

Розв'язання задачі коливань балок змінного перерізу методом скінченних різниць

В. Г. Піскунов, Р. В. Гриневицький¹

Національний транспортний університет, Київ, Україна

¹ roma_it@ukr.net

Виконано числовий розрахунок частот власних коливань балок лінійно-змінного за висотою перерізу при різних умовах закріплення їх кінців. Отримано диференціальне рівняння, яке реалізоване методом скінченних різниць. Визначено власні значення рівняння і частотні параметри. Результати отримано за кількох варіантів кроку вузлів апроксимації. Проведено їх уточнення екстраполяційним методом. Точність результатів підтверджується порівнянням з аналітичним розв'язком для випадку балки постійного перерізу.

Ключові слова: числовий розрахунок частот, диференціальне рівняння, частотні параметри.

Вступ. Дослідження коливань балок як конструктивних елементів різноманітних машин і споруд висвітлено в багатьох літературних джерелах [1–8]. Зокрема, в деяких розглядається питання демпфірування коливань. Як технічний засіб розв'язку цього питання можливо застосувати зміну перерізу балок та умов їх закріплення.

У даній роботі розглянуто задачу коливань балок лінійно-змінного за висотою перерізу за різних умов закріплення їх кінців. Використано числовий метод розв'язку – метод скінченних різниць з екстраполяцією для уточнення результатів.

Диференціальне рівняння власних коливань балки змінного перерізу. Диференціальне рівняння має наступний вигляд:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EJ_x \frac{d^2 z}{dx^2} \right) - \omega^2 m_x z = 0, \quad (1)$$

де EJ_x – змінна жорсткість перерізу; ω – частота коливань; m_x – змінна маса.

Після диференціювання отримаємо

$$\frac{d^2 EJ_x}{dx^2} \frac{d^2 z}{dx^2} + 2 \frac{dEJ_x}{dx} \frac{d^3 z}{dx^3} + EJ_x \frac{d^4 z}{dx^4} - \omega^2 m_x z = 0. \quad (2)$$

Розглянемо балку, висота якої змінюється за лінійним законом (рис. 1). Момент інерції балки можна записати наступним чином:

$$J_x = \frac{bh_x^3}{12}; \quad J_x = \frac{b(h_0 - kx)^3}{12} = \frac{bh_0^3}{12} \left(1 - \frac{kx}{h_0} \right)^3 = J_0 \left(1 - \frac{kx}{h_0} \right)^3. \quad (3)$$

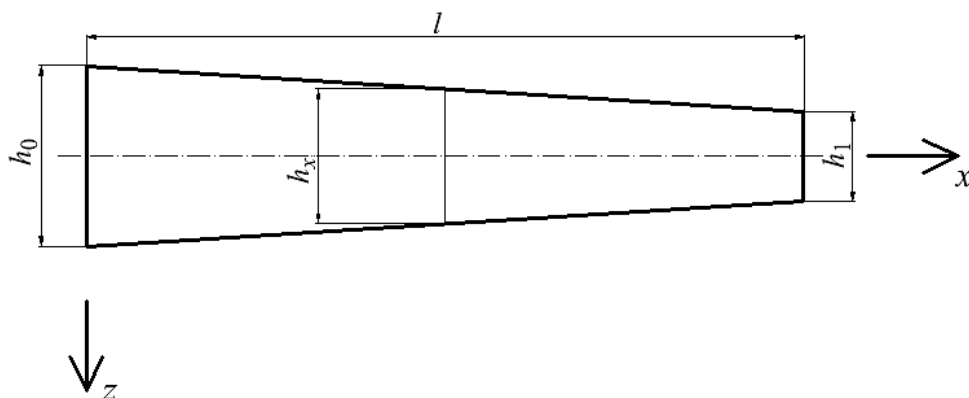


Рис. 1. Схема балки змінного перерізу $h_x = h_0 - kx$, $k = (h_0 - h_1)/l$.

Похідні від моменту інерції будуть мати такий вигляд:

$$J'_x = -J_0 \frac{3k}{h_0} \left(1 - \frac{kx}{h_0}\right)^2; \quad J''_x = J_0 \frac{6k^2}{h_0^2} \left(1 - \frac{kx}{h_0}\right). \quad (4)$$

Змінна маса на одиницю довжини буде:

$$m_x = \frac{b\gamma}{g}(h_0 - kx), \quad (5)$$

де γ – питома вага; g – прискорення вільного падіння; b – ширина перерізу.

Підставимо в рівняння (2) вирази (3)–(5) і отримаємо диференціальне рівняння власних коливань балки:

$$EJ_0 \left(1 - \frac{kx}{h_0}\right)^3 \frac{d^4 z}{dx^4} - EJ_0 \frac{6k}{h_0} \left(1 - \frac{kx}{h_0}\right)^2 \frac{d^3 z}{dx^3} + EJ_0 \frac{6k^2}{h_0^2} \left(1 - \frac{kx}{h_0}\right) \frac{d^2 z}{dx^2} - \omega^2 \frac{b\gamma}{EJ_0 g} (h_0 - kx) z = 0. \quad (6)$$

В окремому випадку ($h_0 = h_1$, $k = 0$) отримаємо рівняння власних коливань балки постійного перерізу з модулем пружності E та моментом інерції J_0 :

$$\frac{d^4 Z}{dx^4} EJ_0 - \omega^2 m z = 0. \quad (7)$$

Рівняння у скінченних різницях. Запишемо рівняння (6) у скінченних різницях, поділивши балку на рівні інтервали λ , за допомогою схеми, показаної на рис. 2.

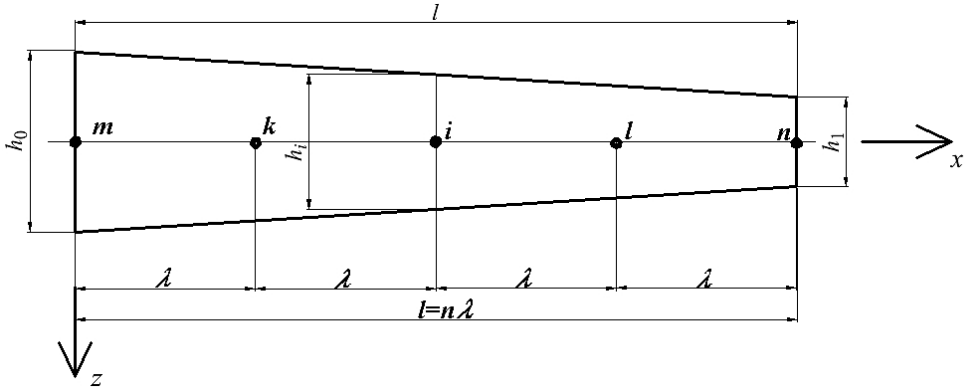


Рис. 2. Апроксимація балки у скінченних різницях.

Введемо наступні позначення:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i = n_i \lambda; \quad h_i = h_0 - kx_i; \quad r = \frac{h_0}{h_1}; \\ k = \frac{rh_1 - h_1}{l} = \frac{h_1}{l}(r-1) = \frac{h_1}{n\lambda}(r-1); \\ kx_1 = \frac{h_1}{n\lambda}(r-1)n_1\lambda = h_1(r-1)\frac{n_i}{n} = h_1(r-1)\alpha_i; \\ \frac{kx_i}{h_0} = \frac{h_1(r-1)\alpha_i}{rh_1} = \frac{r-1}{r}\alpha_i = t\alpha_i; \\ \left(1 - \frac{kx_1}{h_0}\right) = (1 - \alpha_i t) = A_i; \\ \alpha_i = \frac{n_i}{n}; \quad t = \frac{r-1}{r}; \quad B = \frac{3t}{n}. \end{array} \right. \quad (8)$$

З урахуванням позначень (8) рівняння (6) в скінченних різницях (рис. 2) набуває наступного вигляду:

$$\begin{aligned} (6A_i^2 - 4B^2)Z_i - (4A_i^2 + 2BA - 2B^2)Z_k - (4A_i^2 - 2BA_i - 2B^2)Z_l + \\ + (A_i^2 + BA_i)Z_m + (A_i^2 - BA_i)Z_n - \kappa Z_i = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

де

$$\kappa = \beta^2 \lambda^4 = \beta^2 \frac{l^4}{n^4}.$$

Звідки отримуємо частотний параметр

$$l^2 \beta = n^2 \sqrt{\kappa}, \quad (10)$$

при цьому β^2 – власне значення диференціального рівняння (6), пов’язане з квадратом частоти

$$\beta^2 = \omega^2 \frac{b\gamma h_0}{EJ_0 g} = \omega^2 \frac{m_0}{EJ_0}. \tag{11}$$

На основі (11) визначаємо колову частоту власних коливань балки:

$$\omega = \beta \sqrt{\frac{EJ_0 g}{b\gamma h_0}}. \tag{12}$$

Із формули (9) можна отримати скінченно-різницеve рівняння для балки постійного перерізу:



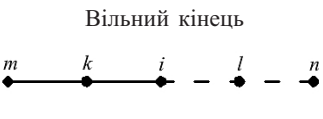
$$\begin{aligned} r = 1; \quad k = 0; \quad t = 0; \quad A_i = 1; \quad B = 0; \\ 6Z_i - 4Z_k - 4Z_l + Z_m + Z_n - \kappa Z_i = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Для розв’язання задачі методом скінченних різниць у кожному з вузлів (рис. 2) запишемо рівняння (9) або (13) та отримаємо систему алгебраїчних лінійних рівнянь щодо прогинів у цих вузлах.

Для виключення прогинів у точках (вузлах), що виходять за межі опор балки, використовуємо умови закріплення її кінців (табл. 1).

Т а б л и ц я 1

Умови закріплення кінців балки

Схема закріплення	Граничні умови	Вираз у скінченних різницях
<p>Обпирання</p> 	$Z = 0, \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = 0$	$Z_k = -Z_l$
<p>Защемлення</p> 	$Z = 0, \frac{\partial Z}{\partial x} = 0$	$Z_k = Z_l$
<p>Вільний кінець</p> 	$M_i = 0, Q_i = 0$	$Z_n = Z_m + \left(2 + \frac{2B}{A_i}\right)Z_l - \left(2 - \frac{2B}{A_i}\right)Z_k - \frac{4B}{A_i}Z_i; \quad Z_l = 2Z_i - Z_k$

Приклад розв’язку. Запишемо як приклад систему рівнянь для балки постійного перерізу, що защемлена з двох кінців, при $n = 3$ (рис. 3).

Згідно з (13) отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} (7 - \kappa)Z_1 - 4Z_2 = 0; \\ -4Z_1 + (7 - \kappa)Z_2 = 0. \end{cases}$$

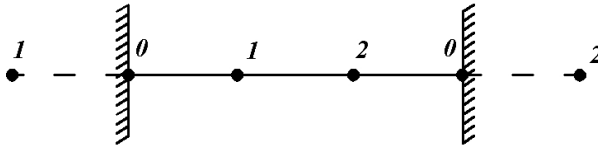


Рис. 3. Схема балки за різних умов закріплення кінців.

Аби ця система мала розв'язок, який не дорівнює тотожно нулю, необхідно, щоб її визначник дорівнював нулю:

$$\begin{vmatrix} (7 - \kappa) & (-4) \\ (-4) & (7 - \kappa) \end{vmatrix} = 0,$$

звідки отримаємо квадратне рівняння:

$$x^2 - 14x + 33 = 0,$$

корені якого будуть $x_1 = 3$, $x_2 = 11$.

Визначення цих величин дозволяє знайти за формулою (10) частотні параметри і за формулою (12) – частоти власних коливань.

Отримані значення частотних параметрів мають великі похибки. Так, в наведеному вище прикладі перший параметр $l^2\beta = 15,588$, при точному значенні $l^2\beta = 22,373$ похибка складає 29%.

Для уточнення результатів можемо застосувати екстраполяційний прийом, який дозволяє отримувати уточнені власні значення β^2 і відповідні частотні параметри $l^2\beta$ за розв'язками при двох і трьох різних кроках апроксимації [4]:

Якщо відомі власні значення, що знайдені при двох кроках, їх уточнюють за формулою

$$\beta_{j/i}^2 = \frac{n_j^2\beta_j^2 - n_i^2\beta_j^2}{n_j^2 - n_i^2} = b_j\beta_j^2 - b_j\beta_j^2. \quad (14)$$

При трьох різних кроках формула (14) у скороченому вигляді буде наступна:

$$\beta_{k/j/i}^2 = b_k\beta_k^2 - b_j\beta_j^2 + b_i\beta_i^2, \quad (15)$$

де b_k , b_j , b_i – числові коефіцієнти (табл. 2).

Результати розв'язку задач коливань. Запропонована методика дозволяє розв'язувати задачі про власні коливання балок лінійно-змінного за висотою перерізу за різних умов закріплення кінців.

У табл. 3 наведено значення частотних параметрів основного тону для балок із відношенням висоти $r = h_0/h_1 = 1,5$ і для балок, що мають постійну висоту ($r = 1$). Порівняння отриманих даних із результатами відомих аналітич-

них розв'язків [8], виконаних для балок постійного перерізу $h_1 = 1$, показують, що уточнені екстраполяцією значення мають достатню для практичних розрахунків точність. Можна вважати, що для балок зі змінною висотою точність отриманих результатів також буде цілком прийнятною.

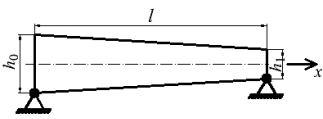
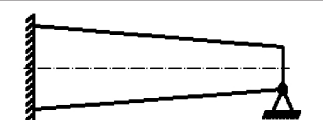
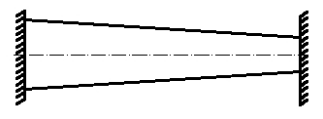
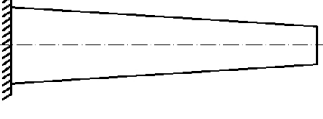
Т а б л и ц я 2

Таблиця числових коефіцієнтів екстраполяційних формул

$n_j/n_i, n_k/n_j/n_i$	b_k	b_j	b_i
2/1, 4/2	–	1,333	0,333
4/3	–	2,286	1,286
4/3/2	3,048	2,314	0,267

Т а б л и ц я 3

Частотні параметри $I^2\beta$ балок

Схема балки	$r = \frac{h_0}{h_1}$	Кроки вузлів, n			Схеми уточнення		Аналітичний розв'язок [8]
		2	3	4	4/3	4/3/2	
	1,0	8,000	9,000	9,371	9,888 (0,3%)	9,860 (0%)	9,860
	1,5	5,333	6,104	6,720	7,438	7,678	–
	1,0	9,996	12,300	13,510	14,900 (3,3%)	15,170 (1,7%)	15,420
	1,5	8,000	10,210	11,500	12,970	13,410	–
	1,0	11,320	15,590	17,820	20,35 (9,0%)	20,980 (6,2%)	22,370
	1,5	8,537	11,970	13,990	16,280	16,940	–
		1	2	3	3/2	3/2/1	–
	1,0	2,000	2,928	3,221	3,458 (2,2%)	3,469 (1,3%)	3,5160
	1,5	1,333	2,593	3,180	3,581	3,659	–

Слід відмітити, що для всіх розглянутих умов закріплення частотні параметри балок змінної за висотою перерізу менші, ніж параметри балок постійного перерізу. Отже, досягається ефект погашення частот коливань – своєрідного демпфірування. Зменшення “жорсткості” умов закріплення призводить до відповідного зменшення частоти – “пом’якшення” конструкції, що також можна вважати технічним засобом демпфірування.

Також зауважимо, що величина частоти реального балочного елемента може розглядатися як діагностична характеристика його стану.

Резюме

Выполнено численное решение частот собственных колебаний балок линейно-переменного по высоте сечения при разных условиях закрепления их концов. Получено дифференциальное уравнение, которое реализовано методом конечных разностей. Определены собственные значения уравнения и частотные параметры. Результаты получены при нескольких вариантах шага узлов аппроксимации. Проведено их уточнение экстраполяционным методом. Точность результатов подтверждается сравнением с аналитическим решением для случая балки постоянного сечения.

1. *Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В.* Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов. Справочник. – Киев: Наук. думка, 1971. – 375 с.
2. *Матвеев В. В.* Демпфирование колебаний деформируемых тел. – Киев: Наук. думка, 1985. – 263 с.
3. *Горик О. В., Пискунов В. Г., Чередніков В. М.* Механіка деформування композитних брусів. – Київ; Полтава: НТУ; Полтавська державна аграрна академія, 2008. – 404 с.
4. *Справочник по теории упругости для инженеров-строителей.* – Киев: Будівельник, 1971. – 420 с.
5. *Пискунов В. Г., Вериженко В. Е.* Линейные и нелинейные задачи расчета слоистых конструкций. – Киев: Будівельник, 1986. – 176 с.
6. *Рассказов А. О., Соколовская И. И., Шульга Н. А.* Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. – Киев: Вища шк., 1986. – 191 с.
7. *Савченко Е. В.* Пассивное демпфирование колебаний композитных конструкций. – Нежин: Аспект-Поліграф, 2006. – 232 с.
8. *Karnovsky I. A. and Lebed O. I.* Formulas for Structural Dynamics: Tables, Graphs and Solutions. – New York; Toronto; St. Louis: McGraw-Hill, 2000. – 535 p.

Поступила 17. 11. 2010