

# НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

УДК 539.4

## Моделирование пластического деформирования цилиндрического образца при торцевом сжатии

В. М. Михалевич<sup>а</sup>, А. А. Лебедев<sup>б</sup>, Ю. В. Добранюк<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Винницкий национальный технический университет, Винница, Украина

<sup>б</sup> Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

*Разработаны математические модели и информационные технологии экспериментально-аналитического определения напряженно-деформированного состояния и предельной накопленной деформации материала на бочкообразной боковой поверхности цилиндрического образца при торцевом сжатии. Впервые построена модель, позволяющая прогнозировать предельную накопленную пластическую деформацию, в виде аналитической зависимости между компонентами пластических деформаций, отражающей указанные условия нестационарного деформирования.*

**Ключевые слова:** предельная накопленная деформация, нестационарное деформирование, осесимметричное сжатие.

**Введение.** Осесимметричное сжатие цилиндрических образцов является одним из важнейших методов лабораторных испытаний, проводимых с целью определения механических свойств материалов, которые необходимы при разработке многих распространенных технологических операций, в частности при осадке. Как известно [1], при сжатии цилиндрических образцов из малопластичных материалов на боковой поверхности образуются трещины. Степень осадки, при которой появляются трещины, зависит от интенсивности бочкообразования, в свою очередь, зависящего от условий трения на торцах образца [1]. К настоящему времени возник значительный разрыв между современными возможностями информационных технологий и существующими методиками определения напряженно-деформированного состояния и предельных пластических деформаций материала при нестационарных процессах на боковой поверхности цилиндрического образца при сжатии. Подобная ситуация приводит к неоправданным интеллектуальным и временным затратам исследователей и инженеров при решении многих научных и технологических задач, а также к погрешностям, которые возникают из-за субъективизма специалиста при построении соответствующих математических моделей.

Что касается численного моделирования процессов деформирования с помощью современных программных комплексов (например, Q-form, D-form, ANSYS), то в этом отношении накопление экспериментально-аналитических

результатов всегда будет актуальным при их освоении и адаптации для моделирования пластического деформирования материалов.

**Аппроксимация зависимости между осевой и окружной деформациями.** На боковую поверхность цилиндрического образца в средней по высоте зоне наносится делительная сетка. По результатам измерений искаженной делительной сетки на промежуточных стадиях деформирования устанавливается зависимость между осевой  $\varepsilon_z$  и окружной  $\varepsilon_\varphi$  деформациями

$$\varepsilon_z = F(\varepsilon_\varphi) \quad (1)$$

в виде таблично заданной функции. Деформации  $\varepsilon_z$  и  $\varepsilon_\varphi$  определяются как натуральные логарифмы отношений текущих размеров образцов к начальным.

Неизвестны физические предпосылки для построения (1), однако можно сформулировать условия, удовлетворяющие дифференциальному уравнению

$$\frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\varphi} = f(\varepsilon_\varphi), \quad (2)$$

более общее выражение которого имеет вид

$$\Phi\left(\frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\varphi}, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_z\right) = 0. \quad (3)$$

Таковыми условиями являются следующие.

В начальный момент при  $\varepsilon_\varphi = 0$  имеет место простое сжатие

$$\frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\varphi} = -2. \quad (4)$$

С увеличением  $\varepsilon_\varphi$ , ввиду развития бочкообразности боковой поверхности, отношение приращений осевой и окружной деформаций увеличивается (по абсолютной величине уменьшается):

$$\frac{d\left(\frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\varphi}\right)}{d\varepsilon_\varphi} = \frac{d^2\varepsilon_z}{d\varepsilon_\varphi^2} \leq 0. \quad (5)$$

При неограниченном повышении деформации получим

$$\lim_{\varepsilon_\varphi \rightarrow \infty} \frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\varphi} = -\frac{1}{2}. \quad (6)$$

Т а б л и ц а 1

Аппроксимации зависимости между осевой  $\varepsilon_z$  и окружной  $\varepsilon_\varphi$  деформациями

Аппроксимация в виде дифференциального уравнения	Аппроксимация в виде решения соответствующего дифференциального уравнения	Параметрическое представление аппроксимации в виде решения соответствующего дифференциального уравнения
(7) $\frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\varphi} = -\frac{1}{2} \frac{3}{\varepsilon_\varphi^2 + m^2}, m > 0$	$\varepsilon_z = -\frac{1}{2} \varepsilon_\varphi - \frac{3}{2} m \operatorname{arctg} \left( \frac{\varepsilon_\varphi}{m} \right)$	$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\varphi &= m \operatorname{tg}(t), \\ \varepsilon_z &= -\frac{m}{2} (\operatorname{tg}(t) + 3t), \end{aligned} \right\} t \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]$ (19)
(8) $\frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\varphi} = -\frac{1}{2} \frac{3}{\varepsilon_z^2 + p^2}, p > 0$	$\varepsilon_\varphi = -2\varepsilon_z + 3p \operatorname{arctg} \left( \frac{\varepsilon_z}{2p} \right)$	$\left. \begin{aligned} \varepsilon_z &= -2p \operatorname{tg}(t), \\ \varepsilon_\varphi &= p(4 \operatorname{tg}(t) - 3t), \end{aligned} \right\} t \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]$ (20)
(9) $\frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\varphi} = -\frac{1}{2} \frac{3}{e^{-\varepsilon_\varphi/m}}, m > 0$	$\varepsilon_z = -\frac{1}{2} \varepsilon_\varphi + \frac{3m}{2} (e^{-\varepsilon_\varphi/m} - 1)$	$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\varphi &= -m \ln(1-t), \\ \varepsilon_z &= \frac{m}{2} [\ln(1-t) - 3t], \end{aligned} \right\} t \in [0, 1]$ (21)
(10) $\frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\varphi} = -ae^{-b\varepsilon_\varphi}, a > 0, b > 0$	$\varepsilon_z = \frac{a}{b} (e^{-b\varepsilon_\varphi} - 1)$	$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\varphi &= -\frac{1}{b} \ln(1-t), \\ \varepsilon_z &= -\frac{a}{b} t, \end{aligned} \right\} t \in [0, 1]$ (22)

**Примечание.**  $m, p, a, b$  – параметры аппроксимаций;  $t$  – параметр, характеризующий стадию процесса пластического деформирования.

Т а б л и ц а 2

Параметры аппроксимаций зависимости между компонентами деформаций

Вид аппроксимации $\varepsilon_z = f(\varepsilon_\varphi)$	Значения параметров	Сумма квадратов расхождений $S$ между расчетными и экспериментальными данными
(12)	$m = 0,5$	0,001081
(13)	$p = 0,857$	0,001080
(14)	$m = 0,866$	0,002874
(15)	$a = 2,15; b = 1,057$	0,001025

**Примечание.**  $S = \sum_i [(\varepsilon_z)_i - f((\varepsilon_\varphi)_i)]^2$  для (12), (14), (15);  $S = \sum_i [(\varepsilon_\varphi)_i - \varphi((\varepsilon_z)_i)]^2$  для (13).

Желательно, чтобы функции (2), (3) имели только один параметр, значение которого определяется по экспериментальным данным.

Структура функций (2), (3) должна удовлетворять как требованию интегрируемости соответствующего дифференциального уравнения, так и требованию минимальной вычислительной сложности, в частности, при определении предельных пластических деформаций.

В рамках сформулированных требований выбор структуры соотношений (2), (3) не является однозначным. Разработка информационных технологий предусматривает построение ряда выражений для предоставления исследователю возможности выбора аналитической зависимости, наиболее подходящей для описания полученных экспериментальных данных, которые, в свою очередь, зависят от материала, отношения высоты к диаметру образца, условий трения на торцах. Кроме того, в связи с неоднозначностью выбора структуры соотношений (2), (3) возникает необходимость подтверждения достоверности их восстановления по экспериментальным данным и полученных на их основе результатов моделирования пластического деформирования. Дело в том, что при моделировании пластического деформирования используются производные зависимости (1), значения которых могут существенно различаться для разных математических ее представлений, описывающих с одинаковой точностью одни и те же экспериментальные данные.

Выражение (7), представленное в табл. 1, предложено Г. А. Смирновым-Аляевым [2], остальные соотношения – авторами настоящей работы. Зависимость (9) удовлетворяет всем вышесформулированным требованиям, (7), (8) – приводят к сложным вычислительным операциям, (10) – удовлетворяет только условию выпуклости зависимости (1).

В результате решения дифференциальных уравнений (7)–(10) с учетом начального условия

$$\varepsilon_z |_{\varepsilon_\varphi=0} = 0 \quad (11)$$

получены зависимости (12)–(15), приведенные в табл. 1.

Для определения параметров, входящих в данные аппроксимирующие выражения, необходимо проведение испытаний с сохранением неизменными условий трения на торцах при сжатии образца. Изменяя эти условия, экспериментально получаем зависимости, которые можно аппроксимировать одним из соотношений (12)–(15) при обоснованном выборе значений соответствующих параметров. Здесь важно, что данные параметры полагаются неизменными при описании результатов испытания образца.

Определение значений параметров аппроксимаций методом наименьших квадратов приводит к необходимости решения трансцендентного уравнения сложной структуры (для (15) решения системы из двух таких уравнений). Поэтому параметры уравнения определяли путем непосредственной минимизации суммы квадратов отклонений с использованием стандартной команды дополнительного пакета Optimization системы Maple и перепроверяли с помощью надстройки Microsoft Excel Solver.

Экспериментальные и расчетные результаты приведены в табл. 2 и на рис. 1. Различие в значениях суммы квадратов расхождений полученных данных для разных аппроксимаций лежит в пределах погрешности технических

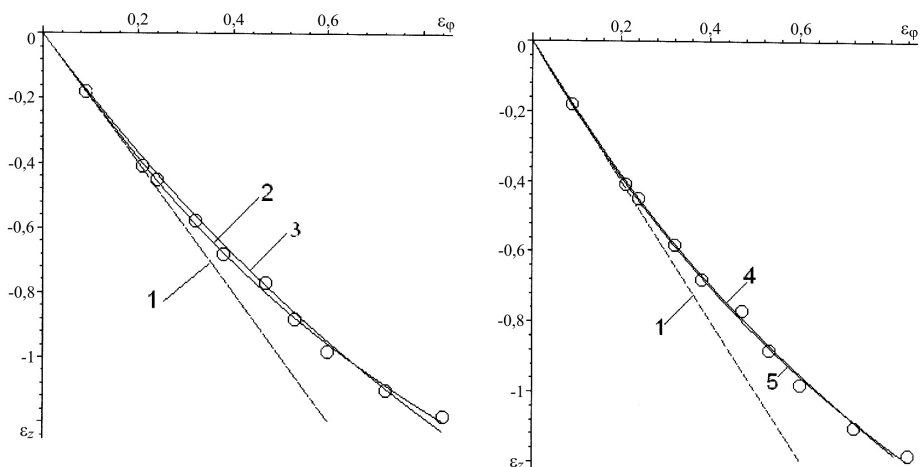


Рис. 1. Экспериментальные (точки) и расчетные (линии) зависимости между осевой  $\varepsilon_z$  и окружной  $\varepsilon_\varphi$  деформациями для стали 10: 1 –  $\varepsilon_z = -2\varepsilon_\varphi$ ; 2, 3 – расчет по (12) ( $m = 0,5$ ) и (14) ( $m = 0,866$ ); 4, 5 – расчет по (13) ( $p = 0,857$ ) и (15) ( $a = 2,15$ ;  $b = 1,057$ ).

измерений. При этом наибольший интерес представляют не сами аппроксимации, а результаты расчета предельных деформаций, которые обсуждаются ниже.

**Определение накопленной пластической деформации и интенсивности логарифмических деформаций.** К актуальным задачам относятся определение на основании построенных зависимостей накопленной деформации, обоснование преимущества данной меры в сравнении с интенсивностью логарифмических деформаций, а также разработка некоторых рекомендаций по упрощенному вычислению накопленной пластической деформации без существенной потери точности.

Накопленная пластическая деформация определяется следующим образом:

$$\varepsilon_{\text{и}}(t) = \int \overline{d\varepsilon_{\text{и}}}, \quad (16)$$

где  $\overline{d\varepsilon_{\text{и}}}$  – интенсивность приращений деформаций,

$$\overline{d\varepsilon_{\text{и}}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{d\varepsilon_z^2 + d\varepsilon_z d\varepsilon_\varphi + d\varepsilon_\varphi^2}. \quad (17)$$

Перепишем соотношение (16) с учетом (17):

$$\varepsilon_{\text{и}}(\varepsilon_\varphi) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \int_0^{\varepsilon_\varphi} \left( \sqrt{\left( \frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\varphi} \right)^2 + \frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\varphi} + 1} \right) d\varepsilon_\varphi. \quad (18)$$

Дальнейшие преобразования выполняли с использованием параметрических представлений (19)–(22) – табл. 1. Выражения (23)–(26) для определения накопленной пластической деформации, соответствующие предложенным аппроксимациям, приведены в табл. 3.

Т а б л и ц а 3

Аналитическое представление траектории деформаций в координатах  $\eta - \varepsilon$  и

Накопленная пластическая деформация $\varepsilon_n$	Показатель напряженного состояния $\eta$
$\varepsilon_n(t, m) = m \int_0^t \left( \sqrt{3 + \frac{1}{\cos^4(x)}} \right) dx, \quad t \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right] \quad (23)$	$\eta(t) = -\frac{1 - 3 \cos^2(t)}{\sqrt{1 + 3 \cos^4(t)}}, \quad t \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right] \quad (37)$
$\varepsilon_n(t, p) = p \int_0^t \left( \sqrt{\frac{4}{\cos^2(x)} - 3} + 3 \right) dx, \quad t \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right] \quad (24)$	$\eta(t) = \frac{3 \sin^2(t) - 1}{\sqrt{1 + 3 \sin^4(t)}}, \quad t \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right] \quad (38)$
$\varepsilon_n(t, m) = m \int_0^t \left( \sqrt{\frac{1}{(1-x)^2} + 3} \right) dx =$ $= \frac{m}{2} \left[ 4 + \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1 + 3(1-t)^2} + 1}{3 \sqrt{1 + 3(1-t)^2} - 1} \right) - 2 \sqrt{1 + 3(1-t)^2} \right], \quad t \in [0, 1] \quad (25)$	$\eta(t) = \frac{3t - 2}{\sqrt{1 + 3(1-t)^2}}, \quad t \in [0, 1] \quad (39)$
$\varepsilon_n(t, a, b) = \frac{1}{b} \int_0^t \sqrt{1 + \frac{1}{3}(1-2a(1-x))^2} \frac{1}{1-x} dx =$ $= \frac{2\sqrt{3}}{3b} \left[ \sqrt{a^2 - a + 1} - \sqrt{a^2(1-t)^2 - a(1-t) + 1} - \right.$ $\left. - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{2a - 1 + 2\sqrt{a^2 - a + 1}}{2a(1-t) - 1 + 2\sqrt{a^2(1-t)^2 - a(1-t) + 1}} \right) + \right.$ $\left. + \ln \left( \frac{2(1 + \sqrt{a^2(1-t)^2 - a(1-t) + 1}) - a(1-t)}{(1-t)[2(1 + \sqrt{a^2 - a + 1}) - a]} \right) \right], \quad t \in [0, 1] \quad (26)$	$\eta(t) = -\frac{2[1 - a(1-t)]}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}(1 - 2a(1-t))^2}}, \quad t \in [0, 1] \quad (40)$

Интенсивность логарифмических деформаций

$$e_{и}(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{\varepsilon_z^2(t) + \varepsilon_z(t)\varepsilon_\varphi(t) + \varepsilon_\varphi^2(t)} \quad (27)$$

для аппроксимации (19) определяется выражением

$$e_{и}(t, m) = m\sqrt{\operatorname{tg}^2(t) + 3t^2}, \quad (28)$$

где  $m, t$  – параметры, характеризующие условия испытаний и стадию деформирования металла.

В работе [3] показано, что накопленная деформация (16) пропорциональна длине дуги траектории деформаций в координатах  $\varepsilon_z, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_r$  ( $\varepsilon_r$  – радиальная деформация), а интенсивность логарифмических деформаций (27) – длине радиус-вектора конечной точки этой траектории. Строгое равенство между указанными мерами деформаций имеет место только для прямолинейных траекторий деформаций в данных координатах. В свою очередь, прямолинейные траектории порождаются процессами деформирования, при которых с ростом деформаций соотношения приращений деформаций остаются неизменными. При сжатии цилиндрического образца, в случае бочкообразования, соотношение приращений деформаций изменяется и, как было показано выше, может быть отражено, в частности, зависимостью (7). Различие в числовых значениях накопленной деформации и интенсивности логарифмических деформаций, определенных на основе рассматриваемых экспериментальных данных, представлено на рис. 2. Накопленная деформация мало отличается от интенсивности логарифмических деформаций для значений абсолютной величины осевой деформации, не превышающей 0,6. С увеличением абсолютной величины осевой деформации и с уменьшением параметра  $m$  погрешность заметно возрастает. Небольшое различие между накопленной деформацией и интенсивностью логарифмических деформаций, а также более простое выражение для вычисления последней позволили авторам построить аппроксимацию для вычисления накопленной деформации, представленную элементарной функцией [3]

$$m \int_0^t [\sqrt{\cos^{-4}(\tau) + 3}] d\tau = m \{ \sqrt{\operatorname{tg}^2(t) + 3t^2} + h(t - t_0)[0,04305092296(t - t_0) - 0,01108086209(t - t_0)^2 + 0,8263531073(t - t_0)^4 + 0,1620143791(t - t_0)^6] \}. \quad (29)$$

Погрешность предложенной аппроксимации не превышает 0,08% для широкого диапазона изменения параметров  $m, t: m \in [0,01; 20], t \in [0; \pi/2 - 0,005]$ .

Для построения эффективных схем вычисления предельных деформаций необходимо из представления накопленной деформации исключить интеграл, который нельзя выразить через элементарные функции.

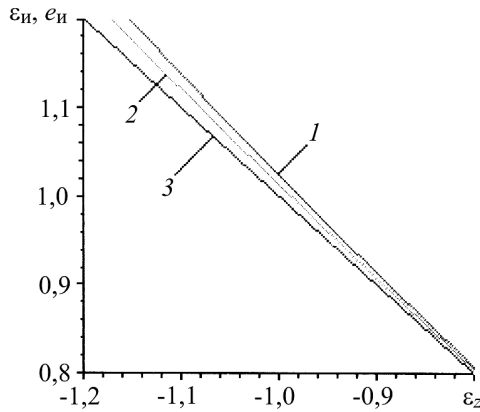


Рис. 2. Зависимость накопленной деформации и интенсивности логарифмических деформаций от величины осевой деформации ( $m = 0,5$ ): 1 – накопленная деформация (23); 2 – интенсивность логарифмических деформаций (28); 3 –  $\varepsilon_{и} = -\varepsilon_z$ .

Следует заметить, что замена левой части соотношения (29) элементарной функцией, представляющей собой внешне негромоздкое выражение, относится к задаче неэлементарной или во всяком случае нетривиальной. Это связано с тем, что данное выражение зависит от двух аргументов, причем по одной из переменных является расходящимся несобственным интегралом второго рода.

Что касается соотношения (26), то, несмотря на внешне более громоздкий в сравнении с (23) или (24) вид, вычисления с его помощью выполняются быстрее, поскольку исключается необходимость численного интегрирования.

**Определение напряженного состояния.** При определении напряженного состояния использовали деформационную теорию пластичности:

$$s_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_{и}}{e_{и}} \varepsilon_{ij}, \quad (30)$$

где  $s_{ij}$  – девиатор напряжений,  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma$ ;  $\sigma_{ij}$  – тензор напряжений;  $\sigma$  – среднее напряжение;  $\varepsilon_{ij}$  – логарифмические деформации, и теорию течения:

$$s_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_{и}}{d\varepsilon_{и}} d\varepsilon_{ij}. \quad (31)$$

Учитывая, что на свободной поверхности нормальное напряжение  $\sigma_r$  равно нулю, на основании соотношений теории течения получаем

$$\sigma_{\varphi} = \frac{2}{3} \sigma_{и} \frac{2 + \frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_{\varphi}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{3} \left( 2 \frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_{\varphi}} + 1 \right)^2}}; \quad (32)$$



$$\sigma_z = \frac{2}{3} \sigma_{и} \frac{2 \frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\varphi} + 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{3} \left( 2 \frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\varphi} + 1 \right)^2}}. \quad (33)$$

В теории деформируемости традиционно используется показатель напряженного состояния  $\eta$  [1, 2, 4]:

$$\eta = \frac{3\sigma}{\sigma_{и}}. \quad (34)$$

Теоретическое обоснование данного показателя выполнено ранее [5], в частности, показаны его преимущества при исследовании плоского напряженного состояния.

Согласно теории течения, показатель  $\eta$  определяется следующим выражением

$$\eta = \frac{2 \left( \frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\varphi} + 1 \right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{3} \left( 2 \frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\varphi} + 1 \right)^2}}. \quad (35)$$

С учетом (7) получим

$$\eta = \frac{2 \left( \frac{1}{2} - \frac{3m^2}{2(\varepsilon_\varphi^2 + m^2)} \right)}{\sqrt{1 + \frac{3m^4}{(\varepsilon_\varphi^2 + m^2)^2}}}, \quad \varepsilon_\varphi \in [0, \infty), \quad (36)$$

а с использованием параметрического представления (19) – соотношение (37) в табл. 3. Там же приведены выражения (38)–(40), соответствующие другим аппроксимациям, анализ которых позволяет обнаружить важное преимущество параметрических представлений (19)–(22): показатель  $\eta$  определяется только параметром процесса  $t$  и не зависит от величин  $m$ ,  $p$ ,  $a$ ,  $b$ , характеризующих условия испытания образца, тогда как по выражению (36)  $\eta$  является функцией двух аргументов.

Согласно деформационной теории, аналогично, в соответствии с (19), получим

$$\eta = \frac{\operatorname{tg}(x) - 3x}{\sqrt{\operatorname{tg}^2(x) + 3x^2}}, \quad x \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]. \quad (41)$$

На рис. 3 показаны траектории деформаций в координатах  $\varepsilon_{и} - \eta$  и  $e_{и} - \eta$  согласно (23), (37) и (28), (41) соответственно.

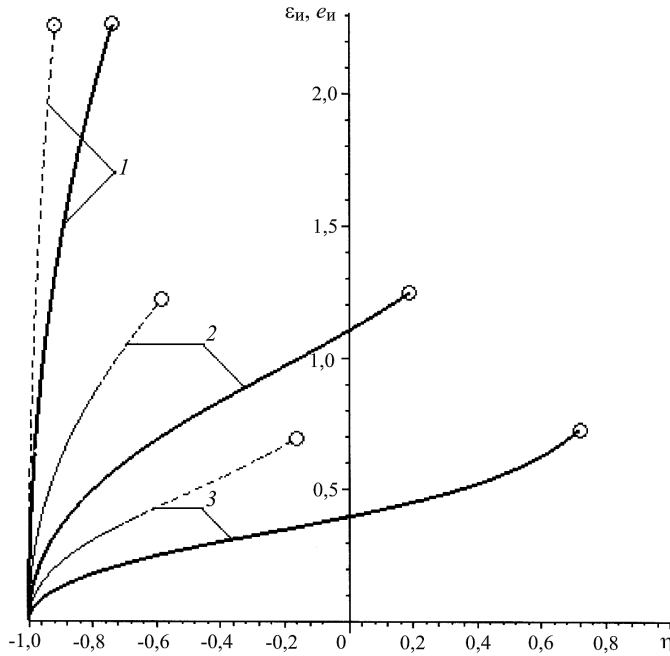


Рис. 3. Траектории деформаций: 1 –  $m = 2$ ; 2 –  $m = 0,5$ ; 3 –  $m = 0,18$ . (Сплошные линии – расчет по теории течения (23), (37), штриховые – по деформационной теории (28), (41); точки – конечная стадия процесса сжатия.)

Как известно [6], деформационная теория применима лишь для малых упругопластических деформаций и простых нагружений. Поэтому в рассматриваемом случае она неприемлема. Нами приведены результаты формального использования данной теории в сопоставлении с теорией течения. Видно, что различие в траекториях, рассчитанных по разным теориям, существенное. Сравнение положения точек на траекториях, соответствующих конечной стадии процесса сжатия для каждого из испытаний, свидетельствует, что это различие вызвано в первую очередь большим искажением значений показателя  $\eta$  в сторону уменьшения.

**Определение предельных деформаций.** Для определения предельной накопленной деформации  $\varepsilon_*$ , при которой появляются трещины, воспользуемся простейшей моделью накопления повреждений Колмогорова, выражающей линейный принцип накопления повреждений [4]:

$$\psi(\varepsilon_{и}) = \int_0^{\varepsilon_{и}} \frac{d\varepsilon_{и}}{\varepsilon_{*c}[\eta(\varepsilon_{и})]}, \quad (42)$$

где  $\varepsilon_{*c} = \varepsilon_{*c}(\eta)$  – кривая предельных деформаций при стационарном деформировании (диаграмма пластичности [1, 2, 4]);  $\eta = \eta(\varepsilon_{и})$  – траектория деформаций.

Определение предельной накопленной деформации  $\varepsilon_*$  сводится к решению нелинейного уравнения

$$\psi(\varepsilon_*) = 1. \quad (43)$$

Далее для аппроксимации кривой предельных деформаций при стационарном деформировании используем выражение

$$\varepsilon_{*c}(\eta) = a_2 \exp\left(-\eta \ln\left(\frac{(1-\eta)a_1}{2a_2} + \frac{(1+\eta)a_2}{2a_3}\right)\right), \quad \eta \in [-1, 1], \quad (44)$$

где  $a_1 > a_2 > a_3 > 0$  – некоторые постоянные, определяемые по результатам опытов в условиях стационарного деформирования.

С учетом (23), (37), (44) модель (42) принимает вид

$$\psi(\varepsilon_{\text{н}}(t, m)) = \bar{\psi}(t, m) = \frac{m}{a_2} \int_0^t \frac{\exp\left[\omega(\tau) \ln\left(a_1 \frac{1-\omega(\tau)}{2a_2} + a_2 \frac{1+\omega(\tau)}{2a_3}\right)\right]}{f(2, \tau) \cos^2(\tau)} d\tau, \quad (45)$$

где

$$\omega(\tau) = f(1, \tau)f(2, \tau); \quad f(k, \tau) = (1 + (-1)^k 3 \cos^{2k}(\tau))^{(-1)^{k+1}/k}, \quad k = 1, 2. \quad (46)$$

Для определения момента достижения предельной деформации для данной траектории деформаций, определяемой фиксированным значением параметра  $m$ , необходимо решить нелинейное уравнение

$$\frac{m}{a_2} \int_0^{t_*(m)} \frac{\exp\left[\omega(\tau) \ln\left(a_1 \frac{1-\omega(\tau)}{2a_2} + a_2 \frac{1+\omega(\tau)}{2a_3}\right)\right]}{f(2, \tau) \cos^2(\tau)} d\tau - 1 = 0, \quad (47)$$

где  $t_*(m)$  – искомое значение  $t$ , соответствующее моменту образования трещины.

Аналогичные модели были построены также на основе других, предложенных в данной работе, аппроксимаций зависимости между осевой  $\varepsilon_z$  и окружной  $\varepsilon_{\varphi}$  деформациями.

На рис. 4 приведены траектории деформаций, полученные на основании различных аппроксимаций одних и тех же экспериментальных данных. Видно, что траектории деформаций в координатах  $\varepsilon_{\text{н}} - \eta$  различаются заметно, причем дополнительный анализ показывает, что происходит это за счет значений показателя напряженного состояния. Однако расчетные значения предельных деформаций по этим траекториям практически одинаковые. Из этого следуют два важных вывода. Основной результат: расчетные значения предельной деформации слабочувствительны к естественному разбросу экспериментальных значений деформаций. Траектории деформаций не могут быть восстановлены однозначно при наличии рассмотренных погрешностей экспериментальных данных. В то же время обнаруженное различие в траекториях деформаций не имеет принципиального значения с точки зрения определения предельных деформаций.

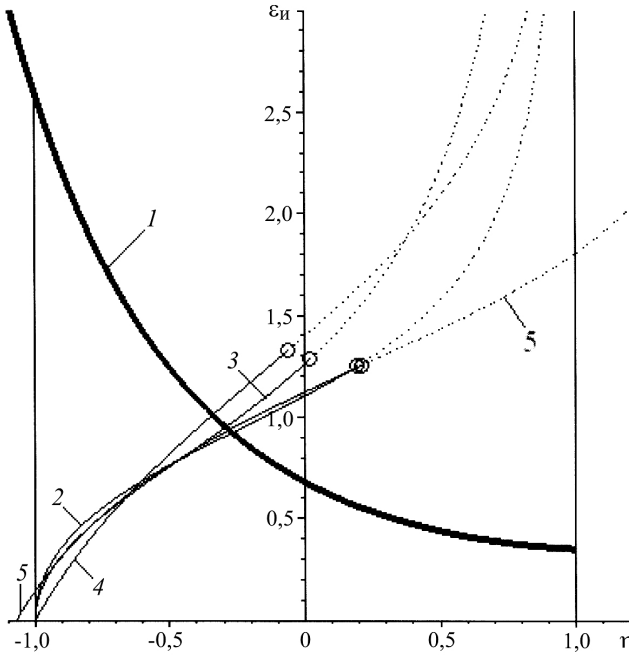


Рис. 4. Траектории деформаций и предельные деформации: 1 – кривая предельных деформаций при стационарном деформировании (расчет по (44),  $a_1 = 2,6, a_2 = 0,68, a_3 = 0,35$ ); 2, 3, 4, 5 – траектории деформаций, рассчитанные соответственно по (37), (23),  $m = 0,5$ ; (38), (24),  $p = 0,857$ ; (39), (25),  $m = 0,866$ ; (40), (26),  $a = 2,15, b = 1,057$ . (Точки – расчетные значения предельной накопленной деформации по соответствующим траекториям согласно модели (43).)

Из данных, представленных на рис. 4, видно, что аппроксимация (15), построенная без учета условий (4)–(6), несмотря на то что имеет два параметра, приводит к искажению начального участка траектории деформаций (кривая 5). Указанное искажение можно устранить, приняв  $a = 2$ , но и в этом случае остается еще значимый недостаток данной аппроксимации, проявляющийся при экстраполяции траектории деформаций, расположение которой противоречит механике процесса.

На рис. 5 приведены расчетные траектории деформаций для различных значений параметра  $m$ , а также кривая предельных деформаций, соответствующая этим траекториям.

Кривая предельных деформаций при нестационарном деформировании (рис. 5) описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \eta = \omega(t_*(m)); \\ \varepsilon_*(t_*(m), m) = m \int_0^{t_*(m)} \frac{1}{f(2, \tau) \cos^2(\tau)} d\tau; \end{cases} \quad (48)$$

$$\frac{m}{a_2} \int_0^{t_*(m)} \frac{\exp \left[ \omega(\tau) \ln \left( a_1 \frac{1 - \omega(\tau)}{2a_2} + a_2 \frac{1 + \omega(\tau)}{2a_3} \right) \right]}{f(2, \tau) \cos^2(\tau)} d\tau - 1 = 0. \quad (49)$$

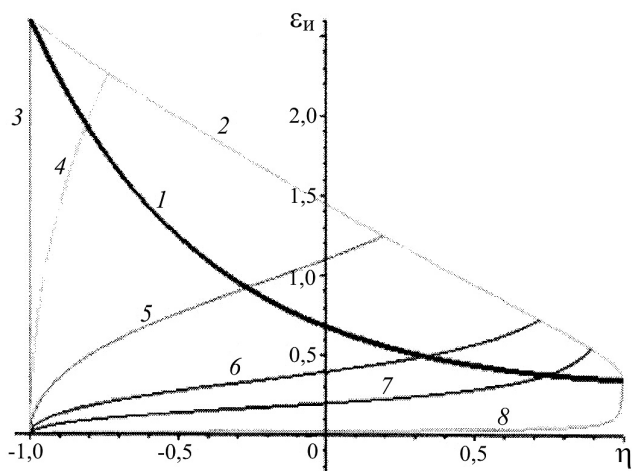


Рис. 5. Зависимость предельных деформаций при стационарном (1) и нестационарном (2) деформировании от показателя  $\eta$  при торцевом сжатии цилиндрических образцов и траектории деформаций при разных условиях трения на торцах (параметр  $m$ ) (3–8): 3 –  $m = 30$ ; 4 –  $m = 2$ ; 5 –  $m = 0,5$ ; 6 –  $m = 0,18$ ; 7 –  $m = 0,09$ ; 8 –  $m = 0,01$ .

Это означает, что каждая точка кривой является решением нелинейного уравнения. В данной работе, по-видимому, впервые построена модель предельной накопленной пластической деформации, выраженная через аналитическую зависимость между компонентами пластических деформаций.

Получение такой модели представляет собой очередной шаг на пути повышения уровня аналитического описания предельной накопленной деформации при нестационарном деформировании, что, в свою очередь, способствует выявлению более общих закономерностей изучаемого процесса пластического формоизменения. Задача, частным случаем которой являются соотношения (48), (49), может быть названа основной задачей теории деформируемости: определение предельных деформаций при нестационарном деформировании.

**Теоретический анализ модели.** В качестве примера, демонстрирующего преимущества аналитического представления модели предельных деформаций, рассмотрим теоретический анализ данной модели для материала, имеющего следующие значения предельной деформации сжатия, сдвига и растяжения: 1,6; 1,2; 0,9 соответственно. Особенность этих соотношений заключается в том, что отношение предельной деформации сжатия к предельной деформации сдвига равно отношению последней к предельной деформации растяжения. При этом соотношение (49) имеет вид

$$m \int_0^{t_*^{(m)}} \frac{0,833 \exp(0,288 f(2, \tau) f(1, \tau))}{f(2, \tau) \cos^2(\tau)} d\tau - 1 = 0. \quad (50)$$

Представим несколькими членами ряда Тейлора следующие соотношения:

$$\int_0^{t_*^{(m)}} \frac{0,833 \exp(0,288 f(2, \tau) f(1, \tau))}{f(2, \tau) \cos^2(\tau)} d\tau \approx$$

$$\approx 1,25 t_*(m) + 0,194 t_*(m)^3 + 0,114 t_*(m)^5; \quad (51)$$

$$\eta = \frac{1 - 3 \cos^2(t_*(m))}{\sqrt{1 + 3 \cos^4(t_*(m))}} \approx -1 + 0,75 t_*(m)^2 + 0,406 t_*(m)^4; \quad (52)$$

$$\varepsilon_*(t_*(m), m) = m \int_0^{t_*(m)} \left( \sqrt{3 + \frac{1}{\cos^4(\tau)}} \right) d\tau \approx m(2t_*(m) + 0,167 t_*(m)^3). \quad (53)$$

В результате решения уравнения (53) получим

$$t_*(m) \approx \frac{2\sqrt{13\sqrt{35 + 26\eta} - 39}}{13}. \quad (54)$$

На основании (50) запишем выражение для определения параметра  $m$ . Заменим интеграл в выражении (54) правой частью соотношения (51) и подставим его вместо параметра  $m$  в правую часть соотношения (53). В полученном виде  $t_*(m)$  заменим его приближенным выражением через показатель  $\eta$  согласно (54). В результате имеем достаточно громоздкое выражение накопленной деформации через показатель  $\eta$ . Представим данное выражение несколькими членами ряда Тейлора:

$$\varepsilon_* \approx 1,418 - 0,177 \eta + 0,016 \eta^2 + 0,003 \eta^3 - 0,003 \eta^4. \quad (55)$$

В результате получили аппроксимацию кривой предельных деформаций при нестационарном деформировании. Анализ выражения (55) показывает, что без заметной потери точности можно отбросить последние три слагаемых. Результаты сопоставления приближенного теоретического решения с решением, полученным численно, представлены на рис. 6.

Как видно, для значений параметра  $m \geq 0,32$  погрешность определения предельной деформации по приближенному теоретическому решению в виде линейной зависимости не превышает 4%.

Полученные результаты позволяют предположить, что с помощью построенной модели можно установить и более общие закономерности разрушения материалов при нестационарном деформировании.

Здесь уместно отметить важное преимущество соответствующих параметрических представлений соотношения (1), которое заключается в линейной зависимости  $\bar{\psi}(t, m)$  от  $m$  (на примере (46)). Использование в качестве параметра одной из компонент деформаций приводит к соотношениям более сложной структуры относительно  $m$ , что, в свою очередь, усложняет теоретический анализ модели предельных деформаций.

**Одно из обобщений аналитической зависимости между осевой и окружной деформациями.** Условие (6) является достаточно жестким. С учетом (35) это условие равносильно предположению о том, что напряженное

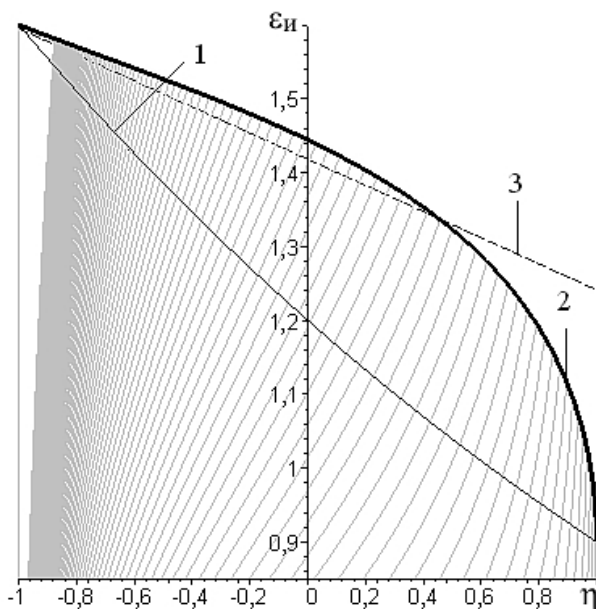


Рис. 6. Кривые предельных деформаций при осесимметричной осадке цилиндрических образцов: 1 – стационарное деформирование; 2, 3 – нестационарное деформирование (2 – численный расчет; 3 –  $\varepsilon_* \approx 1,418 - 0,177\eta$ ; серые линии – траектории деформации для разных значений параметра  $m$ ).

состояние в исследуемой области с ростом деформации стремится к одноосному растяжению. Вместо (6) запишем, что

$$\lim_{\varepsilon_\varphi \rightarrow \infty} \frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\varphi} = -\xi, \quad \frac{1}{2} \leq \xi \leq 2. \quad (56)$$

По всей видимости, величина  $\xi$  будет определяться условиями трения на торцах, материалом испытываемого образца и его типоразмерами.

С учетом (56) запишем дифференциальное уравнение

$$\frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\varphi} = -\frac{\xi\varepsilon_\varphi^2 + 2m^2}{\varepsilon_\varphi^2 + m^2}, \quad m > 0, \quad (57)$$

решением которого получим соотношение

$$\varepsilon_z = -\xi\varepsilon_\varphi - (2 - \xi)m \operatorname{arctg}\left(\frac{\varepsilon_\varphi}{m}\right), \quad (58)$$

имеющее параметрическое представление следующего вида:

$$\begin{cases} \varepsilon_\varphi = m \operatorname{tg}(t), \\ \varepsilon_z = -m(\xi \operatorname{tg}(t) + (2 - \xi)t), \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (59)$$

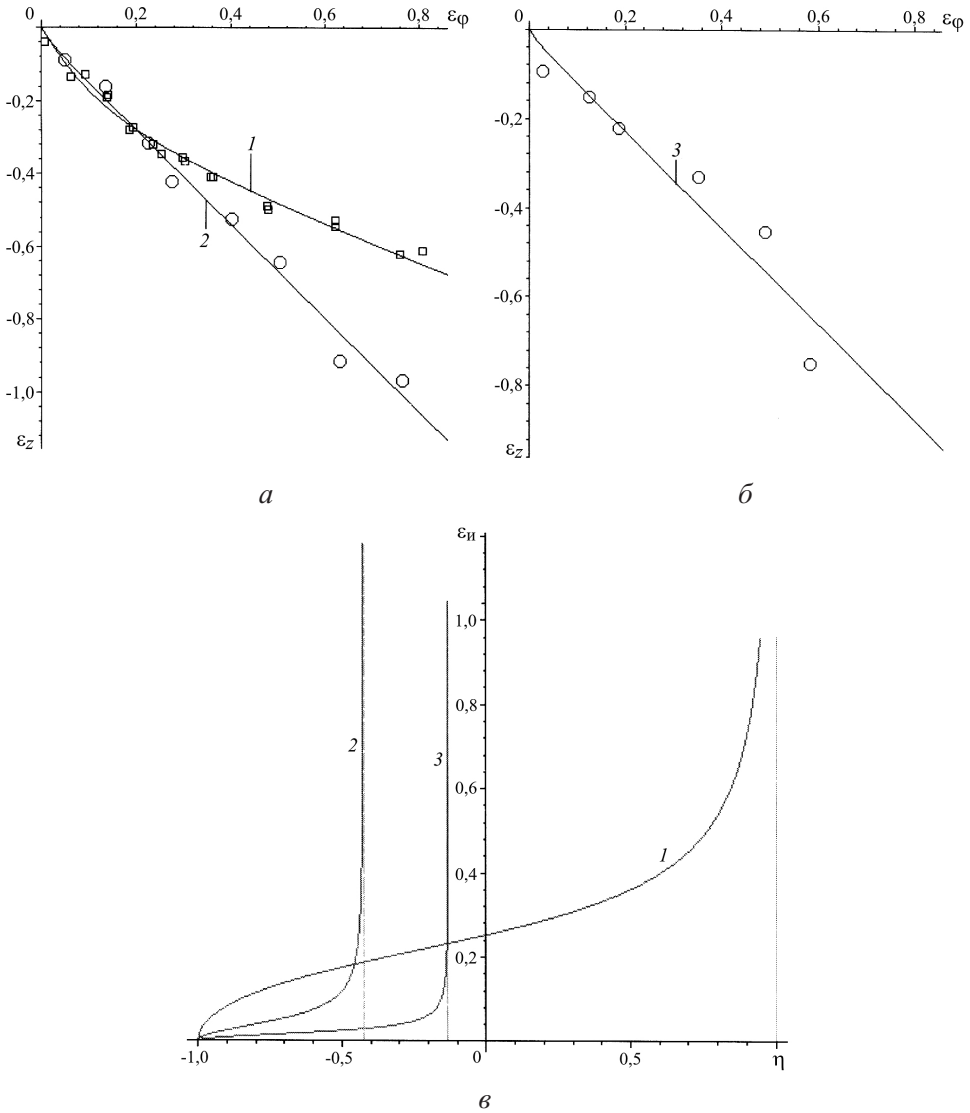


Рис. 7. Кривые зависимости между осевой  $\epsilon_z$  и окружной  $\epsilon_\phi$  деформациями (а, б) и соответствующие им траектории деформации (в) при торцевом сжатии цилиндрических образцов – расчет по (58), (60), (61): 1 – материал – свинец, начальный диаметр образца  $d_0 = 28,1$  мм,  $h_0/d_0 = 1,08$  ( $h_0$  – начальная высота),  $\xi = 0,5$ ,  $m = 0,1146$ ; 2 – АД31Т,  $d_0 = 31,8$  мм,  $h_0/d_0 = 1,52$ ,  $\xi = 1,29$ ,  $m = 0,023$ ; 3 – сталь 20,  $d_0 = 14,7$  мм,  $h_0/d_0 = 1,33$ ,  $\xi = 1,079$ ,  $m = 0,0097$ .

С учетом (18), (35) получим

$$E_{II}(t, m, \xi) = \frac{2}{3} m \sqrt{3} \int_0^t \left( \sqrt{\frac{\xi^2 - \xi + 1}{\cos(\tau)^4} - \frac{2\xi^2 - 5\xi + 2}{\cos(\tau)^2} + (2 - \xi)^2} \right) d\tau; \quad (60)$$

$$\eta(t, \xi) = \frac{6(-\xi - (2 - \xi)\cos(t)^2 + 1)}{\sqrt{9 + 3(1 - 2\xi - 2(2 - \xi)\cos(t)^2)^2}}. \quad (61)$$



При  $\xi = 0,5$  соотношения (57), (58), (59), (60), (61) становятся тождественными (7), (12), (19), (23) и (37) соответственно.

На рис. 7 приведены экспериментальные и расчетные результаты исследования напряженно-деформированного состояния боковой поверхности при сжатии без смазки цилиндрических образцов из разных материалов и отношением высоты к диаметру в начальном состоянии. Параметры  $\xi$ ,  $m$  определяли, как было выше указано, методом наименьших квадратов. Как следует из представленных данных, только для свинцовых образцов вид напряженного состояния с ростом деформации приближается к растяжению, для других испытанных образцов показатель  $\eta$  остается отрицательным.

**Заключение.** Приведенные математический аппарат и информационные технологии позволяют описывать и изучать закономерности пластического деформирования и разрушения материала на боковой поверхности цилиндрических образцов при торцевом сжатии, что расширяет возможности исследования механических свойств образцов при сжатии в условиях бочкообразования, способствуют совершенствованию определения, в том числе и с помощью современных программных комплексов, напряженно-деформированного состояния при больших пластических деформациях, исследованию закономерности изменения предельных деформаций при нестационарных процессах, а также накоплению и систематизации важных для механики материалов экспериментально-аналитических результатов. С использованием предложенной методики могут быть описаны многие технологические процессы обработки давлением, в частности осадка заготовок, радиальное выдавливание, торцевая раскатка, протяжка и др.

## Резюме

Розроблено математичні моделі й інформаційні технології експериментально-аналітичного визначення напружено-деформованого стану та граничної накопиченої деформації матеріалу на бочкоподібній бічній поверхні циліндричного зразка під час торцевого стиску. Вперше побудовано модель, що дозволяє визначати граничну накопичену пластичну деформацію, у вигляді аналітичної залежності між компонентами пластичних деформацій, які відображують зазначені умови нестационарного деформування.

1. *Матвийчук В. А., Алиев И. С.* Совершенствование процессов локальной ротационной обработки давлением на основе анализа деформируемости металлов. – Краматорск: ДГМА, 2009. – 268 с.
2. *Мишулин А. А., Михалевич В. М.* Тензорно-нелинейная модель накопления повреждений // Обработка металлов давлением. – Свердловск: Изд. УПИ им. С. М. Кирова, 1985. – С. 10 – 14.
3. *Михалевич В. М., Добрянюк Ю. В.* Накопичена деформація та інтенсивність логарифмічних деформацій при осадці циліндричних зразків з бочкоутворенням // Обработка металлов давлением (Сб. науч. трудов). – 2009. – № 1 (20). – С. 129 – 134.

4. *Михалевич В. М.* Тензорні моделі накопичення пошкоджень. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 1998. – 195 с.
5. *Лебедев А. А., Михалевич В. М.* О выборе инвариантов напряженного состояния при решении задач механики материалов // Пробл. прочности. – 2003. – № 3. – С. 5 – 14.
6. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Ч. 1. Упруго-пластические деформации. – М.: Логос, 2004. – 388 с.

Поступила 04. 11. 2010