

УДК 513.7

*К.И. Науменко*

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРИЕНТАЦИИ  
С ПОМОЩЬЮ СПУТНИКОВОЙ  
НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ GPS**

Предлагается новый метод решения задачи определения ориентации с помощью спутниковой радионавигационной системы GPS (Global Positioning System). Процедура минимизации общепринятой целевой функции сводится к решению обобщенной задачи Вахба. Для получения кватерниона, определяющего ориентацию объекта, предлагается быстросходящийся итерационный алгоритм. Применение метода иллюстрируется результатами численного моделирования.

**Математическая модель.** Пусть на подвижном объекте установлено  $m + 1$  антенн, принимающих сигналы  $l$  спутников GPS. Одну из этих антенн полагаем основной, а  $m$  оставшихся — подчиненными. Тогда точки их установки определяют в связанной с объектом системе координат  $m$  базовых векторов  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m$ . Предполагаем, что известно решение стандартной задачи спутниковой навигации — задачи определения местоположения подвижного объекта по данным о расположении спутников и расстояниям до них. Это решение определяет нормированные векторы  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_n$ , задающие линии визирования на спутники в навигационной системе координат (системе, в которой определяется ориентация объекта).

Для определения ориентации по сигналам спутников GPS используется контур слежения за разностью фаз радиосигналов, которые приняты основной и каждой из подчиненных антенн. Информация об этой разности позволяет вычислить проекции базовых векторов на направления визирования в соответствии с соотношениями

$$b_i \cos \theta_{ij} = L(n_{ij} + \Delta\varphi_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где  $b_i = |\mathbf{b}_i| = \sqrt{\mathbf{b}_i^T \mathbf{b}_i}$  — длина (евклидова норма) вектора  $\mathbf{b}_i$ , «Т» — знак операции транспонирования,  $\theta_{ij}$  — угол между базовым вектором  $\mathbf{b}_i$  и  $j$ -й линией визирования,  $L$  — длина волны сигнала,  $n_{ij}$  — целое число волн в разности сигналов, принятых основной и  $i$ -й подчиненной антеннами,  $\Delta\varphi_{ij}$  — дробная часть этой разности. Заметим, что контур слежения за разностью фаз принятых сигналов дает значение только величины  $\Delta\varphi_{ij}$ . Для получения целого числа волн  $n_{ij}$  можно использовать различные подходы. Наиболее часто применяется квазистатический алгоритм, реализуемый с учетом динамики как объекта, так и направле-

ний визирования [1]. Локальный (отнесенный к фиксированному моменту времени) метод определения величин  $n_{ij}$  рассмотрен в [2], он сводится к решению системы диофантовых уравнений. В [3] обсуждаются различные достоинства и недостатки этих двух подходов и предлагается новый статистический метод решения указанной задачи.

Предполагая далее известными величины  $n_{ij}$ , представим результаты измерений в виде

$$\Delta\phi_{ij} = L(n_{ij} + \Delta\varphi_{ij}). \quad (2)$$

Тогда, в силу равенств (1) и с точностью до неопределенных величин  $\varepsilon_{ij}$  (обусловленных как погрешностями задания базовых векторов  $\mathbf{b}_i$ , так и помехами измерений их проекций на направления визирования) представления (2) могут быть записаны в виде

$$\Delta\phi_{ij} = \mathbf{b}_i^T \mathbf{A} \mathbf{s}_j + \varepsilon_{ij}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{A}$  — матрица преобразования координат, определяющая ориентацию связанной с объектом системы координат относительно навигационной, или некоторая оценка этой матрицы, полученная на основании априорных данных о характеристиках погрешностей. При задании координатных систем правыми тройками ортогональных базисных векторов матрица  $\mathbf{A}$  ортогональна, т.е. удовлетворяет равенству

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{I}$  — трехмерная единичная матрица.

Заметим, что при наличии достаточно точной оценки  $\hat{\mathbf{A}}$  неизвестного истинного значения этой матрицы число волн  $n_{ij}$  в (2) может быть найдено как ближайшее целое значение числа  $[\mathbf{b}_i^T \hat{\mathbf{A}} \mathbf{s}_j / L - \Delta\varphi_{ij}]$ . Такое представление  $n_{ij}$  справедливо, например, для базового вектора длиной 1 м, если  $L \cong 0,19$  м и угловая ошибка оценки не превышает  $10^\circ$ .

Полагая погрешности измерений  $\varepsilon_{ij}$  стационарными центрированными гауссовыми процессами с дисперсией  $\sigma_{ij}^2$ , задачу определения ориентации спутниковой навигационной системой сформулируем на основании соотношений (3) как задачу минимизации функционала [1, 4]

$$J(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sigma_{ij}^2} (\Delta\phi_{ij} - \mathbf{b}_i^T \mathbf{A} \mathbf{s}_j)^2 \quad (5)$$

на множестве матриц преобразования координат  $\mathbf{A}$ .

Стандартный подход к определению матрицы  $\mathbf{A}$  как из системы уравнений (3), так и путем минимизации функционала (5) при ограничении (4) — применение рекуррентных алгоритмов метода наименьших квадратов (МНК) [1]. Более экономным, в смысле быстрейшего действия, оказывается подход, основанный на сведении задачи минимизации функционала (5) к решению обобщенной задачи Вахба. Эта процедура реализуется при помощи МНК на основании измерений (2) координат ортов направлений визирования в связанной с объектом системе (или координат базовых векторов в навигационной системе) [4].

Ограничимся рассмотрением типичной в практических применениях ситуации, когда в связанной системе координат имеется не менее трех ( $m \geq 3$ ) некопланарных базовых векторов  $\mathbf{b}_i$ . В этом случае, обозначив

$$\mathbf{R}_j = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_{ij}^2} \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^T, \quad \mathbf{z}_j = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_{ij}^2} \Delta \phi_{ij} \mathbf{b}_i, \quad \mathbf{k}_j = \mathbf{R}_j^{-1} \mathbf{z}_j,$$

перепишем функционал (5) в виде

$$J(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_{ij}^2} \Delta \phi_{ij}^2 - \mathbf{z}_j^T \mathbf{R}_j^{-1} \mathbf{z}_j \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\mathbf{k}_j - \mathbf{A} \mathbf{s}_j)^T \mathbf{R}_j (\mathbf{k}_j - \mathbf{A} \mathbf{s}_j).$$

Так как первая из сумм в этом представлении функционала (5) не зависит от матрицы  $\mathbf{A}$ , то сформулированная задача сводится к минимизации функционала

$$J_s(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\mathbf{k}_j - \mathbf{A} \mathbf{s}_j)^T \mathbf{R}_j (\mathbf{k}_j - \mathbf{A} \mathbf{s}_j) \quad (6)$$

и представляет собой обобщение рассмотренной в [5] задачи, названной в литературе (см., например, [1, 4]) задачей Вахба. Далее при ее решении будем пользоваться кватернионами.

**Кватернионы.** Наряду с описанием взаимной ориентации двух декартовых систем координат  $I$  и  $E$  матрицей преобразования координат  $\mathbf{A}$  угловое положение этих систем может быть задано нормированным кватернионом

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\phi}{2} \\ \sin \frac{\phi}{2} \mathbf{e} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

определяющим плоский поворот системы координат  $I$  до совмещения с системой  $E$  на угол  $\phi$  вокруг заданной нормированным вектором  $\mathbf{e}$  эйлеровой оси вращения. Первая компонента  $\alpha$  кватерниона  $\mathbf{q}$  называется его скалярной частью, а три оставшиеся и представленные вектором  $\mathbf{n}$  — векторной. Матрица преобразования координат  $\mathbf{A}$  как функция кватерниона  $\mathbf{q}$  имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \mathbf{n} \mathbf{n}^T + (\alpha \mathbf{I} - \mathbf{V}(\mathbf{n}))^2, \quad (8)$$

где  $\mathbf{V}(\mathbf{n})$  — оператор векторного произведения,

$$\mathbf{V}(\mathbf{n}) = \mathbf{V} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \mathbf{n} \times = \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пусть матрицы преобразования координат  $\mathbf{A}_0$  и  $\mathbf{A}_1$  определяют ориентацию двух систем координат  $E_0$  и  $E_1$  относительно системы  $I$ , а матрица  $\delta \mathbf{A}_0$  соответствует повороту из состояния  $E_0$  в состояние  $E_1$ . Эти матрицы удовлетворяют равенствам

$$\mathbf{A}_1 = \delta \mathbf{A}_0 \mathbf{A}_0, \quad \delta \mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_0^T. \quad (9)$$

Тогда для кватернионов  $\mathbf{q}_0$ ,  $\mathbf{q}_1$  и кватерниона рассогласования  $\delta\mathbf{q}_0$ , которые соответствуют удовлетворяющим равенствам (9) матрицам преобразования координат  $\mathbf{A}_0$ ,  $\mathbf{A}_1$  и  $\delta\mathbf{A}_0$ , в силу правил сложения и вычитания конечных поворотов справедливы матричные операции умножения и деления кватернионов

$$\mathbf{q}_1 = \Phi(\delta\mathbf{q}_0)\mathbf{q}_0, \quad \delta\mathbf{q}_0 = \Psi(\mathbf{q}_0)\mathbf{q}_1, \quad (10)$$

где

$$\Phi(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \alpha & -\mathbf{n}^T \\ \mathbf{n} & \alpha\mathbf{I} - \mathbf{V}(\mathbf{n}) \end{bmatrix}, \quad \Psi(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \alpha & \mathbf{n}^T \\ -\mathbf{n} & \alpha\mathbf{I} - \mathbf{V}(\mathbf{n}) \end{bmatrix}. \quad (11)$$

**Задача Вахба.** Пусть  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_m$  — единичные векторы, определяющие заданные в навигационной системе координат направления (например, направления векторов напряженности магнитного поля Земли, на звезду, на спутник и т.п.),  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_m$  — результаты наблюдений этих векторов (измерение их проекций) в связанной с объектом системе. Тогда матрицу  $\mathbf{A}$  можно определить из системы уравнений

$$\mathbf{A}\mathbf{s}_i = \mathbf{k}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (12)$$

В связи с тем, что как наблюдаемые, так и заданные векторы содержат погрешности, решение системы уравнений (12) в общем случае не существует. Поэтому для определения ориентации объекта следует применять МНК. Так, с учетом того, что погрешности измерений проекций каждого наблюдаемого вектора имеют одинаковые дисперсии, в работе [3] предложен метод отыскания матрицы преобразования координат  $\mathbf{A}$  путем минимизации функционала

$$J(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^m \rho_i (\mathbf{k}_i - \mathbf{A}\mathbf{s}_i)^T (\mathbf{k}_i - \mathbf{A}\mathbf{s}_i), \quad (13)$$

где  $\rho_i$  — положительные весовые множители, которые определяются как величины, обратные дисперсии погрешности измерений.

Решение этой задачи на множестве кватернионов  $\mathbf{q}$  (определяющих, согласно (8), матрицу ориентации  $\mathbf{A}$ ) получено в работах [6–8] (в [7, 8] рассматривается также случай  $m \geq 1$  при наличии априорной оценки). Процедура отыскания стационарных значений функционала (13) при ограничении

$$\mathbf{q}^T \mathbf{q} = 1 \quad (14)$$

приводит к уравнению

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \gamma\mathbf{q}, \quad (15)$$

где

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^m \rho_i \Psi(\mathbf{s}_i) \Phi(\mathbf{b}_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{v} & \mathbf{p}^T \\ \mathbf{p} & \mathbf{C} - \mathbf{v}\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^m \rho_i \mathbf{k}_i^T \mathbf{s}_i, \quad \mathbf{p} = \sum_{i=1}^m \rho_i (\mathbf{k}_i \times \mathbf{s}_i), \quad \mathbf{C} = \sum_{i=1}^m \rho_i (\mathbf{k}_i \mathbf{s}_i^T + \mathbf{s}_i \mathbf{k}_i^T)$$

(в (16) и далее при использовании матриц вида (11) как функций трехмерного вектора  $\mathbf{s}$  подразумевается кватернион с нулевой скалярной частью и равной  $\mathbf{s}$

векторной). Кватернион  $\mathbf{q}$ , обеспечивающий минимальное значение функционала (13), — это нормированный собственный вектор, который отвечает максимальному собственному значению симметрической матрицы  $\mathbf{K}$ .

При измерении двух векторов искомым собственным вектором матрицы  $\mathbf{K}$  может быть найден как линейная комбинация двух собственных векторов, которые отвечают двукратному максимальному собственному значению матрицы  $\mathbf{K}^2$  [8]. Так, полагая

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}_2, \quad \mathbf{s} = \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2, \quad d = |\mathbf{k}| \cdot |\mathbf{s}| + \mathbf{s}^T \mathbf{k}, \quad (17)$$

для этих собственных векторов (если  $d \neq 0$ ) имеем

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} d \\ \mathbf{k} \times \mathbf{s} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ |\mathbf{s}| \cdot \mathbf{k} + |\mathbf{k}| \cdot \mathbf{s} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

а для собственного вектора, отвечающего максимальному собственному значению матрицы  $\mathbf{K}$ , получаем [8]

$$\mathbf{u} = (a + a_1 + a_2) \mathbf{u}_1 + (a - a_1 + a_2) \mathbf{u}_2, \quad (19)$$

где  $a_1 = \mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_\rho$ ,  $a_2 = \mathbf{u}_2^T \mathbf{u}_\rho$ ,  $a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ ,

$$\mathbf{u}_\rho = \rho_1 \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1^T \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{k}_1 \times \mathbf{s}_1 \end{bmatrix} + \rho_2 \begin{bmatrix} \mathbf{s}_2^T \mathbf{k}_2 \\ \mathbf{k}_2 \times \mathbf{s}_2 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Следовательно, искомым кватернион определяется соотношением

$$\mathbf{q} = \mathbf{u} / |\mathbf{u}|. \quad (21)$$

Если  $d = 0$ , а также при малом абсолютном значении этой величины в уравнении (15) следует выполнить замену  $\mathbf{q} = \Phi(\mathbf{q}_{s1}) \bar{\mathbf{q}}$ , где  $\mathbf{q}_{s1}$  — кватернион, отвечающий повороту на угол  $\pi$  вокруг вектора  $\mathbf{s}_1$ .

Отметим, что аналитическое решение (15) задачи Вахба найдено благодаря тому, что функционал (13) представляет собой квадратичную форму кватерниона  $\mathbf{q}$ . Эта форма в обобщенной задаче Вахба оказывается биквадратной.

**Обобщенная задача Вахба.** Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^m (\mathbf{k}_i - \mathbf{A} \mathbf{s}_i)^T \mathbf{R}_i (\mathbf{k}_i - \mathbf{A} \mathbf{s}_i), \quad (22)$$

где квадратичная форма погрешностей измерений задается положительно определенными матрицами  $\mathbf{R}_i$ . Решение этой задачи сводится, в силу ограничения (14), к отысканию стационарных значений функционала

$$J_0 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^m (\mathbf{k}_i - \mathbf{A} \mathbf{s}_i)^T \mathbf{R}_i (\mathbf{k}_i - \mathbf{A} \mathbf{s}_i) + \frac{1}{2} \lambda \mathbf{q}^T \mathbf{q}, \quad (23)$$

где  $\lambda$  — множитель Лагранжа.

Пусть

$$\hat{\mathbf{k}}_i = \mathbf{A}(\mathbf{q}) \mathbf{s}_i. \quad (24)$$

Тогда, учитывая, что  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\mathbf{s}_i^T \mathbf{A}^T(\mathbf{q})) = 2\Psi(\mathbf{s}_i)\Gamma(\mathbf{q}) = -2\Psi^T(\mathbf{q})\Gamma(\hat{\mathbf{k}}_i)$ , где

$$\Gamma(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -\mathbf{n}^T \\ \alpha \mathbf{I} + \mathbf{V}(\mathbf{n}) \end{bmatrix}, \quad \Gamma(\hat{\mathbf{k}}) = \begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{k}}^T \\ \mathbf{V}(\hat{\mathbf{k}}) \end{bmatrix},$$

из равенства нулю первой вариации функционала (23) получаем уравнение

$$\lambda \mathbf{q} = -\Psi^T(\mathbf{q}) \sum_{i=1}^m \Gamma(\hat{\mathbf{k}}_i) \mathbf{R}_i(\mathbf{k}_i - \hat{\mathbf{k}}_i), \quad (25)$$

которое определяет необходимые условия существования стационарного значения функционала (22). Так, в результате умножения уравнения (25) слева на матрицу  $\Psi(\mathbf{q})$  из первой его строки получаем значение множителя Лагранжа

$$\lambda = \sum_{i=1}^m \hat{\mathbf{k}}_i^T \mathbf{R}_i(\mathbf{k}_i - \hat{\mathbf{k}}_i), \quad (26)$$

а три оставшиеся строки определяют векторное уравнение

$$\sum_{i=1}^m \mathbf{V}(\hat{\mathbf{k}}_i) \mathbf{R}_i(\mathbf{k}_i - \hat{\mathbf{k}}_i) = 0, \quad (27)$$

которому удовлетворяет искомый кватернион  $\mathbf{q}$  и соответственно матрица  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{q})$ .

Следует отметить, что уравнение (25) может быть записано в виде уравнения (15), полученного при решении стандартной задачи Вахба. Однако матрица  $\mathbf{K}$  в этом случае оказывается функцией кватерниона  $\mathbf{q}$ , а искомый кватернион — собственным вектором, который может не соответствовать максимальному собственному значению этой матрицы. Поэтому определение этого кватерниона возможно, по-видимому, только путем применения итерационного алгоритма.

**Итерационный алгоритм.** Пусть  $\hat{\mathbf{q}}_k$  и  $\hat{\mathbf{A}}_k = \mathbf{A}(\hat{\mathbf{q}}_k)$  — оценки кватерниона  $\mathbf{q}$  и матрицы  $\mathbf{A}$ , которые дает  $k$ -й шаг итерационной процедуры. Тогда значения этих величин на  $(k+1)$ -м шаге будем находить в соответствии с (9) и (10) следующим образом:

$$\hat{\mathbf{q}}_{k+1} = \Phi(\delta \mathbf{q}_k) \hat{\mathbf{q}}_k, \quad \hat{\mathbf{A}}_{k+1} = \delta \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{A}}_k, \quad (28)$$

где

$$\delta \mathbf{q}_k = \begin{bmatrix} \cos \frac{\delta \varphi_k}{2} \\ \sin \frac{\delta \varphi_k}{2} \mathbf{e}_k \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \delta \theta_k \end{bmatrix}, \quad \delta \mathbf{A}_k = \mathbf{I} - \mathbf{V}(\delta \theta_k), \quad (29)$$

а  $\delta \theta_k = 2 \operatorname{tg} \frac{\delta \varphi_k}{2} \mathbf{e}_k$  — вектор малого поворота.

Обозначая

$$\hat{\mathbf{k}}_{i,k} = \hat{\mathbf{A}}_k \mathbf{s}_i, \quad \delta \mathbf{k}_{i,k} = \mathbf{R}_i(\mathbf{k}_i - \hat{\mathbf{k}}_{i,k}) \quad (30)$$

и используя соотношения (28) и (29), получаем

$$\hat{\mathbf{k}}_{i,k+1} = \hat{\mathbf{k}}_{i,k} + \mathbf{V}(\hat{\mathbf{k}}_{i,k})\delta\theta_k, \quad \delta\mathbf{k}_{i,k+1} = \delta\mathbf{k}_{i,k} - \mathbf{R}_i \mathbf{V}(\hat{\mathbf{k}}_{i,k})\delta\theta_k. \quad (31)$$

В соответствии с необходимым условием оптимальности (27) потребуем выполнения равенства

$$\sum_{i=1}^m \mathbf{V}(\hat{\mathbf{k}}_{i,k+1}) \delta\mathbf{k}_{i,k+1} = 0. \quad (32)$$

Подстановка значений (31) в (32) с учетом величин только первого порядка малости дает уравнение для определения вектора малого поворота  $\delta\theta_k$ :

$$\sum_{i=1}^m (\mathbf{V}(\hat{\mathbf{k}}_{i,k}) \mathbf{R}_i \mathbf{V}(\hat{\mathbf{k}}_{i,k}) + \mathbf{V}(\delta\mathbf{k}_{i,k}) \mathbf{V}(\hat{\mathbf{k}}_{i,k})) \delta\theta_k = \sum_{i=1}^m \mathbf{V}(\hat{\mathbf{k}}_{i,k}) \delta\mathbf{k}_{i,k}. \quad (33)$$

Выбор начального приближения для этой итерационной процедуры может оказать существенное влияние на скорость ее сходимости. Так, например, при рассмотрении стандартной задачи Вахба все четыре собственных вектора матрицы (16) представляют собой решение уравнения (27). При этом один из них соответствует минимуму вариационной задачи, второй — максимуму, а два оставшихся — седловым точкам. Поэтому при выборе первого приближения близкого к неоптимальному значению собственного вектора матрицы  $\mathbf{K}$  (или равному ему) наблюдается медленная сходимость (или заикливание) итерационного процесса. В связи с этим первое приближение  $\hat{\mathbf{q}}_1$  для предложенного итерационного процесса найдем при помощи конечного алгоритма (17)–(21) решения стандартной задачи Вахба, используя результаты наблюдений только двух векторов и полагая в функционале (13) весовые константы  $\rho_1$  и  $\rho_2$  равными соответственно следу матриц  $\mathbf{R}_1$  и  $\mathbf{R}_2$ .

**Интегрированная навигационная система.** Рассмотрим один из подходов к использованию GPS для коррекции инерциальной навигационной системы. Канал определения ориентации в этой системе предполагает интегрирование кинематического уравнения с использованием показаний датчиков угловых скоростей (вектор угловой скорости  $\tilde{\omega} = \omega + \Delta\omega$ , где  $\omega$  — истинное значение этого вектора,  $\Delta\omega$  — вектор погрешностей измерений). Так, ориентацию объекта относительно инерциальной системы координат определяем путем интегрирования корректируемого кинематического уравнения [9]

$$\dot{\mathbf{q}}_* = \Phi(\omega_*)\mathbf{q}_* / 2, \quad (34)$$

где  $\omega_* = \tilde{\omega} + \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}$  — вектор коррекции.

Пусть жестко связанный с Землей ортогональный базис определяет навигационную систему координат. Тогда кватернион  $\mathbf{q}_e$  и матрица преобразования координат  $\mathbf{A}_e = \mathbf{A}(\mathbf{q}_e)$ , которые задают ориентацию этой системы координат относительно инерциальной, являются решениями соответствующих кинематических уравнений

$$\dot{\mathbf{q}}_e = \Phi(\omega_e)\mathbf{q}_e / 2, \quad \dot{\mathbf{A}}_e = -\mathbf{V}(\omega_e)\mathbf{A}_e, \quad (35)$$

где  $\omega_e = \text{const}$  — вектор угловой скорости Земли в проекциях на оси навигационной системы координат. При этом кватернионы  $q_*$  и  $q_e$  удовлетворяют взаимосвязанным соотношениям

$$q_* = \Phi(\hat{q})q_e \Leftrightarrow \hat{q} = \Psi(q_e)q_*, \quad (36)$$

где  $\hat{q}$  — оценка кватерниона  $q$ , определяющего ориентацию связанной с объектом системы координат относительно навигационной. Эта оценка, согласно (34)–(36), представляет собой решение уравнения

$$\dot{\hat{q}} = [\Phi(\omega_*) + \Psi(\omega_e)]\hat{q} / 2. \quad (37)$$

Далее будем задавать ошибку оценки определения ориентации кватернионом  $\delta q$  или матрицей рассогласования  $\delta A$  соотношениями

$$q = \Phi(\hat{q})\delta q, \quad A = \hat{A}\delta A, \quad (38)$$

определяющими связь между истинными  $q$ ,  $A = A(q)$  и вычисленными  $\hat{q}$ ,  $\hat{A} = A(\hat{q})$  значениями величин. В соотношениях (38) кватернион  $\delta q$  — решение полученного в соответствии с (37), (38) уравнения

$$\delta \dot{q} = [\Phi(\omega_e) + \Psi(\omega_e) + \Phi(\hat{A}^T(\omega - \omega_*))]\delta q / 2, \quad (39)$$

а матрица  $\delta A$  задается в первом приближении равенством

$$\delta A = I - V(\delta\theta), \quad (40)$$

где  $\delta\theta$  — вектор ошибки оценки (вектор малого поворота), который, как следует из (39), является решением дифференциального уравнения

$$\delta \dot{\theta} = -V(\omega_e)\delta\theta - \hat{A}^T u - \hat{A}^T \Delta\omega. \quad (41)$$

При реализации процесса наблюдения (34)–(36) вектор коррекции в (34), обеспечивающий устойчивость определения оценок ориентации, будем задавать коллинеарным вектору ошибки оценки (в проекциях на оси связанной с объектом системы координат) в виде (см. [8])

$$u = a\hat{A}\delta\theta, \quad (42)$$

где  $a$  — положительная константа. Для отыскания ошибки оценки  $\delta\theta$  воспользуемся показаниями спутниковой навигационной системы  $\Delta\phi_{ij}$ .

Пусть информация от GPS доступна в дискретные моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_N$  и  $\hat{A}_k = A(\hat{q}_k)$ , где  $\hat{q}_k = \hat{q}(t_k)$  — кватернион, вычисленный в соответствии с (36) и результатом интегрирования уравнения (34). Интегрирование этого уравнения на интервале времени  $[t_k, t_{k+1}]$  будем выполнять по показаниям датчиков угловых скоростей, полагая в (42)  $\delta\theta = \delta\hat{\theta}_k$ , где  $\delta\hat{\theta}_k$  — оценка вектора малого поворота в момент времени  $t_k$ , полученная на основании информа-



делирование выполнялось на кратком интервале времени, изменение компонент этих ортов вследствие вращения Земли и орбитального движения спутников не учитывалось) заданы ортами

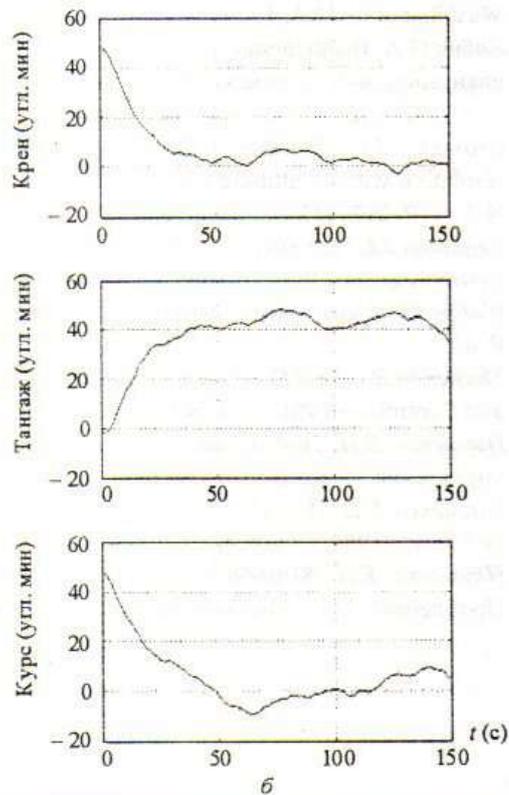
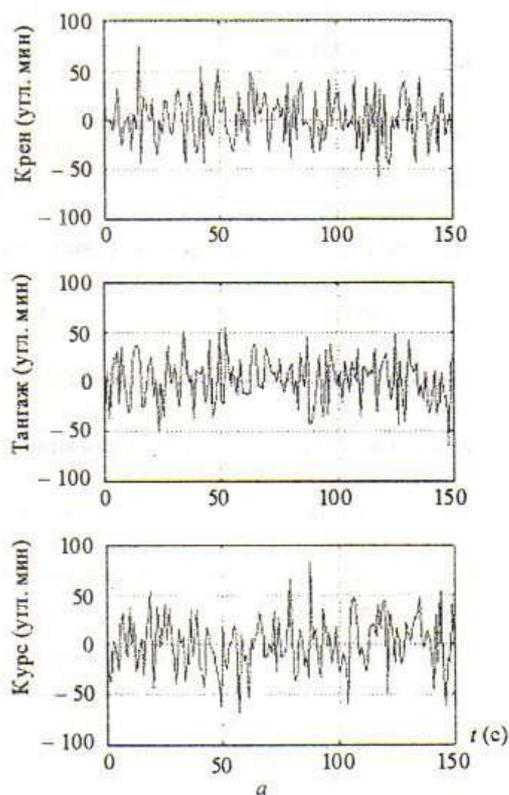
$$\mathbf{s}_1 = [1 \ 1 \ 1]^T / \sqrt{3}, \quad \mathbf{s}_2 = [-1 \ 0 \ 1]^T / \sqrt{2}, \quad \mathbf{s}_3 = [0 \ -1 \ 1]^T / \sqrt{2}.$$

Вектор угловой скорости Земли (показания датчиков угловой скорости) в проекциях на оси связанной с объектом системы координат формируется с частотой 50 Гц. С этой же частотой выполнялось интегрирование уравнений наблюдателя (34). Проекции базовых векторов на линии визирования (целые числа волн  $n_{ij}$  не вычислялись) и показания датчиков угловой скорости моделировались со случайными погрешностями. Эти погрешности формировались как гауссовы процессы с нулевыми средними и среднеквадратическими отклонениями  $\sigma_b = 10^{-2}$  и  $\sigma_\omega = 10^{-5}$ . При построении вектора коррекции (42) предполагалось, что  $a = 0,1$ , а при численной реализации дискретного фильтра Калмана матрицы  $\mathbf{M}_k$  и  $\mathbf{E}_k$  задавались диагональными с постоянными элементами, равными соответственно  $1 \cdot 10^{-4}$  и  $1 \cdot 10^{-2}$ .

На рисунке приведены полученные при моделировании типичные результаты для величин ошибок определения ориентации в самолетных углах (крен, тангаж, курс) в двух случаях:

а) определение в дискретные моменты времени локальной ориентации объекта с помощью только спутниковой информации путем минимизации функционала (5) с помощью итерационной процедуры (28)–(33) (ошибки МНК (GPS));

б) интегрирование уравнений наблюдателя (34) с использованием коррекции (42) и построением оценок вектора малого поворота  $\delta\hat{\theta}$  дискретным фильтром Калмана (ошибки фильтрации).



Заметим, что моделируемые погрешности, обусловленные помехами обработки сигналов спутников, приводят к ошибке определения ориентации порядка  $0,5^\circ$ . Численное моделирование показало, что применение итерационного алгоритма (28)–(33) на каждом шаге интервала дискретизации требует не более четырех итераций для достижения точности  $|\delta\theta_4| < 10^{-15}$ .

*К.И. Науменко*

## ВИЗНАЧЕННЯ ОРІЄНТАЦІЇ ЗА ДОПОМОГОЮ СУПУТНИКОВОЇ НАВІГАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ GPS

Пропонується новий метод розв'язання задачі визначення орієнтації за допомогою супутникової радіонавігаційної системи GPS (Global Positioning System). Мінімізація загальноприйнятої цільової функції зводиться до розв'язання узагальненої задачі Вахба. Для відшукування кватерніона, який визначає орієнтацію об'єкта, пропонується швидкозбіжний ітераційний алгоритм. Застосування методу ілюструється результатами моделювання.

*C.I. Naumenko*

## ATTITUDE DETERMINATION USING GLOBAL POSITIONING SYSTEM GPS

A novel technique for solving a problem of attitude determination of a vehicle using GPS measurements is presented. The minimization of the general objective function is reduced to the vectorized measurement problem which solution is based on extended Wahba's problem. An iterative algorithm for finding the optimal quaternion is derived and demonstrated through numerical example.

1. *Cohen C.E.*, Attitude Determination // The Global Positioning System: theory and application, II. Washington : AIAA, 1996. — P. 519–538.
2. *Бабич О.А.* Вычисление углового положения самолета по сигналам от спутниковой радионавигационной системы // Известия РАН. Теория и системы управления. — 1996. — № 4. — С. 152–162.
3. *Crassidis J.L., Markley F.L., Lightsey E.G.* Global Positioning System integer ambiguity resolution without attitude knowledge // J. of Guidance, Control and Dynamics. — 1999. — 22, N 2. — P. 212–218.
4. *Crassidis J.L., Markley F.L.* New algorithm for attitude determination using Global Positioning System signals // Ibid. — 1997. — 20, N 5. — P. 891–896.
5. *Wahba G.* A least squares estimate of spacecraft attitude // SIAM Review. — 1965. — 7, N 3. — P. 409.
6. *Shuster M.D., Oh S.D.* Three-axis attitude determination from vector observation // J. of Guidance and Control. — 1981. — 4, N 1. — P. 70–77.
7. *Науменко К.И.* Локальный метод определения ориентации твердого тела // Навигация и управление. — Киев : Ин-т математики АН УССР, 1982. — С. 121–128.
8. *Науменко К.И.* Наблюдение и управление движением динамических систем. — Киев : Наук. думка, 1984. — 208 с.
9. *Науменко К.И.* Коррекция бесплатформенной инерциальной навигационной системы // Проблемы управления и информатики. — 1996. — № 6. — С. 123–134.

Получено 14.11.2002  
После доработки 27.06.2003

1. *Cohen C.E.*, Attitude Determination // The Global Positioning System: theory and application, **II**. Washington : AIAA, 1996. — P. 519–538.
2. *Бабич О.А.* Вычисление углового положения самолета по сигналам от спутниковой радионавигационной системы // Известия РАН. Теория и системы управления. — 1996. — № 4. — С. 152–162.
3. *Crassidis J.L., Markley F.L., Lightsey E.G.* Global Positioning System integer ambiguity resolution without attitude knowledge // J. of Guidance, Control and Dynamics. — 1999. — **22**, N 2. — P. 212–218.
4. *Crassidis J.L., Markley F.L.* New algorithm for attitude determination using Global Positioning System signals // Ibid. — 1997. — **20**, N 5. — P. 891–896.
5. *Wahba G.* A least squares estimate of spacecraft attitude // SIAM Review. — 1965. — **7**, N 3. — P. 409.
6. *Shuster M.D., Oh S.D.* Three-axis attitude determination from vector observation // J. of Guidance and Control. — 1981. — **4**, N 1. — P. 70–77.
7. *Науменко К.И.* Локальный метод определения ориентации твердого тела // Навигация и управление. — Киев : Ин-т математики АН УССР, 1982. — С. 121–128.
8. *Науменко К.И.* Наблюдение и управление движением динамических систем. — Киев : Наук. думка, 1984. — 208 с.
9. *Науменко К.И.* Коррекция бесплатформенной инерциальной навигационной системы // Проблемы управления и информатики. — 1996. — № 6. — С. 123–134.

*Получено 14.11.2002  
После доработки 27.06.2003*