

## **Приближенное аналитическое определение вибродиагностических параметров наличия закрывающейся трещины в стержневых элементах при субгармоническом резонансе**

**В. В. Матвеев, А. П. Яковлев, О. Е. Богинич, Е. А. Синенко**

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

*Представлены результаты приближенного расчета вибродиагностических параметров наличия закрывающейся краевой трещины усталости в стержнях с различными граничными условиями в зависимости от параметров трещины и возбуждающей нагрузки при субгармоническом резонансе низшей собственной формы изгибных колебаний.*

**Ключевые слова:** вибродиагностика усталостного повреждения, закрывающаяся трещина, стержень, изгибные колебания, субгармонический резонанс.

**Введение.** Обнаружение повреждений типа усталостных трещин имеет важное значение в обеспечении надежности элементов машин и конструкций, подвергающихся воздействию динамических нагрузок. Одними из эффективных и практичных неразрушающих методов контроля таких повреждений являются методы, предусматривающие вибрационные испытания. Это обусловило повышенный интерес к анализу влияния трещин на колебания конструктивных элементов, на основе результатов которого разрабатываются практические методы вибродиагностики наличия таких повреждений и определения их параметров. К более известным и простым из них относятся методы, основанные на определении изменения собственных частот колебаний конструкций. При этом в основном внимание уделялось конструкциям балочного типа с краевыми трещинами усталости нормального отрыва. Однако для наиболее важных случаев обнаружения малых трещин эти методы, как правило, имеют низкую чувствительность и требуют паспортизации собственных частот и условий виброиспытаний конструктивных элементов в исходном (неповрежденном) состоянии. Кроме того, при эксплуатации изделий в условиях многоциклового деформирования до появления трещин возможно изменение их частотных и диссипативных характеристик. Так, например, в работе [1] отмечается, что существующие частотные методы обеспечивают достоверную оценку средних трещин (около 20% высоты сечения балки). Тем не менее развитию этих методов продолжают уделять внимание, направленное на повышение их разрешающей способности по определению размера и расположения как одной, так и нескольких трещин [2–8].

В работе [1] подчеркивалось, что методы, базирующиеся на оценке изменения собственных форм колебаний, более чувствительны к обнаружению повреждения. Развитию исследований в этом направлении в сочетании с частотными методами посвящены работы [1, 6, 9–12]. При этом отмечается эффективность использования методов вейвлетного преобразования [1, 6, 13].

Обычно при вибрационном анализе конструктивных элементов балочного типа рассматривается наличие открытых трещин или надразов, позволяющих использовать линейные подходы, и реже закрывающихся, или дышащих (breathing) трещин [9, 14].

Закрывающиеся, или дышащие трещины обуславливают характерную нелинейность колебательной системы и позволяют использовать новые вибродиагностические методы. Уже первые из известных исследований [15–17] показали высокую чувствительность предложенных супер- и субгармонического методов обнаружения

усталостных трещин, которые более чем в десять раз выше чувствительности традиционных частотно-резонансных подходов.

Рассмотрение различных нелинейных эффектов при колебаниях конструктивных элементов балочного типа с дышащими трещинами продолжает привлекать внимание исследователей и в последнее время [18–27]. Анализируются обусловленные нелинейностью колебательной системы искажения гармоничности сигнала деформации в сечении, близком к расположению трещины [20], изменения коэффициентов гармонических составляющих волн перемещения, ускорения и деформации поверхности с трещиной при разных формах колебаний [9], изменения соотношений между амплитудами продольных и изгибных колебаний в ортогональных плоскостях [26] и в основном проявления супер- и субгармонических колебаний [18, 19, 21–27]. При этом особое внимание, как и в вышеуказанных работах [15–17], уделяется определяемому по результатам гармонического анализа этих колебаний значению отношения амплитуд первых двух гармоник как высокочувствительному вибродиагностическому параметру наличия закрывающейся трещины.

В известных исследованиях, как правило, проявление нелинейных эффектов рассматривается на примере консольной балки постоянного сечения при возмущающем усилии, приложенном к свободному концу.

В работах [21, 22] впервые было обращено внимание на существенную зависимость значения вибродиагностического параметра не только от глубины и местоположения трещины, но и от места приложения вынуждающей силы.

При аналитическом решении задачи о вынужденных колебаниях балок с закрывающейся трещиной с использованием известных методов линейной теории колебаний упругих тел можно получить в той или иной форме определяющие дифференциальные уравнения колебаний для балки с закрытой и открытой трещиной. Трещина обычно моделируется местным уменьшением изгибной жесткости или эквивалентной безмассовой пружины закручивания, соединяющей неповрежденные части балки. Однако ввиду возникающих трудностей в решении полученной нелинейной системы уравнений при дробных или кратных резонансах и нахождении удобных для анализа зависимостей вибродиагностических параметров от параметров трещины в конечном итоге требуется использование численных методов. Поэтому в основном применяют численные решения с использованием конечноэлементной модели балки [18, 19, 21, 22, 25–27].

В настоящем исследовании в развитие работ [24, 28] представлены результаты приближенного расчета значений вибродиагностических параметров наличия закрывающейся краевой трещины нормального отрыва в стержнях прямоугольного поперечного сечения с различными граничными условиями в зависимости от параметров трещины и вида возбуждающей нагрузки при субгармоническом резонансе первой собственной формы поперечных колебаний.

**Методика расчета.** В качестве вибродиагностических параметров рассматриваются отношение максимальных амплитуд первой  $A_1$  и второй  $A_2$  гармоник  $\bar{A}_{1/2} = A_1/A_2$  при субгармоническом резонансе порядка  $1/2$   $j$ -й собственной формы колебаний, а также отношение максимальных амплитуд первых гармоник при субгармоническом  $A_{1C}$  и основном  $A_1$  резонансах  $\bar{A}_{1C} = A_{1C}/A_1$  этой формы колебаний. Методика базируется на использовании полученной ранее [28] для случая субгармонического резонанса нелинейного осциллятора, моделирующего упругое тело с трещиной, зависимости амплитуды резонирующей гармоники от параметра нелинейности  $\alpha$  колебательной системы и рассмотрении только основных вынужденных колебаний исследуемых неповрежденных, т.е. цельных, стержней. Расчет последних выполняется методом нормальных форм колебаний, или главных координат линейной теории колебаний, и амплитудная функция их линии прогибов представляется в виде конечной суммы прогибов по собственным формам:

$$y(x) = \sum_{i=1}^N y_i(x). \quad (1)$$

Вначале для заданных размеров и условий закрепления стержня (рис. 1), относительной глубины  $\gamma = a/h$  и местоположения трещины ( $x_T$ ), вида гармонического возбуждения (сосредоточенная сила  $P \sin \nu t$ , момент  $M \sin \nu t$  в сечениях  $x_P$ ,  $x_M$  соответственно, распределенная нагрузка интенсивностью  $q \sin \nu t$  или перемещение какой-либо заделки  $B \sin \nu t$ ) и интересующей резонирующей  $j$ -й собственной формы колебаний стержня определяется параметр нелинейности  $\alpha$  колебательной системы при деформировании стержня по  $j$ -й форме в составе остальных учитываемых форм при основных вынужденных колебаниях.

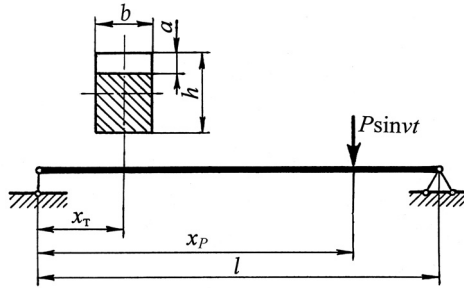


Рис. 1. Схема стержня с трещиной, нагруженного вынуждающей сосредоточенной гармонической силой.

Параметр  $\alpha$  вычисляется через энергетическую характеристику повреждения стержня  $\kappa$  [24]:

$$\alpha = \frac{\kappa}{1 + \kappa}, \quad \kappa = \frac{\Delta\Pi_T}{\Pi_j}, \quad (2)$$

где  $\Delta\Pi_T$  – обусловленное наличием трещины с относительной глубиной  $\gamma$  приращение потенциальной энергии деформации стержня по  $j$ -й форме в составе остальных форм колебаний, определяемое через коэффициент интенсивности нормальных напряжений  $K_1$  на основе анализа номинального напряженного состояния неповрежденного ( $\kappa = 0$ ) стержня при его вынужденных колебаниях с частотой, равной удвоенной собственной частоте резонирующей формы колебаний;  $\Pi_j$  – потенциальная энергия деформации неповрежденного стержня по  $j$ -й форме при его вынужденных колебаниях.

Для определения коэффициента интенсивности напряжений используем известные выражения [29]:

$$K_1 = \frac{6M_T}{bh^{3/2}} \sqrt{\pi\gamma} [1,122 - 1,4\gamma + 7,33\gamma^2 - 13,08\gamma^3 + 14,0\gamma^4] \quad (3)$$

или [30]

$$K_1 = \frac{4,2M_T}{bh^{3/2}} \lambda \sqrt{(1-\gamma)^{-3} - (1-\gamma)^3}, \quad (4)$$

где  $M_T$  – изгибающий момент в сечении расположения трещины ( $x = x_T$ );  $\lambda = 1,15 - 60\gamma^2$  при  $0 < \gamma < 0,05$  и  $\lambda = 1$  при  $\gamma > 0,05$ .

При изгибающем моменте  $M(x) = EI \frac{d^2 y(x)}{dx^2}$  имеем

$$\Delta\Pi_{\tau} = \frac{bh}{E} \int_0^{\gamma} K_1^2 d\gamma = \frac{1}{4} \pi b h^4 E \left( \frac{d^2 y_j^*}{dx^2} \right)_{x=x_{\tau}}^2 \quad H_1(\gamma); \quad \Pi_j = \frac{bh^3 E}{24} \int_0^l \left( \frac{d^2 y_j}{dx^2} \right)^2 dx,$$

где согласно (3) и (4) соответственно запишем

$$H_1(\gamma) \approx \gamma^2 [0,6295 - 1,0472\gamma + 4,6021\gamma^2 - 9,9751\gamma^3 + 20,2948\gamma^4 - 32,9933\gamma^5 + 47,0408\gamma^6 - 40,6933\gamma^7 + 19,6\gamma^8] \quad (5)$$

и

$$H_1(\gamma) = 0,078\lambda^2 [(1-\gamma)^{-2} + 0,5(1-\gamma)^4 - 1,5]. \quad (6)$$

На рис. 2 показана зависимость  $H_1(\gamma)$ , определяемая по формулам (5) и (6).

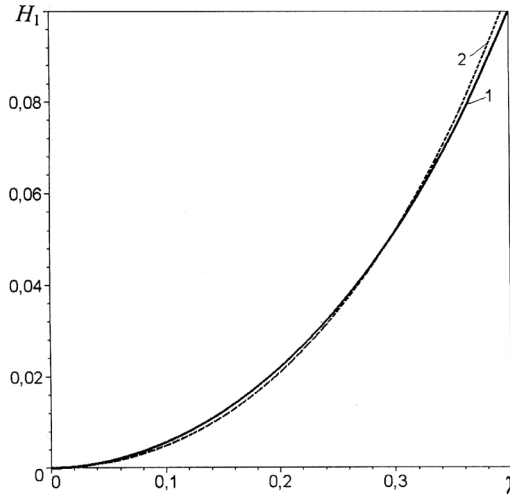


Рис. 2. Зависимость функции  $H_1(\gamma)$ , построенная по формулам (5) – 1 и (6) – 2.

Энергетическая характеристика повреждения (2) имеет вид

$$\kappa = 6\pi h \left( \frac{d^2 y_j^*}{dx^2} \right)_{x=x_{\tau}}^2 \quad H_1(\gamma) \left( \int_0^l \left( \frac{d^2 y_j}{dx^2} \right)^2 dx \right)^{-1}. \quad (7)$$

Значение  $\left( \frac{d^2 y_j^*}{dx^2} \right)_{x=x_{\tau}}^2$ , соответствующее обусловленному трещиной изменению

потенциальной энергии деформации стержня по резонирующей  $j$ -й форме в составе остальных возбуждаемых форм колебаний (обозначено звездочкой), определяется формулой

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2 y_j^*}{dx^2}\right)_{x=x_T}^2 &= \left(\frac{d^2 y_j}{dx^2}\right)_{x=x_T}^2 \left[ 1 + \sum_{i \neq j}^N \left(\frac{d^2 y_i}{dx^2}\right)_{x=x_T} \left( \left(\frac{d^2 y_j}{dx^2}\right)_{x=x_T} \right)^{-1} \right] = \\ &= \left(\frac{d^2 y_j}{dx^2}\right)_{x=x_T} \left[ \sum_{i=1}^N \left(\frac{d^2 y_i}{dx^2}\right)_{x=x_T} \right], \end{aligned} \quad (8)$$

а изменение энергии деформации стержня по остальным формам –

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i \neq j}^N \frac{d^2 y_i^*}{dx^2}\right)_{x=x_T}^2 &= \left(\sum_{i \neq j}^N \frac{d^2 y_i}{dx^2}\right)_{x=x_T}^2 \left[ 1 + \left(\frac{d^2 y_j}{dx^2}\right) \left( \left(\sum_{i \neq j}^N \frac{d^2 y_i}{dx^2}\right)_{x=x_T} \right)^{-1} \right] = \\ &= \left(\sum_{i \neq j}^N \frac{d^2 y_i}{dx^2}\right)_{x=x_T} \left[ \sum_{i=1}^N \left(\frac{d^2 y_i}{dx^2}\right)_{x=x_T} \right]. \end{aligned}$$

Их сумма будет

$$\left(\frac{d^2 y_j^*}{dx^2}\right)_{x=x_T}^2 + \left(\sum_{i \neq j}^N \frac{d^2 y_i^*}{dx^2}\right)_{x=x_T}^2 = \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_{x=x_T}^2.$$

Ранее [24] используемые выражения для  $\left(\frac{d^2 y_j^*}{dx^2}\right)_{x=x_T}^2$  определяли последнее равенство не при всех значениях отношения  $\sum_{i \neq j}^N \left(\frac{d^2 y_i}{dx^2}\right)_{x=x_T} \left( \left(\frac{d^2 y_j}{dx^2}\right)_{x=x_T} \right)^{-1}$ .

Как видно, значения  $\kappa$  (7) и  $\alpha$  (2) могут существенно зависеть от количества  $N$  учитываемых форм собственных колебаний стержня.

Для линии прогибов, соответствующей  $i$ -й форме колебаний, имеем следующие амплитудные зависимости для разных случаев возбуждения субгармонического резонанса порядка  $1/2$   $j$ -й резонирующей собственной формы колебаний стержня.

1. Сосредоточенная сила  $P \sin vt$  приложена в сечении  $x_P$ :

$$y_i(x_P, x) = \frac{Pl^4}{EI(k_j l)^4} X_i(x_P) X_i(x) \beta_i. \quad (9)$$

2. Сосредоточенный момент  $M \sin vt$  приложен в сечении  $x_M$ :

$$y_i(x_M, x) = \frac{Ml^4}{EI(k_j l)^4} X_i'(x_M) X_i(x) \beta_i. \quad (10)$$

3. Распределенная нагрузка интенсивностью  $q \sin vt$ :

$$y_i(x) = \frac{ql^4}{EI(k_j l)^4} X_i(x) \int_0^l X_i(x) dx \beta_i. \quad (11)$$

4. Перемещение заделки ( $x = 0$ )  $B \sin vt$ :

$$y_i(x) = \frac{Bmv^2 l^4}{EI(k_j l)^4} X_i(x) \int_0^l X_i(x) dx \beta_i, \quad (12)$$

где  $\beta_i = \left[ \left( \frac{k_i l}{k_j l} \right)^4 - 4 \right]^{-1}$ ;  $X_i(x)$  –  $i$ -я нормированная собственная форма изгибных колебаний (балочная функция) неповрежденного стержня;  $k_i l$  –  $i$ -й корень частотного уравнения;  $m$  – масса единицы длины стержня.

Следует заметить, что при учете прогиба, соответствующего только одной  $j$ -й резонирующей форме колебаний, т.е. при  $y_j^* \equiv y_j$ , значения  $\kappa = \kappa_j$  и  $\alpha = \alpha_j$  не зависят от вида возбуждения, а в случае возбуждения колебаний сосредоточенной силой или моментом не зависят также от места их приложения:

$$\kappa_j = 6\pi h \frac{[X_j''(x_T)]^2}{k_j^4} H_1(\gamma). \quad (13)$$

По найденным значениям  $\alpha = \kappa/(1+\kappa)$  при заданном логарифмическом декременте колебаний  $\delta$   $j$ -й резонирующей собственной формы, обусловленном вязким трением, вычисляется вибродиагностический параметр  $\bar{A}_{1/2}$  [28] как отношение максимальных резонансных амплитуд первой и второй гармоник прогиба стержня в каком-либо сечении  $x_0$ :

$$\bar{A}_{1/2} = \frac{4\alpha}{3\delta} (1+0,6\alpha) \left\{ \theta^2(x_0) + \frac{1}{9} \left[ \frac{8(\alpha(1+0,6\alpha))^2}{9\pi\delta} \right]^2 \right\}^{-1/2}. \quad (14)$$

Обратим внимание на значение функции  $\theta(x_0)$  в подкоренном выражении (14). В работе [28] значение  $\theta(x_0)$ , равное единице, соответствует случаю субгармонических колебаний системы с одной степенью свободы. Такая система моделирует упругое тело с закрывающейся трещиной при его колебаниях по заданной  $j$ -й резонирующей собственной форме. В этом случае гармоника основных вынужденных колебаний, как первая и вторая резонирующие гармоники, также представляют колебания по рассматриваемой собственной форме, и значение  $\bar{A}_{1/2}$ , как и параметр  $\kappa_j$  (см. (13)), не будет зависеть ни от места регистрации ( $x_0$ ) прогибов, ни от вида и места приложения вынуждающей нагрузки.

Амплитуда гармоники основных вынужденных колебаний стержня, определяемая при виброиспытаниях по спектральному анализу регистрируемых колебаний в каком-либо сечении  $x = x_0$ , будет включать амплитуды всех возбуждаемых заданной нагрузкой на этой частоте форм колебаний. Это можно учесть при определении значения  $\theta$  через отношение суммарного  $\left( \sum_{i=1}^N y_i(x_0) \right)$  и по резонирующей форме ( $y_j(x_0)$ ) прогибов:

$$\theta(x_0) = \frac{1}{y_j(x_0)} \sum_{i=1}^N y_i(x_0). \quad (15)$$

При испытаниях обычно фиксируют амплитуду не перемещения  $A$ , а ускорения  $A^a$ . В этом случае при субгармоническом резонансе порядка 1/2 имеем  $\bar{A}_{1/2}^a = \frac{1}{4} \bar{A}_{1/2}$ .

В качестве вибродиагностического параметра можно также использовать отношение максимальных амплитуд первой гармоники колебаний при субгармоническом  $A_{1C}$  и основном  $A_1$  резонансах, возбуждаемых соответственно при амплитудах нагрузки  $Q_{1C}$  и  $Q_1$ :

$$\bar{A}_{1C} = \frac{A_{1C}}{A_1} = \frac{4\alpha}{9\pi} (1+0,6\alpha) \frac{Q_{1C}}{Q_1}. \quad (16)$$

При этом значение данного отношения не зависит от места регистрации колебаний и для системы с вязким трением – от значения декремента колебаний.

Для сравнительной оценки чувствительности этих параметров рассмотрим также относительное изменение собственной частоты резонирующей формы колебаний стержней при наличии закрывающейся трещины [24]:

$$\Delta \bar{\omega}_j = \frac{1 - \sqrt{1 - \alpha_j}}{1 + \sqrt{1 - \alpha_j}}. \quad (17)$$

**Результаты расчета.** Анализ зависимостей (2), (7) и (14), (16) показывает, что значения  $\bar{A}_{1/2}$  и  $\bar{A}_{1C}$  с достаточным приближением можно считать прямо пропорциональными функции  $H_1(\gamma)$  (см. (5), (6)), кроме того,  $\bar{A}_{1/2}$  обратно пропорционально логарифмическому декременту  $\delta$ . Поэтому в данных расчетах ограничимся значением  $H_1(\gamma)$  при какой-либо одной относительной глубине трещины  $\gamma^*$  и одной величиной декремента  $\delta^*$ . Для иных значений  $\gamma$  и  $\delta$  имеем

$$\bar{A}_{1/2}(\gamma, \delta) \approx \bar{A}(\gamma^*, \delta^*) \frac{\delta^* H_1(\gamma)}{\delta H_1(\gamma^*)}; \quad \bar{A}_{1C}(\gamma) = \bar{A}_{1C}(\gamma^*) \frac{H_1(\gamma)}{H_1(\gamma^*)}. \quad (18)$$

Были рассмотрены субгармонические резонансы первой ( $j=1$ ) формы колебаний стержней с краевой трещиной при трех видах крепления: свободно опертый –

$$X_i(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{i\pi x}{l}, \quad \frac{h}{l} = \frac{1}{12}, \quad x_0 = 0,5l;$$

консольный –

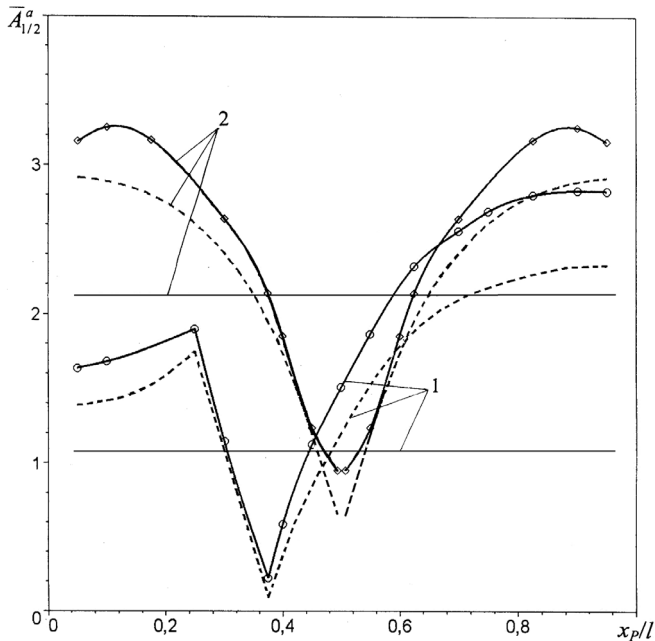
$$X_i(x) = \sqrt{\frac{1}{l}} \left[ (\text{ch } k_i x - \cos k_i x) - \frac{\text{ch } k_i l + \cos k_i l}{\text{sh } k_i l + \sin k_i l} (\text{sh } k_i x - \sin k_i x) \right], \quad \frac{h}{l} = \frac{2}{23}, \quad x_0 = l;$$

с заземленными концами –

$$X_i(x) = \sqrt{\frac{1}{l}} \left[ (\text{ch } k_i x - \cos k_i x) - \frac{\text{ch } k_i l - \cos k_i l}{\text{sh } k_i l - \sin k_i l} (\text{sh } k_i x - \sin k_i x) \right], \quad \frac{h}{l} = \frac{1}{12}, \quad x_0 = 0,5l.$$

Прежде чем перейти к анализу полученных результатов расчета, следует уточнить целесообразное количество  $N$  учитываемых форм собственных колебаний стержней. Как показывают вычисления исходного параметра повреждения (7), для рациональных способов возбуждения субгармонического резонанса первой формы колебаний (например, при приложении сосредоточенного усилия в сечениях  $x_p > 0,5l$  в случае консольного стержня,  $0,25l < x_p < 0,75l$  при свободно опертом и с защемленными концами или при кинематическом их возбуждении, что практически эквивалентно воздействию распределенной нагрузки) достаточно учитывать семь–девять форм колебаний. При других условиях возбуждения может возникнуть необходимость учета значительно большего количества форм колебаний. Однако, предусматривая в основном раскрытие возможностей методики и характера зависимости вибродиагностических параметров от особенностей возбуждения и условий закрепления стержней, а также возможность сравнения полученных результатов с имеющимися данными численного решения [22], показавшего их стабилизацию для рассматриваемых стержней при учете восьми форм колебаний, ограничимся при расчете учетом восьми-девяи форм.

Ниже для указанных стержней представлены расчетные зависимости параметра  $\bar{A}_{1/2}^a$  от места приложения вынуждающей силы  $x_p$  и момента  $x_M$  (рис. 3–5) для случаев расположения трещины с относительной глубиной  $\gamma^* = 0,2$  в сечениях  $x_T = 0,1l$ ;  $0,25l$  и  $0,5l$  при значении декремента  $\delta^* = 0,01$ . На рис. 3–5 горизонтальным линиям соответствуют значения параметра  $\bar{A}_{1/2}^{a*}$  для первой резонирующей формы колебаний ( $j = 1$ ), рассчитанные по формуле (14) при  $\theta(x_0) = 1$  с использованием зависимости (13). Исключение данных для стержней со свободными (рис. 3,б) и защемленными (рис. 5,б) концами в случае приложения сосредоточенного момента в некоторых сечениях обусловлено близкими к нулю значениями суммарного прогиба  $\Sigma y_i(x_M, x_0)$  в выбранном для этих стержней месте его регистрации  $x_0 = 0,5l$ . Например, для стержня с защемленными концами это иллюстрирует рис. 6.



а



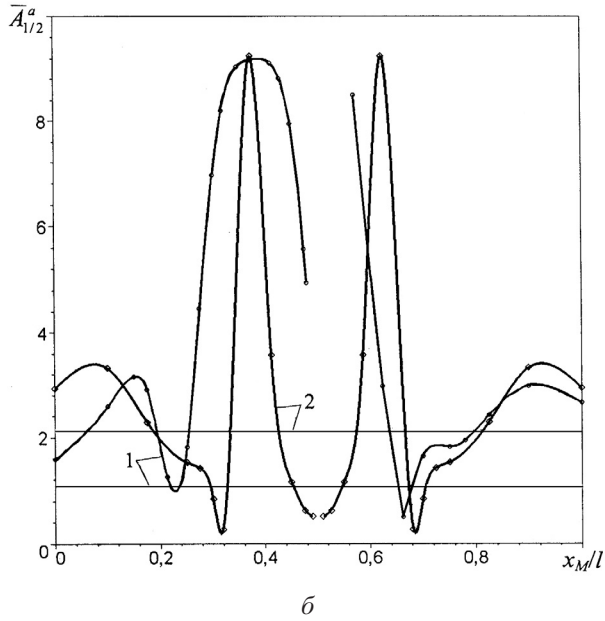
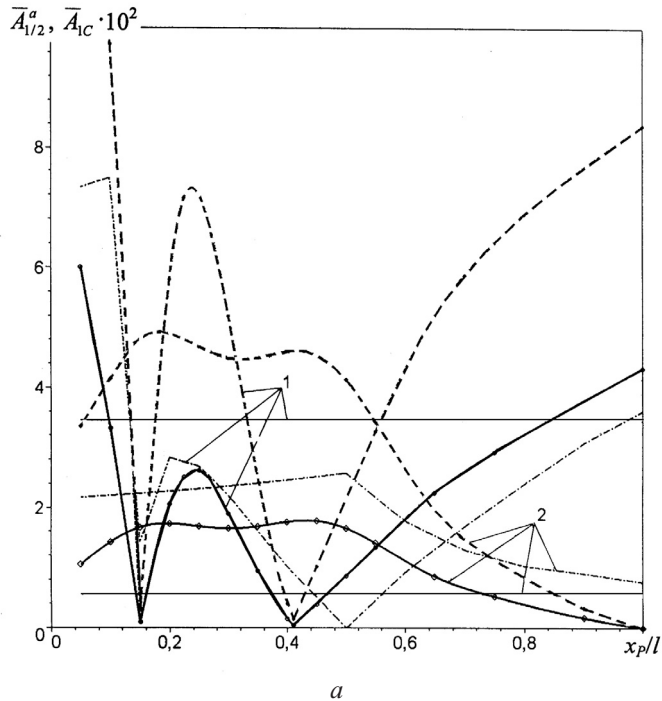


Рис. 3. Зависимость вибродиагностического параметра  $\bar{A}_{1/2}^a$  от места приложения вынуждающей силы (а) и момента (б) для свободно опертого стержня, рассчитанная по формуле (14) – сплошные линии и по данным численного решения [22] – штриховые линии: 1 –  $x_T = 0,25l$ ; 2 –  $x_T = 0,5l$ .

Зависимости параметра  $\bar{A}_{1C} \equiv \bar{A}_{1C}^a$  от места приложения сосредоточенной нагрузки, как видно из рис. 4, по характеру близки к зависимостям параметра  $\bar{A}_{1/2}^a$ .



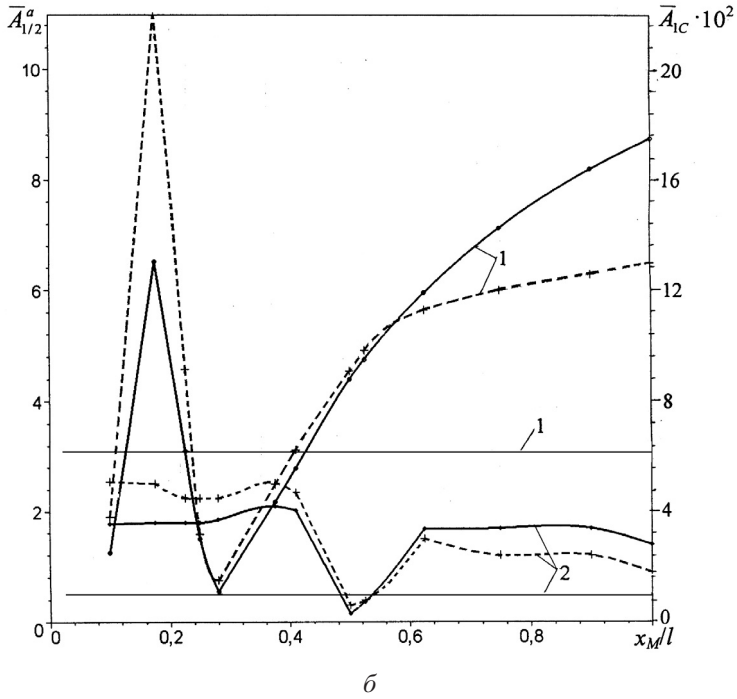
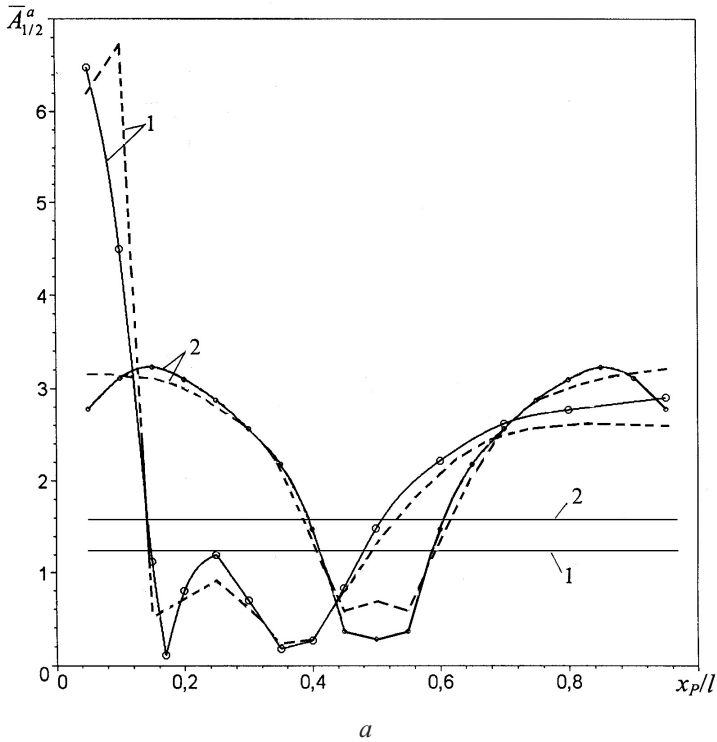


Рис. 4. Зависимость вибродиагностических параметров  $\bar{A}_{1/2}^a$  и  $\bar{A}_{1c}$  от места приложения вынуждающей силы (а) и момента (б) для консольного стержня, рассчитанная по формулам (14) – сплошные линии и (16) – штриховые линии, а также по данным численного решения [22] – штрихпунктирные линии: 1 –  $x_T = 0,1l$ ; 2 –  $x_T = 0,5l$ .



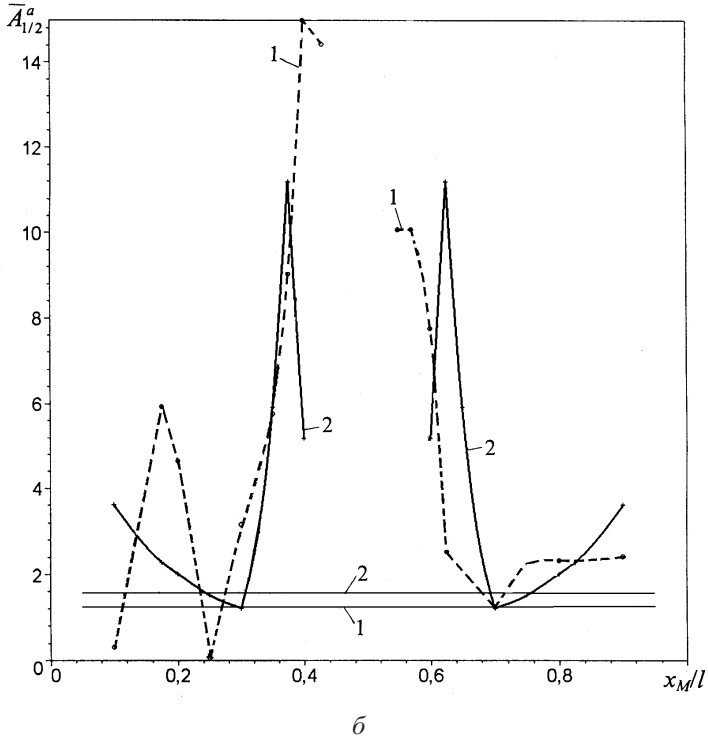


Рис. 5. Зависимость вибродиагностического параметра  $\bar{A}_{1/2}^a$  от места приложения вынуждающей силы (а) и момента (б) для стержня с защемленными концами, рассчитанная по формуле (14) – сплошные линии и по данным численного решения [22] – штриховые линии: 1 –  $x_T = 0,1l$ ; 2 –  $x_T = 0,5l$ .

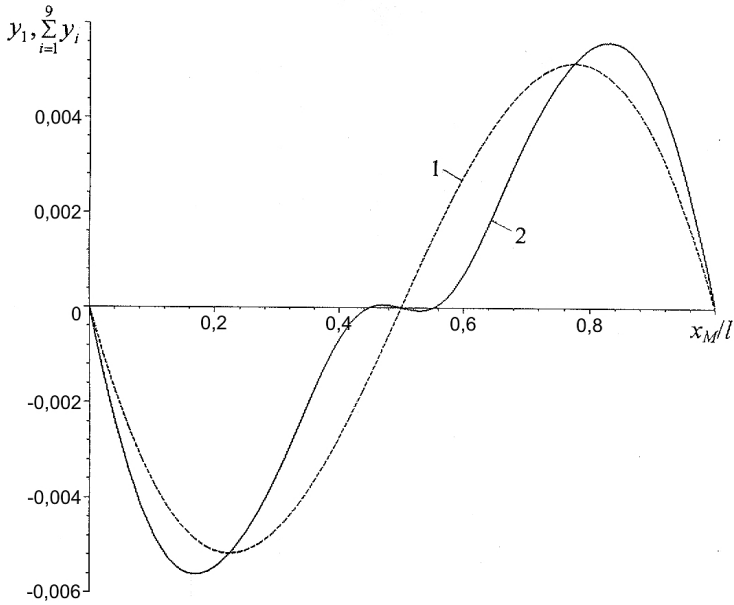


Рис. 6. Расчетные зависимости прогиба по первой форме (1) и суммарного прогиба (2) в сечении  $x_0 = 0,5l$  для стержня с защемленными концами от места приложения вынуждающего момента  $x_M$ .

Зависимость параметров  $\bar{A}_{1/2}^a$  и  $\bar{A}_{1C}$  от относительной глубины трещины  $\gamma$  показана на рис. 7 на примере консольной балки, нагруженной на свободном конце сосредоточенной силой ( $x_P = l$ ), при расположении трещины в сечении  $x_T = 0,1l$  и значениях декремента 0,01 и 0,05. Там же для сравнения представлена зависимость относительного изменения собственной частоты первой ( $j = 1$ ) формы колебаний стержня с закрывающейся трещиной (17) от  $\gamma$ .

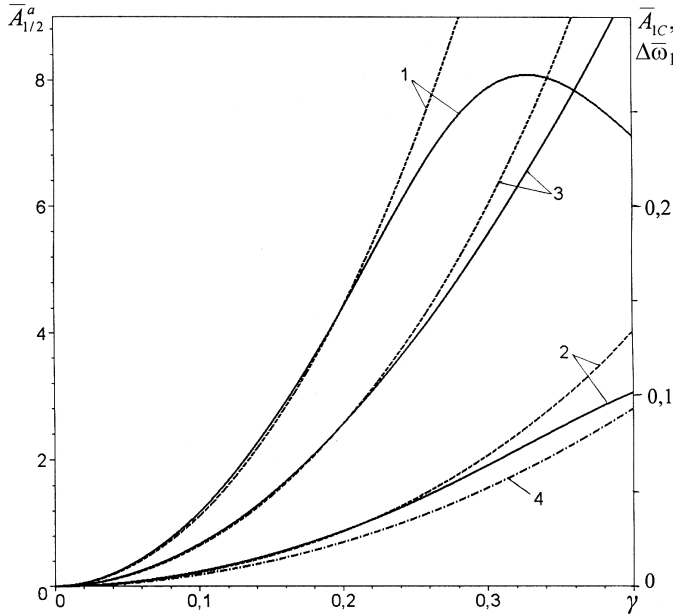


Рис. 7. Зависимость параметров  $\bar{A}_{1/2}^a$  (кривые 1 и 2),  $\bar{A}_{1C}$  (кривые 3) и относительного изменения собственной частоты  $\Delta\bar{\omega}_1$  (кривая 4) от относительной глубины трещины  $\gamma$ : 1 –  $\delta = 0,01$ ; 2 –  $\delta = 0,05$ . (Сплошные линии – зависимости, рассчитанные по формуле (14), штриховые – по формуле (18) при  $\gamma^* = 0,2$  и  $\delta^* = 0,01$ )

Из рис. 3–5, 7 видно, что значения параметров  $\bar{A}_{1/2}^a$  и  $\bar{A}_{1C}$  весьма существенно зависят не только от размера и местоположения трещины, но, в отличие от  $\bar{A}_{1/2}^{a*}$ , и от места возможного приложения сосредоточенной нагрузки, что может быть дополнительно использовано для установления местоположения трещины. Например, для рассматриваемой первой резонирующей формы колебаний свободно опертого (рис. 3) или защемленного с двух сторон (рис. 5) стержня симметричность зависимости  $\bar{A}_{1/2}^a(x_P/l)$  определяет расположение трещины посередине между опорами ( $x_T = 0,5l$ ). При удалении трещины от этого места нарушается симметричность указанной зависимости со сдвигом в сторону трещины.

Характерные особенности рассматриваемых зависимостей отмечаются также для других условий закрепления и нагружения стержней. Следует заметить, что на практике возбуждение колебаний при приложении сосредоточенной нагрузки вблизи защемления является проблематичным. Однако для представления общей картины результаты аналитического решения приведены для широкого диапазона мест приложения нагрузки. Анализ полученных зависимостей позволяет решить вопрос оптимального выбора двух-трех мест приложения нагрузки для обнаружения предполагаемого местоположения трещины. При этом следует учитывать, что относительное изменение параметров  $\bar{A}_{1/2}^a$  и  $\bar{A}_{1C}$  при изменении места приложения

нагрузки определяется местоположением трещины и практически не зависит от ее размеров.

По-видимому, характерными могут быть также положения  $(x_P^*, x_M^*)$  сосредоточенной нагрузки, соответствующие экстремальным значениям параметров  $\bar{A}_{1/2}^a$  или  $\bar{A}_{1C}$ , близким к нулю. Как видно из выражений (7), (8), это возможно в случае если положение  $(x^*)$  узла изгибающего момента, т.е. где  $y''(x_P^*, x^*)$  или  $y_j''(x_P^*, x^*)$  равны нулю, при основных вынужденных колебаниях будет вблизи трещины  $x_T$ .

Рассчитав для данного значения  $x_P^*$  или  $x_M^*$ , определяющего практически нулевое значение параметра  $\bar{A}_{1/2}^a$ , положение этого узла, можно полагать, что  $x_T \approx x^*$ . Так, например, для консольного стержня, нагруженного сосредоточенной силой (рис. 4,а), в случае нахождения трещины в сечении  $x_T = 0,1l$  значения  $x_P^* = 0,15l$  и  $0,415l$ , при  $x_T = 0,5l - x_P^* = l$ . Проведенный расчет функций  $y''(x_P^*, x) = \sum_{i=1}^N y_i''(x_P^*, x)$

определил местоположение узлов  $x^* = 0,1l$  в первом случае и  $x^* = 0,5l$  во втором (рис. 8), т.е. именно в сечениях расположения трещины. Для стержня с защемленными концами (рис. 5,а) в случае  $x_T = 0,1l$  имеем два значения  $x_P^* = 0,15l$  и  $0,35l$ , которые соответственно определяют  $x^* = 0,092l$  и  $0,108l$ , т.е. их значение практически равно  $x_T$ . Аналогичная картина наблюдается и при возбуждении колебаний сосредоточенным моментом. Так, для консоли (рис. 4,б) с трещиной в сечении  $x_T = 0,1l$  имеем значение  $x_M^* = 0,28l$ , которое определяет  $x^* \approx 0,11l$ , в случае  $x_T = 0,5l$  – соответственно  $x_M^* = 0,5l$  и  $x^* = 0,49l$ .

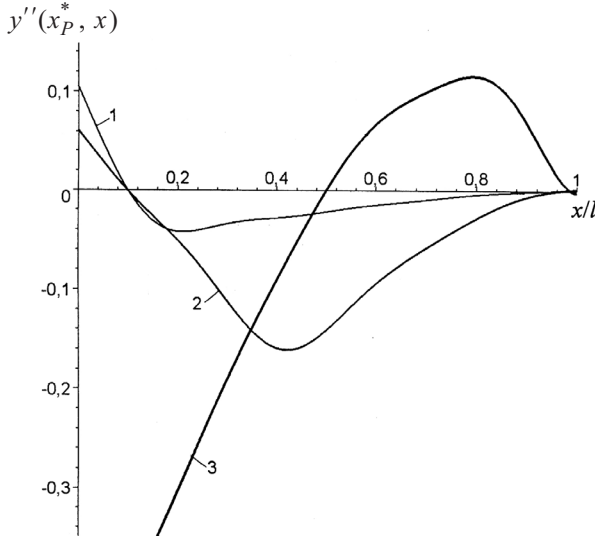


Рис. 8. График функции  $y''(x_P^*, x) = \sum_{i=1}^8 y_i''(x_P^*, x)$  для консольного стержня при его вынужденных колебаниях в области субгармонического резонанса порядка 1/2 при приложении возбуждающей силы в сечениях  $x_P^* = 0,15l$  (1),  $0,415l$  (2) и  $l$  (3).

Одним из практических способов возбуждения колебаний является кинематический, когда, например, конструктивный элемент устанавливают на платформе электро-

динамического вибратора. К такому случаю можно отнести возбуждение колебаний консольного стержня путем перемещения его заделки по закону  $B \sin vt$  (12). На рис. 9 показаны соответствующие этому случаю зависимости  $\bar{A}_{1/2}^a$ ,  $\bar{A}_{1C}$  и  $\Delta\bar{\omega}_1$  от относительной глубины трещины  $\gamma$ , расположенной вблизи корневого сечения ( $x_T = 0,1l$ ) при значении декремента  $\delta = 0,01$ . Там же для сравнения приведены аналогичные зависимости в случае возбуждения колебаний сосредоточенной силой, приложенной к свободному концу стержня.

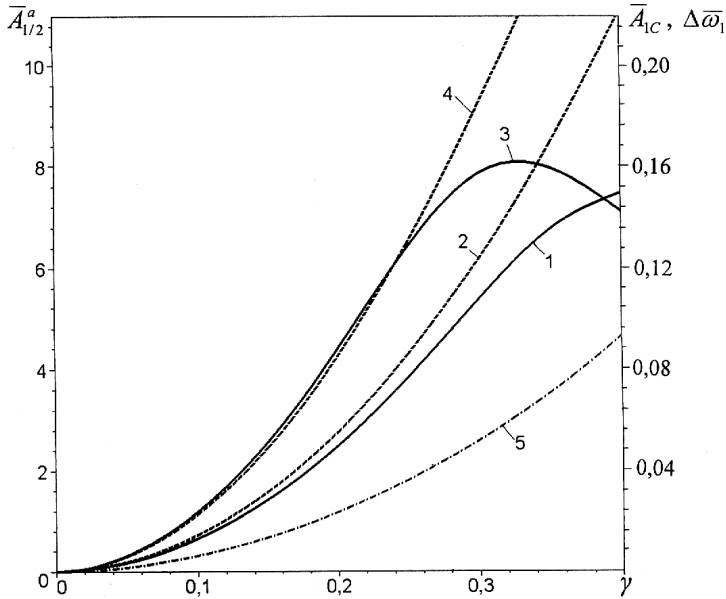


Рис. 9. Зависимости параметров  $\bar{A}_{1/2}^a$  (1, 3),  $\bar{A}_{1C}$  (2, 4) и  $\Delta\bar{\omega}_1$  (5) от относительной глубины трещины  $\gamma$ , расположенной в сечении  $x_T = 0,1l$  консольного стержня, при кинематическом (1, 2) и силовом (3, 4) возбуждении колебаний.

**Оценка достоверности аналитического решения.** Для проверки были взяты данные численного решения [22], полученного для случая возбуждения колебаний сосредоточенной силой с использованием балочной конечноэлементной модели стержня при определении изменения жесткости элемента с трещиной при ее открытии также через коэффициент интенсивности напряжений (4). Нелинейная система полученных дифференциальных уравнений решалась в главных координатах методом Рунге-Кутты. Результаты численного решения, учитывающего как изменение жесткости стержня, так и формы его колебаний на полуцикле с открытой трещиной, с проведенной поправкой на коэффициент  $\theta$  (15) представлены на рис. 3–5 штриховыми линиями. Как видно, наблюдается хорошее согласование характера получаемых зависимостей при некотором расхождении их значений, обусловленном пренебрежением в аналитическом решении различием форм колебаний на полуциклах с закрытой и открытой трещиной. Однако следует отметить, что как в аналитическом, так и численном решениях используется гипотеза Бернулли и идеализированная модель поведения закрывающейся трещины нормального отрыва, предусматривающая открытие и закрытие трещины в нейтральном положении стержня и не учитывающая явления соударения и сминания ее берегов при их контакте.

Однако некоторое расхождение в результатах и, в частности, отсутствие проявления субгармонического резонанса ( $\bar{A}_{1/2} = \bar{A}_{1C} = 0$ ) при аналитическом и явное его обнаружение при численном решении в случае возбуждения колебаний консоль-

ного стержня силой, приложенной на его свободном конце ( $x_p = l$ ), при местоположении трещины в сечении  $x_T = 0,5l$  (рис. 4,а) обусловили проведение дополнительного исследования.

Как отмечалось выше (на рис. 8 кривая 3), при указанном приложении силы изгибающий момент в сечении местоположения трещины при основных вынужденных колебаниях равен нулю, т.е. трещина не раскрывается, стержень деформируется как цельный, и условий для возбуждения субрезонанса нет.

Для проверки использовалась более сложная конечноэлементная модель стержня с дышащей трещиной, которая представляется математическим разрезом. Взаимное непроникновение берегов трещины задается условиями контактной задачи. Стержень разбивается на конечные элементы со сгущением сетки в окрестности трещины. Для моделирования используется объемный восьмиузловой элемент (Solid 45) [31]. Решение нелинейной системы дифференциальных уравнений, описывающих колебания стержня с закрытой и открытой трещиной, осуществляется интегрированием по времени с использованием метода Ньюмарка с последующим преобразованием Фурье. Результаты ранее полученные и данные численного решения для стержня с параметрами  $l = 230$  мм,  $h = 20$  мм,  $b = 4$  мм и  $a = 4$  мм при модуле упругости  $E = 200$  ГПа, плотности  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup> материала и вязкости, соответствующей декременту колебаний  $\delta = 0,01$ , представлены на рис. 10.

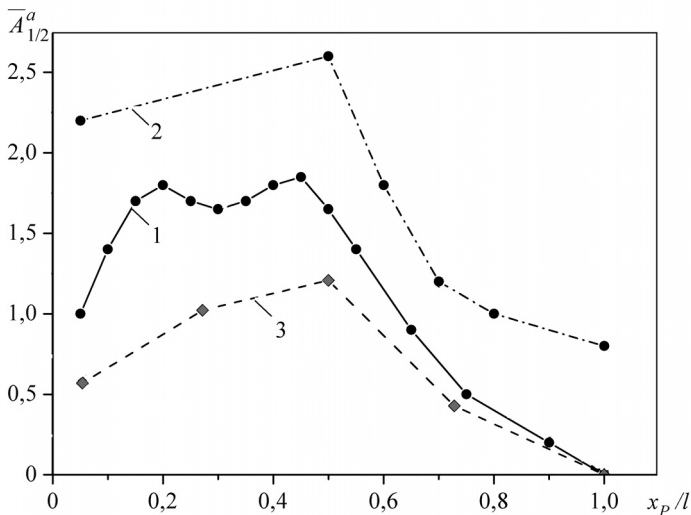


Рис. 10. Зависимость параметра  $\bar{A}_{1/2}^a$  от места приложения вынуждающей силы  $x_p$  для консольного стержня, рассчитанная по формуле (14) – кривая 1, по данным [22] – кривая 2 и уточненное решение – кривая 3.

Как видно, уточненное численное решение подтверждает отсутствие проявления субгармонического резонанса в случае  $x_p = l$  при  $x_T = 0,5l$  и показывает несколько лучшее согласование с результатами аналитического расчета. Следует также отметить, что данное решение соответствует расчетной схеме балки Тимошенко и не ограничивает число учитываемых собственных форм колебаний.

**Заключение.** На примере стержня прямоугольного поперечного сечения с различными граничными условиями показана возможность приближенного решения существенно нелинейной задачи определения вибродиагностических параметров наличия закрывающейся трещины при возбуждении колебаний в области субгармонического резонанса с использованием линейной теории колебаний и линейной механики разрушения.

Показано, что полученные зависимости вибродиагностических параметров от места приложения сосредоточенной возбуждающей нагрузки также можно использовать для определения местоположения трещины.

## Резюме

Представлено результати наближеного розрахунку вібродіагностичних параметрів наявності крайової тріщини втомленості в стрижнях, що закривається, з різними граничними умовами в залежності від параметрів тріщини і збуджуючого навантаження за субгармонічного резонансу нижчої власної форми згинних коливань.

1. *Douka E., Loutridis S., and Trochidis A.* Crack identification in beams using wavelet analysis // *Int. J. Solids Struct.* – 2003. – **40**. – P. 3557 – 3569.
2. *Kim J. T. and Stubbs N.* Crack detection in beam-type structures using frequency data // *J. Sound Vibr.* – 2003. – **259**, Issue 1. – P. 145 – 160.
3. *Loya J. A., Rubio L., and Fernandez-Saez J.* Natural frequencies for bending vibrations of Timoshenko cracked beams // *Ibid.* – 2006. – **290**, Issues 3-5. – P. 640 – 653.
4. *Lee J.* Identification of multiple cracks in a beam using natural frequencies // *Ibid.* – 2009. – **320**, Issue 3. – P. 482 – 490.
5. *Ильгамов М. А., Хакимов А. Г.* Диагностика поврежденных балки на шарнирных опорах // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений.* – 2010. – № 2. – С. 42 – 48.
6. *Li B. and He Z. J.* Frequency-based crack identification for static beam with rectangular cross-section // *J. Vibroengineering.* – 2011. – **13**, No. 3. – P. 477 – 486.
7. *Гордон В. А., Потураева Т. В.* Частоты собственных изгибных колебаний свободно опертой балки с трещиной // *Строительная механика и расчет сооружений.* – 2009. – № 3. – С. 19 – 23.
8. *Mazanoglu K. and Sabuncu M.* Flexural vibration of non-uniform beams having double-edge breathing cracks // *J. Sound Vibr.* – 2010. – **329**, Issue 20. – P. 4181 – 4191.
9. *Matveev V. V. and Bovsunovsky A. P.* Vibration-based diagnostics of fatigue damage of beam-like structures // *Ibid.* – 2002. – **249**, Issue 1. – P. 23 – 40.
10. *Zheng D. Y. and Kessissoglou N. J.* Free vibration analysis of cracked beam by finite element method // *Ibid.* – 2004. – **273**, Issue 3. – P. 457 – 475.
11. *Karthikeyan M., Tiwari R., and Talukdar S.* Development of a technique to locate and quantity a crack in a beam based on modal parameters // *J. Vibr. Acoust.* – 2007. – **129**, Issue 3. – P. 390 – 395.
12. *Lu X. B., Liu J. K., and Lu Z. R.* A two-step approach for a crack identification in beam // *J. Sound Vibr.* – 2013. – **332**, Issue 2. – P. 282 – 293.
13. *Quek S., Wang Q., Zhang I., and Ang K.* Sensitivity analysis of crack detection in beams by the wavelet technique // *Int. J. Mech. Sci.* – 2001. – **43**. – P. 2899 – 2910.
14. *Yan G., De Stefano A., Matta E., and Feng R.* A novel approach to detecting breathing-fatigue cracks based on dynamic characteristics // *J. Sound Vibr.* – 2013. – **332**, Issue 2. – P. 407 – 422.
15. *Цыфанский С. Л., Магоне М. А., Ожиганов В. М.* Об использовании нелинейных эффектов для обнаружения трещин в стержневых элементах конструкций // *Дефектоскопия.* – 1985. – № 3. – С. 77 – 82.



16. *Цыфанский С. Л., Бересневич В. И., Магоне М. А.* Вибродиагностика усталостных трещин в несущих поверхностях летательных аппаратов на основе использования нелинейных эффектов // Там же. – 1993. – № 2. – С. 87 – 94.
17. *Tsyfansky S. L. and Beresnevich V. I.* Detection of fatigue cracks in flexible geometrically non-linear bars by vibration monitoring // J. Sound Vibr. – 1998. – **213**, Issue 1. – P. 159 – 168.
18. *Andreas U., Casini P., and Vestroni F.* Non-linear dynamics of a cracked cantilever beam under harmonic excitation // Int. J. Non-Linear Mech. – 2007. – **42**, No. 3. – P. 566 – 575.
19. *Peng Z. K., Lang Z. Q., and Billings S. A.* Crack detection using nonlinear output frequency response functions // J. Sound Vibr. – 2007. – **301**, Issues 3-5. – P. 777 – 788.
20. *Nguyen V. K. and Olatunbosun O. A.* A proposed method for fatigue crack detection and monitoring using the breathing crack phenomenon and wavelet analysis // J. Mech. Mater. Struct. – 2007. – **2**, No. 3. – P. 399 – 420.
21. *Bovsunovsky A. and Bovsunovsky O.* Crack detection in beams by means of the driving force parameters variation at non-linear resonance vibrations // Key Eng. Mater. – 2007. – **347**. – P. 413 – 420.
22. *Бовсуновский А. П., Бовсуновский О. А.* Использование нелинейных резонансов для диагностики закрывающихся трещин в стержневых элементах // Пробл. прочности. – 2010. – № 3. – С. 125 – 141.
23. *Chatterjee A.* Structural damage assessment in a cantilever beam with a breathing crack using higher order frequency response functions // J. Sound Vibr. – 2010. – **329**, Issue 16. – P. 3325 – 3334.
24. *Матвеев В. В., Богинич О. Е., Яковлев А. П.* Метод приближенного аналитического определения вибродиагностического параметра наличия трещины в упругой системе с распределенными параметрами при супер- и субгармоническом резонансах // Пробл. прочности. – 2010. – № 5. – С. 62 – 83.
25. *Andreas U. and Baragatti P.* Cracked beam identification by numerically analysing the nonlinear behaviour of the harmonically forced response // J. Sound Vibr. – 2011. – **330**, Issue 4. – P. 721 – 742.
26. *Qu W., Xiao L., and Zhou Y.* Breathing crack detection using sub-harmonic component with nonlinear boundary condition // Adv. Sci. Lett. – 2013. – **19**, No. 3. – P. 988 – 991.
27. *Bouboulas A. S. and Anifantis N. K.* Three-dimensional finite element modeling of a vibrating beam with a breathing crack // Arch. Appl. Mech. – 2013. – **83**, No. 2. – P. 207 – 223.
28. *Матвеев В. В., Богинич О. Е.* К вопросу приближенного определения вибродиагностического параметра нелинейности упругого тела, обусловленной наличием дышащей трещины, при субгармоническом резонансе // Пробл. прочности. – 2012. – № 3. – С. 37 – 49.
29. *Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2 т. Т. 1 / Пер. с англ. под ред. Ю. Мураками.* – М.: Мир, 1990. – 448 с.
30. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
31. *Басов К. А.* ANSYS: Справочник пользователя. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 640 с.

Поступила 01. 10. 2013