

Расчет динамического прогиба балки при неупругом ударе по теориям Кокса и Сен-Венана

В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский¹

Национальный технический университет “ХПИ”, Харьков, Украина

¹ stasolsh77@gmail.com

Сравнение результатов расчета коэффициента динамичности для прогибов, полученных по теориям Кокса и Сен-Венана, показало, что они хорошо согласуются в широком интервале отношений масс соударяющихся тел. Поэтому громоздкие расчеты по теории Сен-Венана можно заменить упрощенными вычислениями по компактной формуле Кокса.

Ключевые слова: неупругий удар, теории Сен-Венана и Кокса, коэффициент динамичности, прогиб.

Обозначения

M	– масса ударяющего тела
M_*	– масса пластины
M_0	– масса балки
g	– ускорение свободного падения
v	– скорость удара
x	– текущая координата, отсчитываемая вправо от левого края балки
x_1	– координата точки удара
l	– длина балки
$G(x, x_1, p^2)$	– изображение функции Грина
p	– параметр интегрального преобразования Карсона
EJ	– изгибная жесткость стержня
ρF	– погонная масса стержня
$\delta(x-x_1)$	– функция Дирака
ω_K	– частота свободных колебаний балки
k_0	– коэффициент приведения массы балки к ее середине
H	– высота сброса ударяющего тела
χ	– отношения масс соударяющихся тел
y_g	– максимальный динамический прогиб балки

Введение. Результаты, полученные по теориям Кокса и Сен-Венана при неупругом ударе по прямоугольной пластине, подкрепленной линейно-упругим безынерционным основанием, показали [1–3], что при небольших отношениях массы ударяющего тела M к массе пластины M_* формула Кокса приводит к значительным погрешностям. Уже при $M/M_* = 1/3$ относитель-

ная погрешность составляет порядка 20%. Будет ли такой погрешность в случае удара по балке, вопрос остается открытым, поскольку в [1–3] расчеты для балок не проводились. Для решения этого вопроса проведем сравнение результатов, полученных по двум указанным теориям, полагая края балки $x = 0$ и $x = l$ свободно опертыми. Такое сравнение представляет научно-прикладной интерес, поскольку формулу Кокса рекомендуют для расчетов на удар в учебной литературе [4–6].

Построение расчетных зависимостей. Следуя теории Сен-Венана, получим выражение для прогибов балки, подвергнутой поперечному удару. Согласно [2, 3] изображение ее прогибов по Карсону имеет вид

$$Y(x, x_1, p) = \frac{M(g + vp)}{1 + Mp^2(x, x_1, p^2)} G(x, x_1, p^2), \quad (1)$$

где M – масса ударяющего тела; g – ускорение свободного падения; v – скорость удара; x – текущая координата, отсчитываемая вправо от левого края балки; x_1 – координата точки удара; $G(x, x_1, p^2)$ – изображение функции Грина; p – параметр интегрального преобразования Карсона.

Для построения функции Грина воспользуемся уравнением динамического изгиба стержня, записанным в пространстве изображений:

$$\frac{d^4 G}{dx^4} + \frac{\rho F}{EJ} p^2 G = \frac{1}{EJ} \delta(x - x_1), \quad (2)$$

где EJ – изгибная жесткость стержня; ρF – его погонная масса; $\delta(x - x_1)$ – функция Дирака.

В результате разложения решения уравнения (2) в ряд по синусам получим

$$G(x, x_1, p^2) = \frac{2l^3}{\pi^4 EJ} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x_1}{l} \sin \frac{m\pi x}{l}}{m^4 + \beta^2 p^2}; \quad \beta^2 = \frac{\rho Fl^4}{\pi^4 EJ}. \quad (3)$$

Преобразуем (3) для случая центрального поперечного удара, когда прогибы балки максимальны, а $x = x_1 = 0,5l$. Положив $p^2 = -\omega^2$ ($p = i\omega$, $i = \sqrt{-1}$), запишем

$$G\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, -\omega^2\right) = \frac{2l^3}{\pi^4 EJ} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^4 - \beta^2 \omega^2}.$$

Суммируя этот ряд с помощью таблиц, приведенных в [7], находим

$$G\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, -\omega^2\right) = \frac{1}{2M_0} \frac{\xi}{\omega^2} (\operatorname{tg} \xi - \operatorname{th} \xi), \quad (4)$$

где $\xi = (\pi/2)\sqrt{\beta\omega}$; M_0 – масса балки, $M_0 = \rho Fl$.

Таким образом, согласно (1) и (4) имеем

$$Y\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, -s^2\right) = \frac{M(g + i\nu\omega)\zeta}{2M_0\omega^2\left[1 - \frac{M\zeta}{2M_0}(\operatorname{tg}\zeta - \operatorname{th}\zeta)\right]}(\operatorname{tg}\zeta - \operatorname{th}\zeta). \quad (5)$$

При переходе от изображений к оригиналам статический прогиб балки от действия веса ударяющего тела равен

$$y_{\text{ст}} = Y\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, 0\right).$$

Вычисляя предел

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\zeta(\operatorname{tg}\zeta - \operatorname{th}\zeta)}{2M_0\omega^2} = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\zeta^4}{3M_0\omega^2} = \frac{\pi^4\beta^2}{48M_0} = \frac{l^3}{48EJ},$$

получаем известную формулу

$$y_{\text{ст}} = \frac{Mgl^3}{48EJ}.$$

Поскольку для перехода от изображения к оригиналу из непрерывного множества значений ζ берут только положительные корни уравнения

$$1 - \frac{M\zeta}{2M_0}(\operatorname{tg}\zeta - \operatorname{th}\zeta) = 0, \quad (6)$$

изображение (5) с учетом (6) принимает более компактный вид:

$$Y\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, -\omega^2\right) = \frac{(g + i\nu\omega)}{\omega^2\left[1 - \frac{M\zeta}{2M_0}(\operatorname{tg}\zeta - \operatorname{th}\zeta)\right]}. \quad (7)$$

Обращение изображения (7) связано с вычислением производной

$$\frac{d}{dp} \left\{ \omega^2 \left[1 - \frac{M\zeta}{2M_0}(\operatorname{tg}\zeta - \operatorname{th}\zeta) \right] \right\}.$$

При выполнении дифференцирования учитываем, что

$$\frac{d}{dp} = -i \frac{d}{d\omega} = -i \frac{\zeta}{2\omega} \frac{d}{d\zeta},$$

а также уравнение (6). Тогда получим

$$p \frac{d}{dp} \left\{ \omega^2 \left[1 - \frac{M\zeta}{2M_0} (\operatorname{tg} \zeta - \operatorname{th} \zeta) \right] \right\} = - \frac{M\omega^2}{4M_0} \zeta \left(\operatorname{tg} \zeta - \operatorname{th} \zeta + \frac{\zeta}{\cos^2 \zeta} - \frac{\zeta}{\operatorname{ch}^2 \zeta} \right) =$$

$$= - \frac{M_0}{2M} \omega^2 \left(2 + \frac{M}{M_0} + \frac{M^2}{M_0^2} \zeta^2 \operatorname{tg} \zeta \operatorname{th} \zeta \right).$$

Обращая (7) с помощью второй теоремы разложения Хевисайда, динамический прогиб середины балки представляем разложением:

$$y\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, t\right) = \frac{Mgl^3}{48EJ} - 4\chi \sum_{K=1}^{\infty} \frac{g \cos(\omega_K t) - v\omega_K \sin(\omega_K t)}{\omega_K^2 (2 + \chi + \chi^2 \zeta_K^2 \operatorname{tg} \zeta_K \operatorname{th} \zeta_K)}, \quad (8)$$

где $\chi = M/M_0$; ω_K – частота свободных колебаний балки с сосредоточенной массой M в сечении $x = 0,5l$, $\omega_K = \frac{4\zeta_K^2}{\pi^4 \beta}$; ζ_K – положительные корни уравнения (6).

Заметим, что выражение, аналогичное (8), было получено в работе [1] и уточнено в [2, 3]. Однако из-за наличия опечаток возникла необходимость повторно провести его вывод другим способом, чтобы устранить неточности и осуществить вычисления.

Поскольку для расчетов по формуле (8) потребуются значения ζ_K , остановимся на вычислении больших корней уравнения (6), переписав его в виде

$$\operatorname{tg} \zeta = \operatorname{th} \zeta + \frac{2}{\chi \zeta}. \quad (9)$$

Такая форма записи приводит к итерационной формуле

$$\zeta_K^{(n+1)} = (k-1)\pi + \operatorname{arctg} \left(\operatorname{th} \zeta_K^{(n)} + \frac{2}{\chi \zeta_K^{(n)}} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где n – номер итераций; k – номер корня.

Для больших корней при $k \gg 1$ выполняются предельные соотношения: $\operatorname{th} \zeta_K \rightarrow 1$, $\operatorname{arctg} \left(1 + \frac{2}{\chi \zeta_K^n} \right) \rightarrow \frac{4k-3}{4} \pi = a_K$. Поэтому полагаем

$$\zeta_K = a_K + \varepsilon_K. \quad (10)$$

Подставив (10) в (9), получим уравнение

$$\frac{\operatorname{tg} \varepsilon_K}{1 - \operatorname{tg} \varepsilon_K} = \frac{1}{\chi (a_K + \varepsilon_K)}. \quad (11)$$

Поскольку ε_K малая величина, запишем

$$\operatorname{tg} \varepsilon_K \approx \frac{\varepsilon_K}{1 - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \varepsilon_K}.$$

Поэтому вместо (11) получаем приближенное квадратное уравнение, из которого находим

$$\varepsilon_K = \left[\frac{(\chi a_K + 1)^2}{4(\chi + 1/3)^2} + \frac{1}{\chi + 1/3} \right]^{1/2} - \frac{1}{2} \frac{\chi a_K + 1}{\chi + 1/3}. \quad (12)$$

Итак, при вычислении больших корней ζ_K применяются формулы (10) и (12), что позволяет получить без итераций много слагаемых в разложении (8).

По теории Кокса, максимальный динамический прогиб балки при ударе равен [8, 9]

$$y_g = \max y\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, t\right) = y_{\text{ст}} + \sqrt{y_{\text{ст}}^2 + \frac{v^2}{g} \frac{y_{\text{ст}}}{1 + k_0/\chi}}, \quad (13)$$

где k_0 – коэффициент приведения массы балки к ее середине. При шарнирном опирании краев балки $k_0 = 48\pi^{-4} \approx 0,493$.

Для проверки согласования результатов, полученных по рассматриваемым теориям, проведены вычисления прогибов балки по формулам (8) и (13).

Результаты расчетов. Принимаем следующие исходные данные: длина балки $l = 0,8$ м; $h = 2,54 \cdot 10^{-2}$ м; $J = h^4/12$; $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па; $M_0 = 4,04$ кг; $M = 1,78$ кг; $v = \sqrt{2gH}$; H – высота сброса ударяющего тела. Эти данные использовались в [2, 3] при расчете удара шара по балке с учетом местных деформаций (теория Тимошенко).

Результаты вычисления $y\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, t\right)$ по формуле (8) для трех значений $H = 0,16; 0,32; 0,48$ м представлены на рис. 1.

Значения низших корней уравнения (6), которые подставляли в формулу (8), приведены в табл. 1.

С увеличением k приближенные значения ζ_K быстро стремятся к точным значениям. При вычислении $y\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, t\right)$ ряд (8) суммировали на компьютере до $k = 50$.

При расчетах по формулам (8) и (13) при $\chi = 0,44$ получены значения y_g , указанные в табл. 2. Как видно, при $\chi = 0,44$ результаты, полученные по рассматриваемым теориям, близки.

Заметим, что вычисленное в [2, 3] значение y_g по предложенной С. П. Тимошенко теории упругого удара шара по балке для указанных выше исходных

Т а б л и ц а 1

Точные и приближенные значения ζ_K при $\chi = 0,44$

k	ζ_K
1	$\frac{1,34038}{1,34719}$
2	$\frac{4,26164}{4,26180}$
3	$\frac{7,30165}{7,30166}$
4	$\frac{10,38780}{10,38780}$
5	$\frac{13,49492}{13,49492}$

Примечание. Над чертой приведены точные значения ζ_K , под чертой – приближенные, полученные по (10), (12).

Т а б л и ц а 2

Максимальные динамические прогибы балки при разных H

H , м	$y_g \cdot 10^3$, м, по Сен-Венану	$y_g \cdot 10^3$, м, по Коксу
0,16	2,04	2,00
0,32	2,87	2,80
0,48	3,51	3,43

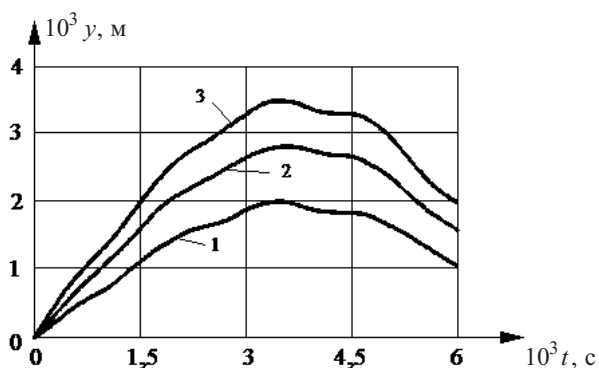


Рис. 1. Графики $y(t)$ при разных значениях H : 1, 2, 3 – H , равное соответственно 0,16; 0,32; 0,48 м.

данных и $H = 0,16$ м равно $2,4 \cdot 10^{-3}$ м, т.е. оно несколько больше, чем приведенное в табл. 2.

С целью проверки согласования данных, полученных по теориям при других χ , проводили расчеты, изменяя эту величину.

Значения первых корней уравнения (6), использованных в расчетах, указаны в табл. 3.

Т а б л и ц а 3

Корни трансцендентного уравнения (6)

k	Значения ζ_K при χ , равном				
	5	1	0,2	0,1	0,05
1	0,85992	1,19159	1,44363	1,50065	1,53376
2	3,97454	4,11972	4,41515	4,52977	4,60942
3	7,09599	7,19008	7,45046	7,58563	7,69404
4	10,22935	10,29845	10,52181	10,66095	10,78630
5	13,36651	13,42100	13,61419	13,75029	13,88498
6	16,50533	16,55028	16,71963	16,84989	16,98904
7	19,64503	19,68327	19,83364	19,95713	20,09763
8	22,78525	22,81851	22,95354	23,07019	23,21004

Т а б л и ц а 4

Приближенные значения ζ_K

k	ζ_K при χ , равном	
	5	0,05
2	3,97486	4,61236
3	7,09599	7,69596
4	10,22936	10,78760
5	13,36651	13,88586
6	16,50533	16,98966
7	19,64503	20,09807

Т а б л и ц а 5

Максимальные динамические прогибы балки при разных χ

χ	$y_g \cdot 10^3$, м, по	
	Сен-Венану	Коксу
5,00	9,51	9,49
1,00	3,62	3,59
0,20	1,11	1,05
0,10	0,63	0,57
0,05	0,33	0,29

Для сравнения в табл. 4 представлены приближенные значения корней, вычисленные по (10), (12) при $\chi = 5$ и 0,05.

При $\chi = 0,05$ точность асимптотических формул (10), (12) хуже, чем при $\chi = 5$, однако при $k > 5$ они вполне пригодны для расчетов.

Заметим, что приведенные в табл. 3 корни ζ_K можно также использовать для расчета частот свободных колебаний балки ω_K с присоединенной массой $M = \chi M_0$, сосредоточенной в центре балки.

Результаты вычислений величины y_g по формулам (8) и (13) при $H = 0,16$ м и разных χ представлены в табл. 5.

Со снижением массы ударяющего тела по отношению к массе балки уменьшается y_g и ухудшается точность расчета по формуле (13). Хотя относительная погрешность расчета по данной формуле возрастает с уменьшением χ , все же в области $\chi > 0,05$ с погрешностью меньше 12% по ней можно вычислять y_g , исключив громоздкие расчеты по теории Сен-Венана.

Использованные выше расчетные зависимости можно обобщить на случай удара падающего тела по сосредоточенной массе M^* (материальной точке), жестко связанной с балкой.

Если, как и выше, не учитывать прогиб стержня от действия его веса, то, согласно теории Сен-Венана, получим

$$y\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, t\right) = \frac{(M + M^*)gl^3}{48EJ} - 4\chi_* \sum_{K=1}^{\infty} \frac{g \cos(\omega_K t) - v\omega_K \sin(\omega_K t)}{\omega_K^2 (2 + \chi_* + \chi_*^2 \zeta_K^2 \operatorname{tg} \zeta_K \operatorname{th} \zeta_K)}, \quad (14)$$

где $\chi_* = M/(M_0 + M^*)$; ζ_K – положительные корни уравнения

$$1 = \frac{\chi_* \zeta}{2} (\operatorname{tg} \zeta - \operatorname{th} \zeta).$$

Формула Кокса в этом случае принимает вид

$$y_g = \frac{M^* gl^3}{48EJ} + y_{\text{ст}} + \sqrt{y_{\text{ст}}^2 + \frac{v^2}{g} \frac{y_{\text{ст}}}{1 + K_0/\chi_*}}, \quad (15)$$

где $y_{\text{ст}}$ равно значению, полученному выше.

При $M^* = 0$ выражения (14) и (15) сводятся к (8) и (13) соответственно.

Чтобы определить влияние присоединенной массы на перемещения балки в точке удара, проведены вычисления ее прогибов для указанных выше исходных данных при $H = 0,16$ м; $M^* = M_0$ и $M^* = 2M_0$.

На рис. 2 представлены графики $y\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, t\right)$, полученные по формуле (14).

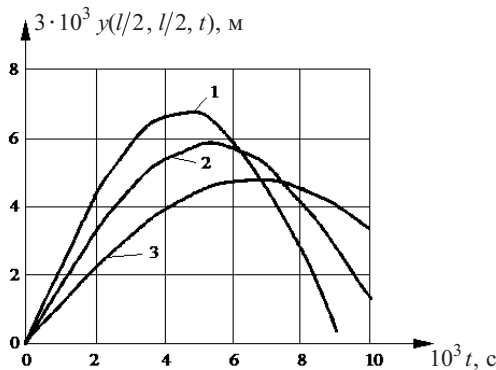


Рис. 2. Графики $y(t)$ при разных χ_* : 1 – $\chi_* = 0,147$; 2 – $\chi_* = 0,22$; 3 – $\chi_* = 0,44$.

Значения y_g балки с сосредоточенной массой

M^*/M_0	χ^*	$y_g \cdot 10^3$, м, по		Погрешность, %, формулы (15)
		(14)	(15)	
0	0,441	2,04	2,00	2,0
1	0,220	1,22	1,15	5,7
2	0,147	0,88	0,82	6,8

Результаты вычисления y_g по формулам (14) и (15) приведены в табл. 6. Как и следовало ожидать, наличие сосредоточенной массы в точке удара уменьшает максимальные динамические прогибы балки.

Заключение. Проведенный сравнительный анализ показал, что компактная формула Кокса позволяет приближенно определять максимальные динамические прогибы балки при ударе в широком диапазоне отношений масс соударяющихся тел. Поэтому ее обоснованно рекомендуют в учебной литературе по сопротивлению материалов для расчета коэффициентов динамичности прогибов элементов конструкций при неупругом ударе.

Резюме

Порівняння результатів розрахунку коефіцієнта динамічності для прогинів, отриманих за теоріями Кокса і Сен-Венана, показало, що вони добре узгоджуються в широкому інтервалі відношень мас тіл, які співударяються. Тому громіздкі розрахунки за теорією Сен-Венана можна замінити спрощеними обчисленнями за компактною формулою Кокса.

1. *Филиппов А. П.* Колебания упругих систем. – Киев: Изд-во АН УССР, 1956. – 322 с.
2. *Филиппов А. П.* Колебания механических систем. – Киев: Наук. думка, 1965. – 716 с.
3. *Филиппов А. П.* Колебания деформируемых систем. – 2-е изд. – М.: Машиностроение, 1970. – 734 с.
4. *Писаренко Г. С., Квітка О. Л., Уманський Е. С.* Опір матеріалів. – Київ: Вища шк., 2004. – 655 с.
5. *Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В.* Справочник по сопротивлению материалов. – Киев: Наук. думка, 1988. – 736 с.
6. *Шкельов Л. Т., Станкевич А. М., Пошивач Д. В.* Опір матеріалів. – Київ: ЗАТ “Віпол”, 2011. – 456 с.
7. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М.: Наука, 1981. – 800 с.
8. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. – М.: Физматгиз, 1959. – 439 с.
9. *Кильчевский Н. А.* Теория соударений твердых тел. – Киев: Наук. думка, 1969. – 247 с.

Поступила 10. 02. 2012