf{M} = (m_{ij})_{5 \times 5}$; $\mathbf{V} = (v_i)_{5 \times 1}$; $\mathbf{S} = (s_i)_{5 \times 1}$; коефіцієнти матриць m_{ij} , v_i і s_i обчислюємо з диференціальних операторів системи (3).

Зі системи (6) знаходимо розв'язок

$$\mathbf{U} = \frac{1}{|\mathbf{M}|} \mathbf{M}^* (\mathbf{Q} + \mathbf{V}T_{1mn} + \mathbf{S}T_{2mn}), \quad (7)$$

де $|\mathbf{M}|$ – визначник матриці $\mathbf{M}$, а $\mathbf{M}^*$ – приєднана матриця.

2. Визначення температурного поля. Для знаходження температурного поля пластини $t(x, y, z, \tau)$ використаємо двовимірні рівняння теплопровідності за лінійної залежності температури від поперечної координати [2]:

$$\Delta_{(1)} T_1 - \varepsilon_1^t T_1 + \Delta_{(2)} T_2 - \varepsilon_2^t T_2 - A^c \frac{\partial T_1}{\partial \tau} - B^c \frac{\partial T_2}{\partial \tau} = -f_1,$$

$$\Delta_{(2)} T_1 - \varepsilon_2^t T_1 + \Delta_{(3)} T_2 - \left(\frac{A_{33}^\lambda}{h^2} + \varepsilon_1^t \right) T_2 - B^c \frac{\partial T_1}{\partial \tau} - D^c \frac{\partial T_2}{\partial \tau} = -f_2, \quad (8)$$

де $\Delta_{(1)} = A_{11}^\lambda \partial_{11}^2 + A_{22}^\lambda \partial_{22}^2$; $\Delta_{(2)} = B_{11}^\lambda \partial_{11}^2 + B_{22}^\lambda \partial_{22}^2$; $\Delta_{(3)} = D_{11}^\lambda \partial_{11}^2 + D_{22}^\lambda \partial_{22}^2$;

$$\{A_{ii}^\lambda, B_{ii}^\lambda, D_{ii}^\lambda\} = \int_{-h}^h \lambda_{ii}(z) \{1, z/h, (z/h)^2\} dz; \quad \{A^c, B^c, D^c\} = \int_{-h}^h c_v(z) \{1, z/h, (z/h)^2\} dz;$$

$f_i = t_1^z \varepsilon_i^t + t_2^z \varepsilon_{3-i}^t = f_i^z(x, y) f_i^t(\tau)$; $t_i^z = \frac{1}{2} (t_z^+ - (-1)^i t_z^-)$; $\varepsilon_i^t = (\alpha^+ - (-1)^i \alpha^-)$; $\lambda_{ii}(z)$, $c_v(z)$ – коефіцієнти теплопровідності і об'ємної питомої теплоємності, відповідно; t_z^+ , t_z^- – температури середовищ на поверхнях $z = h$ і $z = -h$; α^+ і α^- – коефіцієнти тепловіддачі з цих поверхонь.

Для однозначності розв'язку до системи (8) долучаємо такі граничні і початкові умови:

$$\text{для } x = 0 \text{ і } x = a: \quad T_1 = T_2 = 0,$$

$$\text{для } y = 0 \text{ і } y = b: \quad T_1 = T_2 = 0, \quad (9)$$

$$\text{для } \tau = 0: \quad T_1(x, y, 0) = 0, \quad T_2(x, y, 0) = 0. \quad (10)$$

Після перетворення Фур'є за умов (9) система (8) набуде вигляду

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dT_{1mn}}{d\tau'} + C_2 \frac{dT_{2mn}}{d\tau'} + g_1 T_{1mn} + g_2 T_{2mn} &= f_{1mn}, \\ C_2 \frac{dT_{1mn}}{d\tau'} + C_3 \frac{dT_{2mn}}{d\tau'} + g_3 T_{1mn} + g_4 T_{2mn} &= f_{2mn}, \end{aligned} \quad (11)$$

де $g_1 = \Lambda_{11}^{(1)} \mu_m^2 + \Lambda_{22}^{(1)} \mu_n^2 + B_{i1}$; $g_2 = \Lambda_{11}^{(2)} \mu_m^2 + \Lambda_{22}^{(2)} \mu_n^2 + B_{i2}$; $\mu_m = \frac{\pi m h}{a}$; $\mu_n = \frac{\pi n h}{b}$;

$g_3 = \Lambda_{11}^{(2)} \mu_m^2 + \Lambda_{22}^{(2)} \mu_n^2 + B_{i2}$; $g_4 = \Lambda_{11}^{(3)} \mu_m^2 + \Lambda_{22}^{(3)} \mu_n^2 + \Lambda_{33}^{(1)} + B_{i1}$;

$$\{\Lambda_{ii}^{(1)}, \Lambda_{ii}^{(2)}, \Lambda_{ii}^{(3)}\} = \frac{1}{2h\lambda_0} \{A_{ii}^\lambda, B_{ii}^\lambda, D_{ii}^\lambda\}; \quad \{C_1, C_2, C_3\} = \frac{1}{2hc_v^0} \{A^c, B^c, D^c\}; \quad \tau' = \frac{\lambda_0}{c_v^0 h^2} \tau;$$

$B_{ii} = \frac{\varepsilon_i^t h}{2\lambda_0}$; f_{1mn} , f_{2mn} – коефіцієнти Фур'є для функцій температурних навантажень;

λ_0 і c_v^0 – деякі характерні коефіцієнти теплопровідності і теплоємності.

Застосовуючи до системи (11) інтегральне перетворення Лапласа за початкових умов (10), одержимо розв'язки для коефіцієнтів Фур'є:

$$\begin{aligned} T_{1mn} &= \frac{1}{C^*} \sum_{i \neq j=1}^2 \frac{1}{p_i - p_j} [(C_3 p_i - g_4) Q_{1mn} Z_{1i}(\tau') - (C_2 p_i - g_2) Q_{2mn} Z_{2i}(\tau')], \\ T_{2mn} &= \frac{1}{C^*} \sum_{i \neq j=1}^2 \frac{1}{p_i - p_j} [(C_1 p_i - g_1) Q_{2mn} Z_{2i}(\tau') - (C_2 p_i - g_3) Q_{1mn} Z_{1i}(\tau')], \end{aligned} \quad (12)$$

де $-p_1$ і $-p_2$ – корені рівняння $C^* p^2 + [C_1 g_4 + C_3 g_1 - C_2 (g_3 + g_2)] p + g_1 g_4 - g_2 g_3 = 0$, які, як випливає з числового аналізу, є дійсними; $C^* = C_1 C_3 - (C_2)^2$;

$$Q_{jmn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f_j^z(x, y) \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b} dx dy; \quad Z_{ji}(\tau') = \int_0^{\tau'} f_j^t(v) e^{-p_i(\tau'-v)} dv \quad (j, i = 1, 2).$$

За відомого температурного поля (12) і узагальнених переміщень (5) зусилля-моменти обчислюємо за формулами (2), а напруження – за формулами (1).

3. Числовий приклад. Аналіз результатів. Як приклад розглянемо тришарову пластину нерегулярної несиметричної структури. Нехай $q^{(1)} = \{c_{ij}^{(1)}, \beta_{ii}^{(1)}, \lambda_{ii}^{(1)}, c_v^{(1)}\}$, $q^{(2)} = \{c_{ij}^{(2)}, \beta_{ii}^{(2)}, \lambda_{ii}^{(2)}, c_v^{(2)}\}$ і $q^{(3)} = \{c_{ij}^{(3)}, \beta_{ii}^{(3)}, \lambda_{ii}^{(3)}, c_v^{(3)}\}$ – фізико-механічні характеристики першого, другого і третього шарів, відповідно, а h_1 , h_2 і $h_3 = h_1$ – їхні товщини ($2h_1 + h_2 = 2h$). Тоді вирази для інтегральних характеристик $A^q = \{A_{ij}, A_{ii}^t, A_{ii}^\lambda, A^c\}$, $B^q = \{B_{ij}, B_{ii}^t, B_{ii}^\lambda/h, B^c/h\}$ і $D^q = \{D_{ij}, D_{ii}^t, D_{ii}^\lambda/h^2, D^c/h^2\}$ через характеристики шарів визначаємо за формулами [3]

$$A^q = h \left[\frac{h_1}{h} (q^{(1)} + q^{(3)}) - 2 \left(\frac{h_1}{h} - 1 \right) q^{(2)} \right],$$

$$B^q = \frac{h^2}{2} \left[\left(\frac{h_1}{h} - 1 \right)^2 - 1 \right] (q^{(1)} - q^{(3)}),$$

$$D^q = \frac{h^3}{3} \left\{ \left[1 + \left(\frac{h_1}{h} - 1 \right)^3 \right] (q^{(1)} + q^{(3)}) - 2 \left(\frac{h_1}{h} - 1 \right)^3 q^{(2)} \right\}.$$

Числові дослідження виконували для двох випадків розподілу температури довкілля:

косиносоїдального

$$t_z^+(x, y, \tau) = t^* \cos \frac{\pi}{2a_0} (x - x_0) \cdot \cos \frac{\pi}{2b_0} (y - y_0) N(x) N(y) (1 - e^{-\beta^* \tau}),$$

$$t_z^-(x, y, \tau) = 0,$$

і рівномірного

$$t_z^+(x, y, \tau) = t^* N(x) N(y) (1 - e^{-\beta^* \tau}), \quad t_z^-(x, y, \tau) = 0,$$

де $N(x) = [S_-(x - (x_0 - a_0)) - S_+(x - (x_0 + a_0))]$;

$$N(y) = [S_-(y - (y_0 - b_0)) - S_+(y - (y_0 + b_0))];$$

$t^*, \beta^* = \text{const}$; x_0, y_0 – координати центра області нагріву; $2a_0 \times 2b_0$ – розмір цієї області, $S_\pm(x)$ – асиметричні одиничні функції [3].

Вважали, що коефіцієнти теплообміну з поверхонь $z = \pm h$ рівні між собою $\alpha^+ = \alpha^- = \alpha_z$, а силові навантаження відсутні. Розглядали тришарові пластини нерегулярної структури ($h_1 = h_3; h_2 = 8h_1$) трьох типів: $(0^\circ/\text{core}/0^\circ)$, $(90^\circ/\text{core}/90^\circ)$ і $(0^\circ/\text{core}/90^\circ)$. Властивості матеріалу такі [4]: для лицевих шарів – $E_1 = 172.4 \text{ GPa}$; $E_2 = E_3 = 6.89 \text{ GPa}$; $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$; $G_{12} = G_{13} = 3.45 \text{ GPa}$; $G_{23} = 1.378 \text{ GPa}$; $\lambda_{11} = 3 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$; $\lambda_{33} = \lambda_{22} = 1 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$; $\alpha_{11}^t = \alpha_{33}^t = 0.1 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$; $\alpha_{22}^t = 2.0 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$; для середнього шару (core) – $E_1 = 4.82 \text{ GPa}$; $E_2 = E_3 = 19.67 \text{ GPa}$; $\nu_{21} = \nu_{31} = 0.05$; $\nu_{32} = 0.3$; $G_{12} = G_{13} = 3.42 \text{ GPa}$; $G_{23} = 7.57 \text{ GPa}$; $\alpha_{22}^t = \alpha_{33}^t = 2.26 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$; $\alpha_{11}^t = 2.69 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$; $\lambda_{11} = \lambda_{22} = 1 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$; $\lambda_{33} = 2 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$.

Значення інших параметрів такі: $a/b = 1$; $h/a = 0.1$; $a_0/a = 0.25$; $b_0/b = 0.25$; $x_0 = a/2$; $y_0 = b/2$; $k' = 5/6$; $Bi = 1$; $\beta^* = 1$; $\tau' = 20$; $E_0 = 1 \text{ ГПа}$; $\alpha_0^t = 10^{-5} \text{ К}^{-1}$; $\lambda_0 = 1 \text{ Вт/мК}$; $c_0 = 6 \cdot 10^2 \text{ Дж/кгК}$.

Обчислили безрозмірні температуру $t' = \frac{t}{t^*}$, температурні характеристики $T'_i = \frac{T_i}{t^*}$, радіальні прогини $w' = \frac{w}{ht^* \alpha_0^t}$, нормальні зусилля $N'_i = \frac{N_i}{t^* h E_0 \alpha_0^t}$, згинні моменти $M'_i = \frac{M_i}{t^* h^2 E_0 \alpha_0^t}$ і нормальні напруження $\sigma'_i = \frac{\sigma_{ii}}{t^* E_0 \alpha_0^t}$ ($i = 1, 2$)

у центрі області нагріву. В таблиці наведені значення вказаних величин для різних типів шаруватості і способів нагрівання. Як бачимо, температурне поле, прогини та напруження більші за рівномірного нагрівання, ніж за косинусоїдального. Прогини також збільшуються за несиметричної структури.

	Косинусоїдальне нагрівання			Рівномірне нагрівання		
	(0°/core/0°)	(90°/core/90°)	(0°/core/90°)	(0°/core/0°)	(90°/core/90°)	(0°/core/90°)
T'_1	0,2786	0,2786	0,2783	0,4096	0,4096	0,4094
T'_2	0,1569	0,1569	0,1570	0,1774	0,1774	0,1774
$t'(h)$	0,4355	0,4355	0,4353	0,5870	0,5870	0,5868
$t'(-h)$	0,1217	0,1217	0,1213	0,2322	0,2322	0,2321
w'	0,3151	0,3531	1,0748	0,6105	0,6250	2,1768
N'_1	-0,0163	-1,1019	-0,0283	-0,01249	-1,1588	-0,01867
N'_2	-0,0162	-0,6975	-0,189	-0,01299	-0,9951	-0,02045
M'_1	0,2626	-0,9920	-3,2701	0,7359	-1,3902	-5,2946
M'_2	-0,6250	0,7343	2,5416	-0,8277	1,3651	4,9866
$\sigma'_1(h)$	14,7649	-1,9823	11,6657	22,0955	-2,5265	14,3749
$\sigma'_1(-h)$	9,1965	1,3125	7,0481	13,1419	2,1656	8,1938
$\sigma'_2(h)$	-6,0097	3,0436	-5,3321	-8,1596	4,9277	-7,0358
$\sigma'_2(-h)$	-1,5643	-2,6434	-2,3913	-2,9749	-4,5503	-4,7576

Рис. 1–3 ілюструють зміну безрозмірного прогину w' пластини симетричної структури (0°/core/0°) у центрі області косинусоїдального нагріву залежно від безрозмірного часу τ' і коефіцієнта β^* , рівного 0.05; 0.1; 0.2 і 1 (рис. 1), відношення довжин сторін пластини a/b і значень коефіцієнта тепловіддачі $Bi = 0.2; 0.5; 1; 2$ (рис. 2); від параметра товщини a/h і параметра розмірів області нагріву a_0/a , рівного 0.1; 0.2; 0.3 і 0.5 (рис. 3).

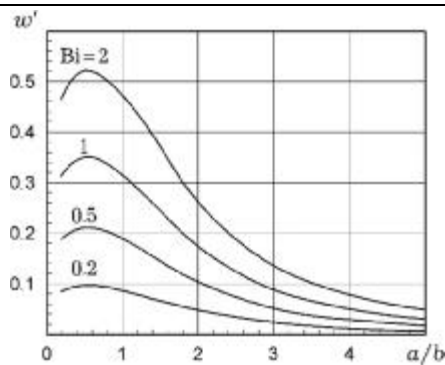


Рис. 1

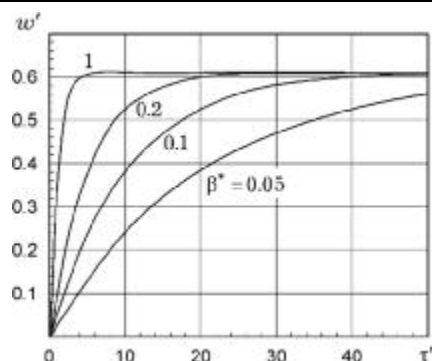


Рис. 2

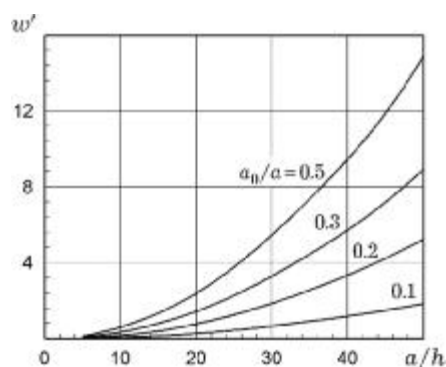


Рис. 3

Виявили, що з плином часу безрозмірні прогини зростають, прямуючи до сталого значення, причому швидше для більших значень коефіцієнта β^* . Вони також зростають зі збільшенням коефіцієнта тепловіддачі, області нагріву та товщини. Слід відмітити, що для неоднорідних ортотропних пластин максимальні прогини досягаються за відношення $a/b \approx 0.7$, а для однорідних ізотропних – $a/b = 1$.

Висновки. На основі рівнянь лінійної зсувної теорії першого порядку з п'ятьма степенями свободи розвинуто методику розв'язування задач теплопровідності та термопружності для шаруватої пластини нерегулярної структури, шари якої виготовлені з ортотропного матеріалу. Пластина нагрівається докільям шляхом теплообміну через бокові поверхні за законом Ньютона. Досліджено вплив коефіцієнта тепловіддачі, параметра часу, а також порядку розміщення лицевих шарів тришарової пластини на компоненти НДС та температурного поля. З числового аналізу випливає, що, змінюючи порядок розміщення шарів, розміри області нагріву та геометричні параметри, можна впливати на НДС у багатошаровій конструкції.

1. Жидик У. В., Згин функціонально-градієнтної пластини за нестационарного нагрівання і початкового напруження // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2023. – Вип. 21. – С. 72–84. – <https://doi.org/10.15407/apmm2023.21.77-84>
2. Жидик У. В., Флячок В. М. Термопружний аналіз неоднорідних анізотропних пластин // Наук. нотатки. – Луцьк: ЛНТУ, 2011. – Вип. 33. – С. 281–287.
3. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – Київ: Наук. думка, 1992. – 280 с.
4. *Encyclopedia of Thermal Stresses* / R. Hetnarski (ed.). – Dordrecht: Springer, 2014. – Vol. 11. – P. 5835–6643.

5. Kiani Y. Thermal post-buckling of temperature dependent sandwich plates with FG-CNTRC face sheets // J. Thermal Stresses. – 2018. – 41, No. 7. – P. 866–882. – <https://doi.org/10.1080/01495739.2018.1425645>.
6. R. Saini, Lal R., Saini R., Khadimallah M. A. Dynamic analysis of heated temperature-dependent bi-directional advanced composites circular plates with quadratic thickness variation // J. Thermal Stresses. – 2023. – 46, No. 3. – P. 207–228. – <https://doi.org/10.1080/01495739.2022.2159902>.
7. Li D. H. and Ma S. Dynamic thermomechanical analysis on stiffened composite plates with damage // J. Thermal Stresses. – 2023. – 46, No. 12. – P. 1267–1295. – <https://doi.org/10.1080/01495739.2023.2253877>.
8. Manthena V. R., Kedar G. D. On thermoelastic problem of a thermosensitive functionally graded rectangular plate with instantaneous point heat source // J. Thermal Stresses. – 2019. – 42, No. 7. – P. 849–862. – <https://doi.org/10.1080/01495739.2019.1587327>.
9. Naik N. S., Sayyad A. S. An accurate computational model for thermal analysis of laminated composite and sandwich plates // J. Thermal Stresses. – 2019. – 42, No. 5. – P. 559–579. – <https://doi.org/10.1080/01495739.2018.1522986>.
10. Qjehua L., Hou P., Shang S. Three-dimensional exact analytical solutions of transversely isotropic plate under heat sources // J. Thermal Stresses. – 2021. – 44, No. 11. – P. 1324–1348. – <https://doi.org/10.1080/01495739.2021.1985409>.
11. Reddy J. N. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis. – Boca Raton: CRC Press, 2004. – 832 p.
12. Swaminathan K., Sangeetha D. M. Thermal analysis of FGM plates – a critical review of various modeling techniques and solution methods // Compos. Struct. – 2017. – 160, No. 1. – P. 43–60. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.10.047>.
13. Thai H. T., Kim S. E. A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and shells // Compos. Struct. – 2015. – 128, No. 1. – P. 70–86. – <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.03.010>.
14. Varelis D., Saravanos D. A. A coupled nonlinear plate finite element for thermal buckling and postbuckling of piezoelectric composite plates including thermo-electro-mechanical effects // J. Thermal Stresses. – 2022. – 45, No. 1. – P. 30–50. – <https://doi.org/10.1080/01495739.2021.2005498>.
15. Vel S. S., Batra R. C. Three-dimensional analysis of transient thermal stresses in functionally graded plates // Int. J. Solids Struct. – 2003. – 40, No. 25. – P. 7181–7196. – [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(03\)00361-5](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00361-5).
16. Zghal S., Trabelsi S., Frikha A., Dammak F. Thermal free vibration analysis of functionally graded plates and panels with an improved finite shell element // J. Thermal Stresses. – 2021. – 44, No. 3. – P. 315–341. – <https://doi.org/10.1080/01495739.2021.1871577>.

STUDY OF BENDING OF A LOCALLY HEATED ORTHOTROPIC PLATE OF A LAYERED STRUCTURE

Based on two-dimensional equations of heat conduction and equations of the shear theory of thermoelasticity, the bending of a rectangular orthotropic plate of a layered irregular structure under unsteady local heating by the environment was studied. Using the methods of integral Fourier and Laplace transforms, a solution of the unsteady problem of heat conduction and the quasi-static problem of thermoelasticity for a plate hinged at the edges were found. Numerical results are given for three-layer plates of symmetric and asymmetric structure.

Keywords: *thermoelasticity, temperature load, heat transfer, layered plates.*

¹ Нац. ун-т «Львівська політехніка», Львів

² Ченстоховський політехнічний ун-т,
Ченстохова, Польща