УДК 539.376

Влияние геометрии плоских микроповреждений материала на его деформационные свойства

Д. В. Бабич

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина

На основании энергетического метода с учетом взаимодействия берегов трещин получены выражения для эффективных характеристик упругости материалов, ослабленных системой хаотически распределенных по объему эллиптических трещин. Исследуется влияние геометрии микротрещин на эффективные постоянные упругости поврежденного материала.

Ключевые слова: трещиноватая среда, эллиптическая трещина, эффективные характеристики упругости.

Введение. Из инженерной практики известно, что многие конструкционные материалы при растяжении и сжатии имеют разные механические характеристики. Одному из феноменологических вариантов разномодульной теории упругости посвящена работа [1], в которой в основном рассматриваются методы решения задач упругости для различных механических объектов из разномодульных материалов. Корректные уравнения состояния конструкционных материалов отсутствуют в связи с невыясненной физической природой их разносопротивляемости растяжению и сжатию. Основные положения указанной разномодульной теории упругости носят частный характер.

Вместе с тем большинство материалов обладает начальной либо приобретенной в процессе эксплуатации поврежденностью в виде рассеянных по объему отдельных плоских разрывов структурных элементов [2]. Поврежденность подобного рода является причиной разномодульности материала, т.е. разной сопротивляемости материала при растяжении и сжатии.

Ниже рассматривается одна из возможных причин разномодульности достаточно широкого класса материалов, для которых характерно наличие технологической либо эксплуатационной поврежденности типа трещин отрыва, т.е. хрупких материалов.

В настоящее время существуют различные подходы к учету повреждаемости материала в задачах механики деформируемого твердого тела [2–15]. Особый интерес представляют структурные модели повреждаемости материалов [2, 5, 9–13].

Предполагается, что единичный объем материала состоит из N структурных элементов эллипсоидальной (a', b' – большая и меньшая полуси эллипсоида вращения) или сферической (a' – радиус сферы) формы. Каждый структурный элемент может растрескиваться, в результате чего появляется плоский дефект эллиптической либо круговой формы с размерами порядка размеров структурных элементов. Для оценки степени поврежденности материала вводится численная характеристика $\varepsilon = N_0/N$, где N_0 – плотность микротрещин. Если $<\nu'>=\dfrac{4\pi}{3}<a'b'^2>$ – средний объем частиц материала, то $N=1/<\nu'>$, и объемная концентрация поврежденности будет определяться выражением $\varepsilon=\dfrac{4\pi}{3}N_0<a'b'^2>$. Средние расстояния между центрами микрочастиц (R) и центрами разрушенных микроэлементов (R_0) приближенно [10] определяются по формулам $R=1/\sqrt[3]{N}$ и $R_0=1/\sqrt[3]{N_0}$.

Использование модели сплошной среды правомочно для описания механического поведения материалов с большим количеством рассеянных по представительному объему дефектов, соизмеримых со структурными элементами. Предполагается также, что в процессе деформирования микротрещины не растут и не взаимодействуют между собой ввиду значительных расстояний между центрами близлежащих дефектов $R_0>>b'(a')$. Это предположение подтверждается тем, что, как правило, реальным материалам присуща низкая концентрация дефектов ($\varepsilon<<1$). Согласно [6], макроскопическое разрушение тела при растяжении либо сжатии происходит при условии, что величина ε на главной площадке достигает критического значения, $\varepsilon=\varepsilon_k\cong 0{,}5$.

Энергетический метод вывода уравнений состояния для трещиноватых сред. Для описания влияния поврежденности материала на упругие свойства применяется энергетический метод [9]. Суть метода состоит в привлечении модели континуальной среды для описания деформирования неоднородной трещиноватой среды на основании принципа эквивалентности энергии. Для этой цели используется принцип Эшелби [16], в соответствии с которым определяется энергия деформирования поврежденной среды.

Рассмотрим изотропную макрооднородную среду с заданной системой поврежденности в виде стохастически рассеянных по объему плоских эллиптических трещин. Трещины можно индентифицировать с разрывами структурных элементов, если предположить, что материал состоит из плотно упакованных зерен эллипсоидальной формы с различными размерами полуосей a', b', часть из которых претерпела разрыв, образовав дефект в виде круговой либо эллиптической трещины размерами $a\le a'$, $b\le b'$. Будем моделировать на основании принципа эквивалентности энергии деформирования поврежденную микронеоднородную среду некоторой непрерывной средой:

$$W=W^0+\overline{W}, \tag{1}$$

где W – плотность энергии деформирования непрерывной среды, моделирующей поврежденный материал,

$$W=\frac{1}{2}a_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}; \tag{2}$$

W^0 – плотность энергии сплошной неповрежденной среды,

$$W^0=\frac{1}{2}a^0_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}; \tag{3}$$

$\overline{W}$ – приращение плотности энергии деформирования поврежденной среды, связанное с освобождением внутренней энергии вследствие нарушения связей при нормальном отрыве и сдвиге поверхностей трещин в структурных элементах.

Плотность освобожденной энергии поврежденного материала на основании принципа Эшелби [16] определяется в виде работы взаимного смещения поверхностей трещин, вызываемого напряжениями, которые имели бы место при заданной нагрузке в сплошной среде в местах, занимаемых трещинами:

$$\overline{W} = \sum_{n=1}^{N_0} \sum_{i=1}^{3} \overline{W}_i^n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_0} \sum_{i=1}^{3} \int_{S_n} U_i^n \sigma_{i3}^n dS_n, \tag{4}$$

где U_i^n, $i=1, 2, 3$ – перемещения в точках поверхности n-й трещины; S_n – полная поверхность n-й трещины; σ_{i3}^n, $i=1,2,3$ – компоненты тензора заданных напряжений в собственной системе координат n-й трещины $O^n x_1^n x_2^n x_3^n$; в случае эллиптических трещин оси $O^n x_i^n$ $(i=1, 2)$ соответственно направлены по большей (a^n) и меньшей (b^n) полуосям, ось $O^n x_3^n$ – по нормали к ее поверхностям; $\overline{W}_i^n$, $i=1,2, 3$ – работа взаимного смещения поверхностей n-й трещины в направлениях осей $O^n x_i^n$.

Локальные напряжения σ_{i3}^n и заданные в теле средние напряжения σ_{kl} связаны преобразованием

$$\sigma_{i3}^n = \sigma_{kl} \alpha_{ik}^n \alpha_{3l}^n, \tag{5}$$

где α_{ik}^n, α_{3l}^n – определяемые углами Эйлера $(0 \le \theta^n \le \pi$ – угол нутации, $0 \le \psi^n \le 2\pi$ – угол прецессии, $0 \le \varphi^n \le 2\pi$ – угол собственного вращения) направляющие косинусы собственной системы координат n-й трещины по отношению к лабораторной системе координат [17],

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11} = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta; && \alpha_{13} = \sin\varphi\sin\theta;\\
&\alpha_{12} = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta; && \alpha_{23} = \cos\varphi\sin\theta;\\
&\alpha_{21} = -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta; && \alpha_{31} = \sin\psi\sin\theta;\\
&\alpha_{22} = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta; && \alpha_{32} = -\cos\psi\sin\theta; \quad \alpha_{33} = \cos\theta.
\end{aligned} \tag{6}$$

В случае шероховатых поверхностей трещин для описания сдвигового взаимодействия берегов трещин по закону сухого трения $(\sigma_{33}^n < 0)$ вводятся эффективные сдвигающие напряжения

$$\begin{aligned}
&\tilde{\sigma}_{i3}^n = \left|\sigma_{i3}^n\right| - f\left|\sigma_{33}^n\right| && \text{при} \quad \left|\sigma_{i3}^n\right| > f\left|\sigma_{33}^n\right|;\\
&\tilde{\sigma}_{i3}^n = 0 && \text{при} \quad \left|\sigma_{i3}^n\right| \le f\left|\sigma_{33}^n\right|, \quad i=1, 2,
\end{aligned} \tag{7}$$

где f – коэффициент трения скольжения.

Перемещения в точках поверхности n-й трещины U_i^n находятся путем решения задач о напряженно-деформированном состоянии неограниченной изотропной среды с индивидуальной трещиной при однородных поперечном, продольном сдвигах и нормальном к поверхности трещины растяжении напряжениями на бесконечности, с которыми отождествляются средние напряжения в представительном объеме. Полученные в [9] выражения для работы взаимного смещения берегов индивидуальной эллиптической трещины $\overline{W}_i'$ при сдвигах и раскрытии имеют вид

$$\overline{W}_i' = \frac{4\pi a' b'^2}{3} B_i'; \qquad B_i' = A_i' (\sigma_{i3}')^2, \qquad i = 1, 2, 3; \tag{8}$$

$$\begin{gathered} A_i' = \left(\frac{1-\nu_0^2}{E_0} \right) Q_i', \qquad i = 1, 2, 3; \\ Q_1' = k'^2 [(k'^2 - \nu_0) E(k') + \nu_0 k_1'^2 K(k')]^{-1}; \\ Q_2' = k'^2 [(k'^2 + \nu_0 k_1'^2) E(k') - \nu_0 k_1'^2 K(k')]^{-1}; \qquad Q_3' = 1/E(k'), \end{gathered} \tag{9}$$

где $k'^2 = 1 - b'^2 / a'^2$; $k_1'^2 = 1 - k'^2$; $K(k')$, $E(k')$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода; ν_0 – коэффициент Пуассона неповрежденной среды; введение здесь и далее вместо индекса n обозначения штрихом указывает на непрерывную зависимость величин от углов ориентации трещин в связи с предположением о континуальном распределении последних по объему.

В случае круговой трещины работа взаимного смещения берегов трещины будет определяться формулой (8) при $a' = b'$ и следующих значениях коэффициентов A_i':

$$A_1' = A_2' = \frac{4(1-\nu_0^2)}{\pi(2-\nu_0)E_0}; \qquad A_3' = \frac{2(1-\nu_0^2)}{\pi E_0}. \tag{10}$$

Уравнения состояния для поврежденной среды

$$\varepsilon_{ij} = a_{ijkl} \sigma_{kl} \tag{11}$$

получены из равенства (1). Для этой цели составляющие равенства (1) записываются в компонентах тензора средних напряжений σ_{ij} в теле. Приравнивание коэффициентов при одинаковых выражениях относительно напряжений σ_{ij} в (1) дает выражение для определения податливостей среды a_{ijkl}, моделирующей поврежденный материал:

$$a_{ijkl} = a_{ijkl}^0 + a_{ijkl}', \tag{12}$$

где a_{ijkl}^0 – податливости неповрежденной среды; a_{ijkl}' – результат осреднения плотности освобожденной энергии $\overline{W}$, который зависит от количества трещин в единичном объеме, плотности распределения их по размерам и ориентациям $F(Y)$, где $Y(a', b', \varphi, \psi, \theta)$ обозначает совокупность параметров, определяющих характерные размеры и углы ориентации трещин в представительном объеме [9].

Осредненное значение плотности освобожденной энергии деформирования при заданной функцией $F(Y)$ системе трещиноватых дефектов определяется по формуле

$$\overline{W} = \frac{1}{8\pi^2} \int_Y F(a', b', \varphi, \psi, \theta)(\overline{W}'_1 + \overline{W}'_2 + \overline{W}'_3) \sin\theta d\varphi d\psi d\theta. \tag{13}$$

Остановимся более подробно на случае всестороннего растяжения и сжатия изотропной среды, ослабленной стохастически рассеянными по объему эллиптическими трещинами.

При изотропном широком распределении трещин по ориентациям плотность распределения $F(Y)$ от углов Эйлера не зависит. Пределы интегрирования в (13) по углам Эйлера задаются интервалами $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \psi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$. При заданной функции распределения трещин по размерам $F(a', b')$ пределы интегрирования определяются минимальным и максимальным размерами полуосей эллиптических трещин. При условии $k'_1 = \text{const}$, что соответствует наличию в среде системы подобных трещин (это предположение вводится с целью упрощения операции статистического осреднения (13)), имеем

$$\overline{W} = \frac{\varepsilon}{8\pi^2} \sum_{i=1}^{3} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} A'_i (\sigma'_{i3})^2 \sin\theta d\varphi d\psi d\theta;$$
$$\varepsilon = \frac{4\pi}{3} \int_{a'}\int_{b'} F(a', b') a' b'^2 da' db' = \frac{4\pi}{3} N_0 < a' b'^2 >, \tag{14}$$

где ε – малый параметр трещиноватости, который можно рассматривать как отношение осредненного значения области возмущения $(\nu' = (4\pi/3) < a'b'^2 >)$, вызываемого трещиной, к объему материала, содержащего одну трещину $(1/N_0)$ [9]; для систем одинаковых трещин имеем $\varepsilon = \dfrac{4\pi}{3} N_0 (a'b'^2)$.

В случае хаотического статистически однородного распределения трещин в представительном объеме в результате интегрирования (14) в зависимости от характера взаимодействия их берегов получим следующие соотношения для вторых составляющих податливостей в (12):

1) раскрытие трещин $(\sigma'_{33} > 0)$:

$$a'_{iiii} = \frac{2}{5}\left[\frac{1}{3}(A_1 + A_2) + A_3\right]\varepsilon, \qquad a'_{iijj} = \frac{1}{15}[-(A_1 + A_2) + 2A_3]\varepsilon,$$
$$a'_{ijij} = \frac{2}{5}(A_1 + A_2)\varepsilon + \frac{8}{15}A_3\varepsilon, \qquad i, j = 1, 2, 3, \qquad i \neq j; \tag{15}$$

2) идеальное проскальзывание ($\sigma'_{33} \le 0,\ f = 0$):

$$a'_{iiii} = \frac{2}{15}(A_1 + A_2)\varepsilon, \qquad a'_{iijj} = -\frac{1}{15}(A_1 + A_2)\varepsilon,$$
$$a'_{ijij} = \frac{2}{5}(A_1 + A_2)\varepsilon, \qquad i, j = 1, 2, 3, \qquad i \ne j; \tag{16}$$

3) трение скольжения ($\sigma'_{33} < 0,\ |\sigma'_{3j}| > f|\sigma'_{33}|,\ j = 1, 2$):

$$a'_{iiii} = \frac{2}{15}(1 - 3f^2)(A_1 + A_2)\varepsilon, \qquad a'_{iijj} = -\frac{1}{15}(1 + 2f^2)(A_1 + A_2)\varepsilon,$$
$$a'_{ijij} = \frac{2}{15}(3 - 4f^2)(A_1 + A_2)\varepsilon, \qquad i, j = 1, 2, 3, \qquad i \ne j. \tag{17}$$

Постоянные A_i определяются по формулам (9), (10).

Технические постоянные поврежденного материала через податливости определяются по соотношениям [16]

$$\frac{1}{E_{ii}} = a_{iiii}, \qquad -\frac{\nu_{ij}}{E_{ii}} = a_{jjii}, \qquad \frac{1}{G_{ij}} = a_{ijij}, \qquad i, j = 1, 2, 3, \tag{18}$$

где E_{ii}, G_{ij}, ν_{ij} – модули упругости, модули сдвига и коэффициенты Пуассона.

Из соотношений (15)–(18) следует, что изотропный материал с поврежденностью в виде хаотически рассеянных микротрещин при всестороннем равномерном растяжении либо сжатии моделируется изотропной средой с эффективными постоянными упругости вида

$$E_+ = \frac{E_0}{1 + E_0\left[\frac{2}{15}(A_1 + A_2) + \frac{2}{5}A_3\right]\varepsilon}; \tag{19а}$$

$$\nu_+ = E_+\left\{\frac{\nu_0}{E_0} + \left[\frac{1}{15}(A_1 + A_2) - \frac{2}{15}A_3\right]\varepsilon\right\}; \tag{19б}$$

$$E_- = \frac{E_0}{1 + E_0\left[\frac{2}{15}(A_1 + A_2)\varepsilon\right]}; \qquad \nu_- = E_-\left[\frac{\nu_0}{E_0} + \frac{1}{15}(A_1 + A_2)\varepsilon\right]. \tag{20}$$

Приведенные выше соотношения позволяют решать следующие задачи:

определение эффективных характеристик упругости трещиноватого материала при растяжении и сжатии (E_+, E_-, ν_+, ν_-) по заданным характеристикам сплошной среды и функциям распределения трещин по размерам и ориентациям ($E_0, \nu_0, F(Y)$);

определение параметров трещиноватости (ε, k) по заданным значениям параметров упругости сплошной и трещиноватой среды (E_0, ν_0, E_+, E_-, ν_+, ν_-);

приближенное определение параметров упругости сплошной среды (E_0, ν_0) по заданным параметрам упругости трещиноватой среды (E_+, E_-, ν_+, ν_-).

Связь эффективных постоянных упругости с микропараметрами трещиноватости материала. Безотносительно к конкретному материалу полученные соотношения позволяют провести теоретический анализ влияния геометрии трещин на деформационные характеристики поврежденного материала.

Из (9), (19), (20) следует, что при всех прочих равных условиях значения постоянных упругости исследуемого изотропного трещиноватого материала зависят от геометрической формы и отношения характерных размеров трещин $k_1' = b'/a'$.

Рассмотрим системы эллиптических трещин, отличающихся характерными размерами (a_i', b_i') при одинаковых значениях параметра трещиноватости

$$\varepsilon = \frac{4\pi}{3} N_0 (a_i' b_i'^2) = \frac{4\pi}{3} N_0 (a_i'^3 k_1^{i2}) = \text{const}$$

и плотности трещин N_0. В этом случае область возмущения трещины $\nu_i = \dfrac{4\pi}{3} a_i' b_i'^2 = \dfrac{4\pi}{3} k_1^{i2} a_i'^3 = \dfrac{\varepsilon}{N_0}$ – также постоянная величина. Для круговой ($k_1^1 = 1$) трещины значения ее радиуса и площади определяются соответственно по выражениям

$$a_1' = \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{4\pi N_0}}\ \text{м}, \qquad S_1 = \pi a'^2 = \sqrt[3]{\frac{9\pi\varepsilon^2}{16 N_0^2}}\ \text{м}^2. \tag{21}$$

При $0 \le k_1^i < 1$ $(i > 1)$ имеют место соотношения:

$$a_i' = \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{4\pi N_0}(k_1^i)^{-2}}\ \text{м}, \quad b_i' = \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon k_1^i}{4\pi N_0}}\ \text{м}, \quad S_i = \pi a_i' b_i' = \sqrt[3]{\frac{9\pi\varepsilon^2}{16 k_1^i N_0^2}}\ \text{м}^2. \tag{22}$$

В случае систем трещин различных размеров приведенные соотношения относятся к трещинам со средними размерами.

Таким образом, одинаковые значения плотности трещин N_0, параметра трещиноватости ε и объема области возмущения трещины ν могут иметь место в системах трещин различных размеров за счет вариации длины полуосей трещин ($b_i' = k_1^i a_i'$). Из (9), (10), (15)–(18) следует, что при заданных условиях постоянные упругости трещиноватого материала (19), (20) зависят от параметра k_1, которым описывается геометрия трещин. При этом указанная зависимость проявляется в том, что степень влияния трещиноватости на значения постоянных упругости повышается с уменьшением значений k_1, т.е. с увеличением, как следует из (21), (22), площади эллиптической трещины.

Обсуждаемое явление иллюстрируют данные таблицы, где приведены значения постоянных упругости трещиноватого углеродного материала при $\varepsilon = 0{,}1$ в зависимости от параметра k_1 для трещин эллиптической и круговой формы при растяжении (E_+, ν_+) и сжатии (E_-, ν_-). Упругие свойства сплошного углеродного материала принимались равными $E_0 = 4{,}2 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu_0 = 0{,}2$.

Зависимость значений параметров упругости от относительных размеров трещин

$k_1^i = b_i/a_i$	$E_+ \cdot 10^{-11}$, Па	ν_+	$E_- \cdot 10^{-11}$, Па	ν_-
1,00000*	4,02856*	0,19270*	4,12530*	0,20348*
0,94868	4,02428	0,19252	4,12338	0,20547
0,89443	4,01954	0,19232	4,12126	0,20562
0,83666	4,01434	0,19210	4,11893	0,20579
0,77459	4,00849	9,19185	4,11629	0,20598
0,70711	4,00187	0,19158	4,11330	0,20619
0,63245	3,99425	0,19125	4,10984	0,20664
0,54772	3,98511	0,19089	4,10574	0,20673
0,44721	3,97423	0,19043	4,10067	0,20709
0,31623	3,95979	0,18985	4,09395	0,20757
0,14142	3,94276	0,18918	4,08585	0,20815
0**	3,93553**	0,18891**	4,08243**	0,20839**

Примечание. Одной звездочкой отмечены данные для трещин круговой формы, двумя – для эллиптических трещин удлиненной формы.

Приведенные результаты свидетельствуют о существенном влиянии трещиноватости материала на его деформационные свойства при растяжении. Качественно различается влияние трещиноватости на значения коэффициента Пуассона при растяжении и сжатии. В первом случае коэффициент Пуассона уменьшается, во втором – увеличивается. Физическая природа указанных эффектов очевидна и связана с раскрытием и закрытием трещин в зависимости от растяжения либо сжатия тела.

Изложенная методика учета трещиноватости материала дает возможность проследить связь между микроструктурой и макросвойствами, а также предложить процедуру определения осредненных параметров микроструктуры с помощью макроэкспериментов.

Трещиноватость материала определяется тремя структурными параметрами: a', b', N_0. Связь между ними устанавливается с помощью соотношений (19), (20), которые доопределяются посредством соответствующих экспериментов по вычислению макропараметров E_+, E_-, ν_+, ν_-.

Из соотношений (19), (20) следуют такие выражения:

$$\frac{1-2\nu_0}{E_0} = \frac{1-2\nu_-}{E_-}, \qquad \frac{1+3\nu_+}{E_+} = \frac{1+3\nu_-}{E_-}; \tag{23}$$

$$\varepsilon = \frac{5}{2}\frac{E_0 Q_3(k)}{1-\nu_0^2}\left(\frac{1}{E_+} - \frac{1}{E_-}\right); \tag{24}$$

$$\varepsilon=\frac{15}{2(1-\nu_0^2)}\left(\frac{E_0}{E_-}-1\right)\frac{1}{Q_1(k)+Q_2(k)}; \tag{25}$$

$$\varepsilon=\frac{15}{1-\nu_0^2}\left(\frac{\nu_-E_0}{E_-}-\nu_0\right)\frac{1}{Q_1(k)+Q_2(k)}; \tag{26}$$

$$\varepsilon=\frac{15}{2(1-\nu_0^2)}\left(\frac{E_0}{E_+}-1\right)\frac{1}{Q_1(k)+Q_2(k)+3Q_3(k)}; \tag{27}$$

$$\varepsilon=\frac{15}{1-\nu_0^2}\left(\frac{\nu_+E_0}{E_+}-\nu_0\right)\frac{1}{Q_1(k)+Q_2(k)-2Q_3(k)}. \tag{28}$$

В предельных случаях ($k=0,\ k=1$) соответственно имеем

$$\varepsilon=\frac{5\pi}{4}\frac{E_0}{1-\nu_0^2}\left(\frac{1}{E_+}-\frac{1}{E_-}\right),\qquad \varepsilon=\frac{5}{2}\frac{E_0}{1-\nu_0^2}\left(\frac{1}{E_+}-\frac{1}{E_-}\right); \tag{29}$$

$$\varepsilon=\frac{15\pi(2-\nu_0)}{16(1-\nu_0^2)}\left(\frac{E_0}{E_-}-1\right),\qquad \varepsilon=\frac{15}{2(1+\nu_0)(2-\nu_0)}\left(\frac{E_0}{E_-}-1\right); \tag{30}$$

$$\varepsilon=\frac{15\pi(2-\nu_0)}{8(1-\nu_0^2)}\left(\frac{\nu_-E_0}{E_-}-\nu_0\right),\qquad \varepsilon=\frac{15}{(1+\nu_0)(2-\nu_0)}\left(\frac{\nu_-E_0}{E_-}-\nu_0\right); \tag{31}$$

$$\varepsilon=\frac{15\pi(2-\nu_0)}{4(1-\nu_0^2)(10-3\nu_0)}\left(\frac{E_0}{E_+}-1\right),\qquad \varepsilon=\frac{15}{2(5-4\nu_0)(1+\nu_0)}\left(\frac{E_0}{E_+}-1\right), \tag{32}$$

$$\varepsilon=\frac{15\pi(2-\nu_0)}{4\nu_0(1-\nu_0^2)}\left(\frac{\nu_+E_0}{E_+}-\nu_0\right),\qquad \varepsilon=\frac{15}{\nu_0(1+\nu_0)}\left(\frac{\nu_+E_0}{E_+}-\nu_0\right). \tag{32a}$$

Для определения параметров ε, k можно воспользоваться соотношением

$$Q_3(k)\left(\frac{1}{E_+}-\frac{1}{E_-}\right)=\frac{6(\nu_--\nu_0)}{E_-(1-2\nu_0)[Q_1(k)+Q_2(k)]}. \tag{33}$$

Это уравнение, являющееся результатом приравнивания выражений (24) и (25) с последующим исключением из полученного соотношения с помощью первого выражения (23) параметра E_0, позволяет определить параметр k для заданных значений ν_0, E_+, ν_+, E_-, ν_-.

Решение уравнения (33) неоднозначно в силу его трансцендентности. Физический смысл имеют все значения корней в интервале $[0; 1]$. Соответствующие значения параметра $\varepsilon = \frac{4\pi}{3} N_0 < a'^3 k_1^2 >$ определяются из любого выражения (24)–(32). Для нахождения характерных значений a, N_0 необходима дополнительная информация об одном из этих параметров, например о размерах структурных элементов, если трещины представляют собой плоскости разрыва элементов.

Зачастую экспериментально определяются параметры упругости материалов при растяжении либо сжатии, которые затем отождествляются с таковыми для сплошного материала. В случае разномодульных материалов, как правило [1], информация об упругих свойствах сплошного материала отсутствует. Изложенная выше методика позволяет определять постоянные упругости сплошного материала при заданных параметрах упругости при растяжении и сжатии, если причина разномодульности материала – трещиноватость.

Процедуру определения постоянных упругости сплошного материала проиллюстрируем на примере разномодульного материала [1] типа чугуна СЧ12-28 с макрохарактеристиками упругости:

$$\begin{aligned} &E_+ = 11{,}17695 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \ \nu_+ = 0{,}22; \\ &E_- = 12{,}18728 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \ \nu_- = 0{,}27. \end{aligned} \tag{34}$$

Для этой цели воспользуемся уравнением относительно неизвестной ν_0 (33). В предельных случаях по параметру k $(k = 0,\, k = 1)$ это уравнение принимает вид

$$\frac{3(2-\nu_0)}{2E_-}\left(\frac{\nu_- - \nu_0}{1-2\nu_0}\right) = \left(\frac{1}{E_+} - \frac{1}{E_-}\right), \qquad \frac{6(1-\nu_0)}{E_-(1-2\nu_0)}\left(\frac{\nu_- - \nu_0}{2-\nu_0}\right) = \left(\frac{1}{E_+} - \frac{1}{E_-}\right).$$

В результате решения этих уравнений с учетом (34) получим

$$\nu_0 = 0{,}25298 \text{ при } k = 0 \text{ и } \nu_0 = 0{,}25258 \text{ при } k = 1.$$

На основании первой формулы из (23) следуют значения модуля упругости:

$$E_0 = 13{,}08913 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \qquad E_0 = 13{,}11025 \cdot 10^{10} \text{ Па}.$$

В данном случае, как уже указывалось выше, имеем неединственное решение поставленной задачи в силу неоднозначной зависимости модуля упругости от параметра k.

С учетом полученных результатов из формул (24)–(32) имеем следующие значения параметров трещиноватости: $\varepsilon = 0{,}40878$, $\varepsilon = 0{,}25960$.

Указанным величинам соответствуют такие значения принятых в литературных источниках [6] параметров трещиноватости: $N_0 < a'b'^2 > = 0{,}09759$; 0,06198.

Постоянные упругости сплошного материала в случае других возможных промежуточных значений параметра k можно вычислить с помощью уравнения (33).

Для получения однозначного решения рассмотренной задачи следует конкретизировать характерные размеры структурных элементов материала, т.е. задать соответствующие данным (34) значения параметра k.

Таким образом, изложенная выше методика учета поврежденности среды при соответствующих данных о трещиноватых дефектах и их распределении по объему позволяет находить эффективные характеристики упругости трещиноватого материала, а при наличии макрохарактеристик упругости поврежденного материала при растяжении и сжатии – характеристики сплошного материала.

При проведении исследований необходимо установить причины и способы нарушения сплошности материала рассмотренного типа, приводящей к его разномодульности.

Не акцентируя внимания на причинах технологического характера, остановимся на таковых эксплуатационного типа.

Нарушение сплошности материала путем растрескивания структурных элементов. В (14) осредненное значение области возмущения, вносимой эллиптической трещиной, отождествляется с объемом эллипсоида вращения с осями трещины. При заданной системе трещин влияние трещиноватости на деформационные свойства материала определяется параметрами ε и k. В случае систем трещин с одинаковой концентрацией наиболее неблагоприятный результат получен при $k \to 1$, т.е. при максимальной площади трещин.

Ввиду недостатка информации о размерах и характере распределения микротрещин в реальных телах целесообразно связывать их образование с разрывами структурных элементов. Форма и размеры трещин отождествляются с таковыми для сечений разрыва структурных элементов материала. Поскольку степень влияния поврежденности на деформационные свойства материала связана с величиной площади нарушения его сплошности, из соображений обеспечения определенных гарантий можно принять, что структурные элементы в виде вытянутых и сплюснутых эллипсоидов вращения растрескиваются по меридианным и экваториальным сечениям максимальной площади.

Для описания процесса прогрессирующей микроповреждаемости используется структурная модель накопления повреждений Даниэлса. Суть физической модели Даниэлса применительно к структурно-неоднородной среде описана в [5] и заключается в следующем.

Пусть в лабораторной (неподвижной) системе координат $0x_1x_2x_3$, оси которой направлены по взаимно перпендикулярным радиусам случайного шара единичного радиуса, выбранного в качестве представительного объема, заданы средние напряжения σ_{ij}. Локальные системы координат $0'x_1'x_2'x_3'$ выбираются таким образом, чтобы оси $0'x_3'$ были направлены по нормали к поверхности шара. На поверхности случайного шара в окрестности оси $0'x_3'$ выделяется элементарная область площадью $d\Omega = \sin\vartheta d\vartheta d\psi$, которая пересекает N структурных элементов. В сечениях пересекаемых структурных элементов действует одинаковое локальное истинное напряжение $\bar{\sigma}'_{33}$, отличающееся от условных σ'_{33} тем, что первые относятся к площадкам поврежденной среды, вторые – к площадкам сплошной среды. Считается, что все структурные элементы в шаре имеют одинаковые характеристики упругости. В качестве критерия разрушения микроэлементов материала путем отрыва принимается соотношение первой теории прочности:

$$\bar{\sigma}'_{33} \ge \sigma, \tag{35}$$

где σ – случайная величина, соответствующая предельным значениям истинного растягивающего либо сжимающего нормального напряжения для различным образом ориентированных структурных элементов.

Для аппроксимации распределения прочностных свойств кристаллитов и зерен различной ориентации в микронеоднородных материалах используются различные законы: степенной; функция распределения Вейбулла; функция Пирсона третьего рода и др.

Степенной закон представляется в виде [5]

$$F_i(\sigma) = \begin{cases} 0 & (\sigma < \sigma_{0i}); \\ \dfrac{(\sigma - \sigma_{0i})^{\alpha_i}}{(\sigma_i - \sigma_{0i})^{\alpha_i}} & (\sigma_{0i} \le \sigma \le \sigma_i); \\ 1 & (\sigma > \sigma_i), \end{cases} \tag{36}$$

где σ_{0i}, σ_i – минимальная и максимальная величины предельных значений σ при сжатии ($i = 1$) и растяжении ($i = 2$); α_i – параметр разброса микропрочности.

Параметры распределения α_i, σ_{0i}, σ_i находятся по выборочным значениям, например, методом моментов. Суть метода состоит в приравнивании определенного количества выборочных моментов к соответствующим моментам распределения, которые являются функциями неизвестных параметров σ_{0i}, σ_i, α_i. При рассмотрении количества моментов, равного числу подлежащих определению параметров, и решении уравнений относительно этих параметров получим искомые оценки параметров распределения.

При двупараметрическом распределении ($\sigma_{0i} = 0$) необходимые уравнения имеют вид

$$<\sigma_i> = \frac{\alpha_i}{1+\alpha_i}\sigma_i, \qquad D_i^2 = \frac{\alpha_i}{2+\alpha_i}\sigma_i^2 - \frac{2\alpha_i <\sigma_i> \sigma_i}{1+\alpha_i} + <\sigma_i>^2, \tag{37}$$

где основные моменты – средняя микропрочность $<\sigma_i>$ и дисперсия D_i.

Элемент разрушится по достижении напряжением $\bar{\sigma}'_{33}$ предельного значения σ. Разрушение отдельных элементов образует совокупность независимых случайных событий. Взаимодействие элементов между собой состоит в том, что после разрушения части из них происходит перераспределение напряжений между оставшимися целыми элементами.

Число разрушенных элементов n является случайной величиной, для которой справедлива схема независимых испытаний Бернулли. Согласно схеме, вероятность реализации n результатов из общего числа испытаний N определяется формулой $P_N^n = C_N^n p^n q^{N-n}$, где C_N^n – биномиальные коэффициенты; p – вероятность данного результата в наугад взятом испытании, в данном случае $p = F_i(\sigma)$; $q = 1 - p$. По достижении истинными растягивающими нормальными напряжениями $\bar{\sigma}'_{33}$ предельных значений эти элементы разрушаются путем образования в них микротрещин с плоскостями, нормальными к направлению действия этих напряжений. В случае сжимающих напряжений $(\sigma'_{33} < 0)$ образующиеся микротрещины ориентируются преимущественно параллельно направлению действия σ'_{33} [7]. С учетом этого имеет место равенство $\bar{\sigma}'_{33} = \sigma'_{33}$, так как разрушенные структурные элементы материала сопротивляются сжатию как сплошные.

Если условное локальное растягивающее напряжение σ'_{33} является независимым параметром нагружения, в рамках рассматриваемой модели истинное локальное напряжение в сечениях неразрушенных структурных элементов является случайной величиной $\bar{\sigma}'_{33} = \sigma'_{33}/(1 - n/N)$. Распределение $\bar{\sigma}'_{33}$ зависит от распределения числа элементов n. Математическое ожидание этого числа – $< n_i > = NF_i(\bar{\sigma}'_{33})$, коэффициент вариации – $w_{ni} = \left[\dfrac{1 - F_i(\bar{\sigma}'_{33})}{NF_i(\bar{\sigma}'_{33})}\right]^{1/2}$ [5]. Из последней формулы следует, что при некотором значении $\bar{\sigma}'_{33}$ коэффициент вариации числа n обратно пропорционален квадратному корню из числа структурных элементов, пересекаемых поверхностью выделенного в случайном шаре телесного угла. Для реальных материалов это число весьма велико по сравнению с единицей. Поэтому допустимо пренебречь разбросом величины n и, следовательно, $\bar{\sigma}'_{33}$. В результате замены последней математическим ожиданием следует

$$\bar{\sigma}'_{33} \approx \frac{\sigma'_{33}}{1 - F_i(\bar{\sigma}'_{33})}. \tag{38}$$

На основании изложенного средние плотности микродефектов на поверхности случайного шара при заданных растягивающих и сжимающих напряжениях σ_{ij} соответственно определяются по формулам

$$\begin{aligned} \varepsilon_+ &= \frac{1}{\bar{N}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} F_2(\bar{\sigma}'_{33})\,d\Omega = \frac{1}{\bar{N}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} F_2(\bar{\sigma}'_{33}) \sin\theta\, d\theta\, d\psi; \\ \varepsilon_- &= \frac{1}{\bar{N}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} F_1(\sigma'_{33})\,d\Omega = \frac{1}{\bar{N}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} F_1(\sigma'_{33}) \sin\theta\, d\theta\, d\psi, \end{aligned} \tag{39}$$

где $\bar{\sigma}'_{33}$ через σ_{ij} выражается формулами (6), (7), (38), σ'_{33} – формулами (6), (7); $\bar{N} = 4\pi$ – нормирующий множитель,

$$\frac{1}{\bar{N}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} F_i(\bar{\sigma}'_{33}) \sin\theta\, d\theta\, d\psi = 1 \qquad \text{при} \qquad \bar{\sigma}'_{33} = \sigma_i. \tag{40}$$

При двупараметрическом распределении микропрочности (36) в случае $0 \le \bar{\sigma}'_{33} << \sigma_2$ выражение для $F_2(\bar{\sigma}'_{33})$ упрощается к виду

$$F_2(\bar{\sigma}'_{33}) \approx F_2(\sigma'_{33}) = \left(\frac{\sigma'_{33}}{\sigma_i}\right)^{\alpha_2} \left[1 + \alpha_2 \left(\frac{\sigma'_{33}}{\sigma_2}\right)^{\alpha_2}\right]. \qquad (41)$$

Физическая суть величин ε_+, ε_- состоит в том, что они представляют собой средние доли единичной площади поверхности случайного шара, на которой нормальные растягивающие и сжимающие напряжения достигают пределов прочности σ пересекаемых поверхностью шара микрочастиц. Объемная концентрация плоских микродефектов будет определяться отношением числа разрушенных микрочастиц N_0 к их общему числу N $(\varepsilon = N_0/N)$ в представительном объеме. Воспользовавшись приемом, применяемым в петрографии для анализа тонких срезов осадков [18], можно показать, что в зависимости от характера нагружения имеем $\varepsilon = \varepsilon_+$ либо $\varepsilon = \varepsilon_-$. Поскольку для единичного объема $N \dfrac{4\pi}{3} < a'b'^2 > = 1,$ можно записать $\varepsilon = \dfrac{4\pi}{3} N_0 < a'b'^2 >.$

В качестве примера приведем формулы для параметров трещиноватости при всестороннем равномерном растяжении и сжатии материала.

Пусть распределение микропрочности материала при сжатии и растяжении описывается двупараметрическим $(\sigma_{0i} = 0)$ степенным законом (36). Тогда на основании (39) с учетом (36), (41) при всестороннем равномерном растяжении $(\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_+ > 0)$ и сжатии $(\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_- < 0)$ тела для параметров трещиноватости соответственно получим

$$\varepsilon_+ = \left(\frac{\sigma_+}{\sigma_2}\right)^{\alpha_2} \left[1 + \alpha_2 \left(\frac{\sigma_+}{\sigma_2}\right)^{\alpha_2}\right], \qquad \varepsilon_- = (\sigma_-/\sigma_1)^{\alpha_1}. \qquad (42)$$

Параметры упругости среды при растяжении $(E_+,\ \nu_+)$ напряжениями интенсивностью σ_+ и соответственно σ_- при сжатии $(E_-,\ \nu_-)$ будут определяться формулами (19), (20) и (42).

Заключение. Таким образом, трещиноватость материала является одной из возможных причин разномодульности материала. Представленный способ моделирования трещиноватости среды позволяет строить непротиворечивую систему определяющих уравнений разномодульной теории упругости при условии задания функции распределения трещин либо микропрочности материала.

Р е з ю м е

На основі енергетичного методу з врахуванням взаємодії берегів тріщин отримано вирази для ефективних характеристик пружності матеріалів, послаблених системою хаотично розподілених по об’єму еліптичних тріщин. Досліджується вплив геометрії мікротріщин на ефективні постійні пружності пошкодженого матеріалу.

1. *Амбарцумян С. А.* Разномодульная теория упругости. – М.: Наука, 1982. – 317 с.
2. *Бабич Д. В.* Моделирование связанного процесса деформирования и трещинообразования упругохрупких материалов // Пробл. прочности. – 2004. – № 2. – С. 96 – 105.
3. *Бабич Д. В.*, *Шикула Е. Н.* Устойчивость пластин из зернистого композита с физически нелинейными включениями и повреждающейся матрицей // Там же. – 2009. – № 2. – С. 91 –101.
4. *Бобырь Н. И.* Обобщенная модель повреждаемости конструкционных материалов при сложном малоцикловом нагружении // Там же. – 2000. – № 5. – С. 112 – 121.
5. *Болотин В. В.* Прогнозирование ресурса машин и конструкций. – М.: Машиностроение, 1984. – 312 с.
6. *Волков С. Д.* Статистическая теория прочности. – М.: Машгиз, 1960. – 176 с.
7. *Германович Л. Н.*, *Дыскин А. В.* Модель разрушения хрупкого материала с трещинами при одноосном нагружении // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1988. – № 2. – С. 118 – 131.
8. *Лебедев А. А.*, *Чаусов Н. Г.*, *Богинич И. О.*, *Недосека С. А.* Комплексная оценка поврежденности материала при пластическом деформировании // Пробл. прочности. – 1996. – № 5. – С. 23 – 30.
9. *Салганик Р. Л.* Механика тел с большим числом трещин // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – № 4. – С. 149 – 158.
10. *Тамуж В. П.*, *Куксенко В. С.* Микромеханика разрушения полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1978. – 294 с.
11. *Хорошун Л. П.* Основы микромеханики повреждаемости материала. 1. Кратковременная повреждаемость // Прикл. механика. – 1998. – **34**, № 10. – С. 120 – 127.
12. *Хорошун Л. П.*, *Назаренко Л. В.* Деформативные свойства и долговременная повреждаемость трансверсально-изотропных композитов при дробно-степенной функции микропрочности // Там же. – 2009. – **45**, № 1. – С. 71 – 81.
13. *Хорошун Л. П.*, *Назаренко Л. В.* Деформирование и длительная повреждаемость ортотропных композитов при ограниченной функции длительной микропрочности // Там же. – № 4. – С. 52 – 65.
14. *Kachanov M.* Effective elastic properties of cracked solids: critical review of some basic concepts // App. Mech. Rev. – 1992. – **45**, No. 8. – P. 305 – 336.
15. *Kachanov M.* Elastic solids with many cracks: a simple method of analysis // Int. J. Solids Struct. – 1987. – **43**. – P. 23 – 45.
16. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1983. – 334 с.
17. *Кильчевский Н. А.* Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1977. – Т. 2. – 479 с.
18. *Кендалл М.*, *Моран П.* Геометрические вероятности. – М.: Наука, 1972. – 192 с.

Поступила 18. 11. 2009