УДК 517.925.51

Ф.Г. Гаращенко, В.В. Пичкур

СВОЙСТВА ОПТИМАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ ВНЕШНЕЙ ПРАКТИЧЕСКОЙ СЛАБОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

При решении прикладных задач возникает проблема достижения системой определенного качества функционирования. В частности, это может означать следующее: необходимо, чтобы фазовые координаты системы в некоторый момент из фиксированного интервала времени попали в заданные ограничения. Если при этом на правую часть системы оказывают влияние постоянно действующие возмущения, имеет место ограниченная неопределенность, то приходим к задаче анализа внешней практической устойчивости решения дифференциального включения. Такие задачи мало изучены. Для динамических систем на основе функций Ляпунова получены только достаточные условия внешней практической устойчивости [1], в работах [2, 3] исследуются свойства оптимального по включению множества внешней практической устойчивости, получены критерии для линейных систем, строятся численные методы нахождения максимальных областей внешней устойчивости.

В данной работе для задачи внешней практической слабой устойчивости решения дифференциального включения получены необходимые и достаточные условия принадлежности точки границе максимальной области практической устойчивости. Для линейного включения при выпуклых фазовых ограничениях построены соответствующие критерии. Найдены оптимальные функции деформации для конкретных видов фазовых ограничений.

Постановка задачи. В данной статье используются следующие обозначения: $\| x \| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$, $x = (x_1\, x_2 \dots x_n)^{\mathrm{T}}$; $S_r(a) = \{x \in R^n : \| x - a \| = r\}$, $S = S_1(0)$ — единичная сфера, $K_r(a) = \{x \in R^n : \| x - a \| \le r\}$; $\operatorname{int} A$, ∂A, $A^{\varepsilon} = \{x : \| x - a \| \le \varepsilon,\ a \in A\}$ — соответственно множество внутренних точек, граница и ε-расширение множества $A \subset R^n$; $d(A) = \sup\limits_{a \in A\, b \in A} \| a - b \|$ — диаметр, $c(A, \psi)$ — опорная функция множества $A \subset R^n$, $\psi \in S$; $\beta(A, B) = \sup\limits_{a \in A} \inf\limits_{b \in B} \| a - b \|$ — полуметрика Хаусдорфа, $\alpha(A, B) = \min\{\beta(A, B), \beta(B, A)\}$ — метрика Хаусдорфа, $\rho(A, B) = \inf\limits_{\substack{a \in A \\ b \in B}} \| a - b \|$ — метрика Евклида, $A \subset R^n$, $B \subset R^n$ [4].

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\frac{dx}{dt} \in F(x, t), \qquad (1)$$

где $x \in R^n$ — n-мерный вектор фазовых координат, $(x, t) \in D$, D — замкнутая область в R^{n+1}. Многозначное отображение $F:(x, t) \mapsto F(x, t)$ строгое компактозначное выпуклозначное непрерывное сверху на D, $t \in [t_0, T]$. Кроме того, существует непрерывная положительная функция $L(t)$ такая, что $\alpha(F(u, t), F(v, t)) \le L(t) \| u - v \|$, $(u, t) \in D$, $(v, t) \in D$. Предположим, что решения (1) можно продолжить на отрезок, содержащий интервал времени $[t_0, T]$, $X(t, x_0, t_0)$ — множество решений (1), которое отвечает начальному условию $x(t_0) = x_0$, $X(x_0): t \mapsto X(t, x_0, t_0)$, $x = x(t, x_0, t_0)$ — некоторое решение включения (1) при условии $x(t_0) = x_0$, $t \in [t_0, T]$. Многозначное отображение $\Phi : t \mapsto \Phi(t)$ задает фазовые ограничения, его образ $\Phi(t) \subset R^n$ — компакт при $t \in [t_0, T]$ и график $\Gamma(\Phi)$ этой функции принадлежит области D, $0 \in \operatorname{int} \Phi(t)$, $0 \in F(0, t)$, $t \in [t_0, T]$, $E_0 \subseteq R^n$.

Определение 1. Нулевое решение дифференциального включения (1) называется внешне $\{E_0, \Phi(t), t_0, T\}$-слабоустойчивым, если для произвольной точки $x_0 \in E_0$ существует момент $t \in [t_0, T]$, для которого $X(t, x_0, t_0) \cap \Phi(t) \ne \varnothing$.

Определение 2. Множество $E_* \subseteq \Phi(t_0)$ называется максимальным по включению множеством внешней практической слабой устойчивости решения $x(t) = 0$ включения (1) при фазовых ограничениях $\Phi(t)$ на интервале $t \in [t_0, T]$, если нулевое решение внешне $\{E_*, \Phi(t), t_0, T\}$-слабоустойчивое и для всех множеств $E_0 \subseteq R^n$, для которых имеет место внешняя $\{E_0, \Phi(t), t_0, T\}$-слабая устойчивость решения $x(t) = 0$ включения (1), выполняется $E_0 \subseteq E_*$.

Таким образом, если $x_0 \in E_*$, то $\Gamma(X(x_0)) \cap \Gamma(\Phi) \ne \varnothing$. Исследуем свойства максимальных по включению множеств внешней практической слабой устойчивости для дифференциальных включений.

Вспомогательные утверждения

Лемма 1. Пусть $\xi : u \mapsto \xi(u)$, $\xi(u) \subset R^n$, $u \in D$, $D \subset R^m$ — область, $\operatorname{dom} \xi = \{u \in D : \xi(u) \ne \varnothing\} \ne \varnothing$, $I \subset R^n$ — компакт и существует $r > 0$, для которого $(\xi(u))^r \subset I$, $u \in D$. Рассмотрим отображение $\eta : u \mapsto \eta(u)$ такое, что $\eta(u) = I / \xi(u)$, $u \in D$. Тогда если функция ξ полунепрерывна снизу (сверху), то η полунепрерывна сверху (снизу).

Доказательство. Пусть ξ — полунепрерывное снизу отображение. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\xi(u) \subseteq (\xi(u + h))^{\varepsilon}$ как только $\| h \| \le \delta$. Выберем $\varepsilon \in (0, r)$ и зафиксируем $x \in \eta(u + h)$. Тогда $x \in I / \xi(u + h)$. Таким образом, $x \in I$ и $x \notin \xi(u + h)$. Поскольку $\xi(u) \subseteq (\xi(u + h))^{\varepsilon}$, то существует $p \in x^{\varepsilon}$ такое, что $p \notin \xi(u)$ и $p \in I^{\varepsilon}$. Итак, $p \in I^{\varepsilon} / \xi(u)$, но $I^{\varepsilon} / \xi(u) = (I / \xi(u)) \cup (I^{\varepsilon} / I)$. Если $p \in I / \xi(u)$, то $x \in (I / \xi(u))^{\varepsilon}$. Это означает, что

ISSN 0572-2691

$\eta(u+h) \subseteq (\eta(u))^{\varepsilon}$, $\| h \| \le \delta$. В случае $p \in I^{\varepsilon} / I$ выполняется $p \notin (\xi(u))^{r}$. Отсюда $x \notin \xi(u)$, так как $\varepsilon \in (0, r)$ и $x \in p^{\varepsilon}$. Поэтому $x \in I / \xi(u)$ и $x \in (I / \xi(u))^{\varepsilon}$. Таким образом, $\eta(u+h) \subseteq (\eta(u))^{\varepsilon}$, $\| h \| \le \delta$. Аналогично доказывается, что из полунепрерывности сверху отображения ξ следует полунепрерывность снизу отображения η.

Лемма доказана.

Следствие 1. Если в условиях леммы 1 отображение ξ непрерывно, то η — непрерывное отображение.

Следствие 2. Пусть $\xi : u \mapsto \xi(u)$, $\xi(u) \subset R^{n}$ — открытое множество, $u \in D$, $D \subset R^{m}$ — область, $\operatorname{dom} \xi \ne \varnothing$, $I \subset R^{n}$ — компакт и для $r > 0$ выполняется $(\xi(u))^{r} \subset I$, $u \in D$. Рассмотрим $\eta : u \mapsto \eta(u)$, $\eta(u) = I / \xi(u)$, $u \in D$. Тогда если функция ξ полунепрерывна снизу (сверху), то η — полунепрерывное сверху (снизу) компактозначное отображение. Если же ξ — непрерывное отображение, то η непрерывно и компактозначно.

Лемма 2. Пусть задано многозначное компактозначное отображение $\xi : u \mapsto \xi(u)$, $\xi(u) \subset R^{n}$, $u \in [a, b]$, образ которого является замыканием открытого множества. Если трубка $\Delta(\xi)$ — компакт, то отображение ξ непрерывно сверху.

Доказательство. Построим новое компактозначное отображение $\pi : u \mapsto \pi(u)$ такое, что $\pi(u) = (\Delta(\xi))_{u}$, $u \in [a, b]$, где $(\Delta(\xi))_{v}$ — пересечение множества $\Delta(\xi)$ гиперплоскостью $v = u$. По теореме о замкнутом графике отображения π полунепрерывно сверху на $[a, b]$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $|h| < \delta$, то $\pi(u+h) = (\pi(u))^{\varepsilon}$. Поскольку $(\pi(u))^{\varepsilon} \subset (\xi(u))^{\varepsilon}$ и $\partial\xi(u+h) \subseteq \pi(u+h)$, то получаем $\partial\xi(u+h) \subseteq (\xi(u))^{\varepsilon}$, $u \in [a, b]$. Тогда $\xi(u+h) \subseteq (\xi(u))^{\varepsilon}$.

Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $\xi : u \mapsto \xi(u)$ — многозначное компактозначное непрерывное сверху отображение, $\xi(u) \subset R^{n}$, $u \in U$, U — замкнутая область в R^{m}, $A \subset R^{n}$ — компакт и множество $B = \{u \in U : \xi(u) \cap A \ne \varnothing\}$ непустое. Тогда B — замкнутое множество.

Доказательство. Из полунепрерывности сверху функции ξ следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\xi(v) \subseteq (\xi(u))^{\varepsilon}$ как только $v \in u^{\delta}$. Если взять любую последовательность $u_{k} \to u$, $\xi(u_{k}) \cap A \ne \varnothing$, $k = 1, 2, \ldots$, тогда можно указать номер k_{0} такой, что для $k > k_{0}$ имеет место $u_{k} \in u^{\delta}$ и $\xi(u_{k}) \subseteq (\xi(u))^{\varepsilon}$. Тогда $(\xi(u))^{\varepsilon} \cap A \ne \varnothing$. Отображение $\varphi : \varepsilon \mapsto (\xi(u))^{\varepsilon}$ непрерывно, $\varepsilon \ge 0$. Поэтому функция $g(\varepsilon) = \rho((\xi(u))^{\varepsilon}, A)$ непрерывна, $\varepsilon \ge 0$. Возьмем последовательность $\varepsilon_{k} \to 0$, $\varepsilon_{k} > 0$, при этом $g(\varepsilon_{k}) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Таким образом, $g(0) = 0$ и $\xi(u) \cap A \ne \varnothing$. Это означает замкнутость множества B.

Лемма доказана.

Сужение множества. Пусть $A \subset R^n$, $\operatorname{int} A \neq \varnothing$.

Определение 3. ε-сужением множества A называется множество $A^{\langle\varepsilon\rangle} \subset A$ всех точек $a \in A$ таких, что $a^{\varepsilon} \subseteq A$.

Лемма 4. Предположим, что множество A является замкнутым. Тогда $A^{\langle\varepsilon\rangle} = A / R(\varepsilon)$, $R(\varepsilon) = \bigcup\limits_{x \in \partial A} \operatorname{int} x^{\varepsilon}$.

Доказательство. Выберем произвольную точку $y \in A^{\langle\varepsilon\rangle}$. По определению $y^{\varepsilon} \subseteq A$. Это означает, что $\min\limits_{x \in \partial A} \| x - y \| \geq \varepsilon$, т.е. $y \notin R(A)$. И обратно, если $y \in A / R(A)$, то $y \in A$ и $\min\limits_{x \in \partial A} \| x - y \| \geq \varepsilon$, т.е. $y^{\varepsilon} \subseteq A$, поэтому $y \in A^{\langle\varepsilon\rangle}$.

Лемма доказана.

Оказывается, что не обязательно $A^{\langle\varepsilon\rangle} = A \,/ \bigcup\limits_{x \in \partial A} \operatorname{int}(\partial A)^{\varepsilon}$. Рассмотрим следующий пример. Пусть $A = K_{\varepsilon}(0)$. По определению $A^{\langle\varepsilon\rangle} = \{0\}$. С другой стороны, $(\partial A)^{\varepsilon} = K_{2\varepsilon}(0)$ и $0 \in \operatorname{int}(\partial A)^{\varepsilon}$.

Из определения следует, что $(A^{\langle\varepsilon\rangle})^{\varepsilon} \subseteq A$, но не всегда $(A^{\langle\varepsilon\rangle})^{\varepsilon} = A$. Действительно, если $A = [-1, 1] \times [-1, 1]$, то $A^{\langle\varepsilon\rangle} = [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon] \times [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$. Например, точка $y = (1, 1)$ не принадлежит $(A^{\langle\varepsilon\rangle})^{\varepsilon}$, так как $\rho(y, A(\varepsilon)) = \sqrt{2}\varepsilon$. Но для ряда случаев равенство $(A^{\langle\varepsilon\rangle})^{\varepsilon} = A$ имеет место. Так если $A = K_1(0)$, то сужение $A^{\langle\varepsilon\rangle} = K_{1-\varepsilon}(0)$, $\varepsilon \in (0, 1)$ и $(A^{\langle\varepsilon\rangle})^{\varepsilon} = K_{1-\varepsilon+\varepsilon}(0) = A$.

Рассмотрим некоторые свойства множества $A^{\langle\varepsilon\rangle}$.

Предположим, что $A^{\langle\varepsilon\rangle} \neq \varnothing$. Если $A \subset R^n$ замкнуто, то $A^{\langle\varepsilon\rangle}$ — замкнутое множество. Действительно, совокупность $R(\varepsilon) = \bigcup\limits_{x \in \partial A} \operatorname{int} x^{\varepsilon}$ открыта как объединение открытых множеств. Поэтому $A / R(\varepsilon)$ — замкнутое множество. Если $A \subset R^n$ — компакт, то существует шар $K_{\delta}(0) \supset A$. Отсюда $K_{\delta}(0) \supset A^{\langle\varepsilon\rangle}$, что означает ограниченность, а значит, и компактность $A^{\langle\varepsilon\rangle}$.

Из определения ε-сужения следует, что $A^{\langle\varepsilon\rangle} = \cup\{B : B^{\varepsilon} \subseteq A\}$. Таким образом, ε-сужение $A^{\langle\varepsilon\rangle}$ — наибольшее множество, ε-расширение которого содержится в A.

Лемма 5. Если $A \subset R^n$ — выпуклое множество, $A^{\langle\varepsilon\rangle} \neq \varnothing$, то $A^{\langle\varepsilon\rangle}$ — выпуклое множество.

Доказательство. Если $A^{\langle\varepsilon\rangle}$ состоит из одной точки, то справедливость леммы очевидна. Возьмем любые две точки $a_i \in A^{\langle\varepsilon\rangle}$, $i = 1, 2$. Обозначим $P = \{a_{\lambda} : \lambda \in [0, 1]\}$, $a_{\lambda} = \lambda a_1 + (1-\lambda) a_2$. По определению $a_i^{\varepsilon} \subset A$, $i = 1, 2$, и $a_1^{\varepsilon} \cup a_2^{\varepsilon} \subset A$. Таким образом, выпуклое замыкание $\operatorname{co}(a_1^{\varepsilon} \cup a_2^{\varepsilon}) \subset A$, так как A — выпуклое множество. Используя свойство выпуклого замыкания ε-расширения [4, 5], запишем

$$\operatorname{co}(a_1^{\varepsilon} \cup a_2^{\varepsilon}) = \operatorname{co}(\{a_1\} \cup \{a_2\})^{\varepsilon} = (\operatorname{co}(\{a_1\} \cup \{a_2\}))^{\varepsilon} = P^{\varepsilon}.$$

 ISSN 0572-2691

Таким образом, $P^{\varepsilon} \subseteq A$, поэтому $P \subseteq A^{\langle\varepsilon\rangle}$.

Лемма доказана.

Лемма 6. Пусть $A \subset R^n$, $\varepsilon_i > 0$, $A^{\langle\varepsilon_i\rangle} \neq \varnothing$, $i = 1, 2$. Если $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, то $A^{\langle\varepsilon_1\rangle} \subset \operatorname{int} A^{\langle\varepsilon_2\rangle}$.

Доказательство. Обозначим $B = A^{\langle\varepsilon_2\rangle}$. Выберем $a \in A^{\langle\varepsilon_1\rangle}$, $a^{\varepsilon_1} = a^{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\varepsilon_2} \subseteq$ $\subseteq A$. По определению $a^{\varepsilon_1-\varepsilon_2} \subseteq A^{\langle\varepsilon_2\rangle} = B$. Таким образом, $a \in B^{\langle\varepsilon_1-\varepsilon_2\rangle}$. Отсюда следует, что $A(\varepsilon_1) \subseteq B^{\langle\varepsilon_1-\varepsilon_2\rangle}$, но $B^{\langle\varepsilon_1-\varepsilon_2\rangle} \subset \operatorname{int} B$, поэтому $A^{\langle\varepsilon_1\rangle} \subset \operatorname{int} A^{\langle\varepsilon_2\rangle}$.

Лемма доказана.

Лемма 7. Пусть $A \subset R^n$ — компакт. Отображение $\Theta : \varepsilon \mapsto A^{\langle\varepsilon\rangle}$ непрерывно в точке $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и компакт $I = A^r$, $r > 2\varepsilon$. Отображение $\varepsilon \mapsto R(\varepsilon)$ непрерывно, $\varepsilon > 0$. Поскольку $A^{\langle\varepsilon\rangle} = A \cap (I / R(\varepsilon))$, то по следствию 2 леммы 1 отображение Θ непрерывно.

Лемма доказана.

Лемма 8. Пусть $A \subset R^n$ — компакт. Тогда $\alpha(\overline{\operatorname{int} A}, A^{\langle\varepsilon\rangle}) \to 0$ при $\varepsilon \to +0$.

Доказательство. Поскольку $A^{\langle\varepsilon\rangle} \subseteq \overline{\operatorname{int} A}$, $\varepsilon > 0$, то $\beta(A^{\langle\varepsilon\rangle}, \overline{\operatorname{int} A}) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$ и $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} \beta(A^{\langle\varepsilon\rangle}, \overline{\operatorname{int} A}) = 0$. С другой стороны, для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует $\delta \in (0, \varepsilon)$ такое, что $\overline{\operatorname{int} A} \subseteq (A^{\langle\delta\rangle})^{\varepsilon}$. Действительно, зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$. Если $x \in \operatorname{int} A$, то для некоторого $\delta \in (0, \varepsilon)$ справедливо включение $x^{\delta} \subset \operatorname{int} A$. По определению сужения множества $x \in A^{\langle\delta\rangle}$, поэтому $x \in (A^{\langle\delta\rangle})^{\varepsilon}$. Если же $x^{\delta} \not\subset \operatorname{int} A$ при $\delta \in (0, \varepsilon)$, то $x \notin A^{\langle\delta\rangle}$ и по лемме 4 $\rho(x, A^{\langle\delta\rangle}) \le \delta$. Отсюда $x \in (A^{\langle\delta\rangle})^{\delta}$ и $x \in (A^{\langle\delta\rangle})^{\varepsilon}$ при условии, что $\varepsilon \ge \delta$.

Лемма доказана.

Следствие. Если в условиях леммы 7 компакт $A = \overline{\operatorname{int} A}$, то отображение $\Theta : \varepsilon \mapsto A^{\langle\varepsilon\rangle}$ непрерывно при $\varepsilon \ge 0$.

Рассмотрим следующий пример. Пусть $A = K_1(0) \cup P$, где $P = [1, 2] \times \{0\}$. Имеет место $\overline{\operatorname{int} A} = K_1(0)$, $\overline{\operatorname{int} A} \neq A$, и условия следствия леммы 8 не выполняются. Тогда $A^{\langle\varepsilon\rangle} = K_{1-\varepsilon}(0)$, $\varepsilon \in (0, 1)$ и в метрике Хаусдорфа $A^{\langle\varepsilon\rangle} \to K_1(0)$, $\varepsilon \to +0$. Таким образом, функция $\Theta : \varepsilon \mapsto A^{\langle\varepsilon\rangle}$ в точке $\varepsilon = 0$ теряет непрерывность слева. Заметим, что отображение $\varepsilon \mapsto R(\varepsilon)$ не является непрерывным слева при $\varepsilon = 0$, так как $R(0) = \varnothing$ и нарушается непрерывность сверху в точке $+0$.

Свойства множества E_*. Предположим, что Φ — полунепрерывное сверху отображение. Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. Множество E_* — компакт.

Доказательство. Поскольку $E_* = \{x_0 \in R^n : \Gamma(X(x_0)) \cap \Gamma(\Phi) \neq \varnothing\}$ и отображение $\Gamma : x_0 \mapsto \Gamma(X(x_0))$ непрерывно, то из леммы 3 следует замкнутость E_*. Докажем ограниченность E_*. Возьмем произвольную точку $z \in E_*$. Тогда существует момент $s \in [t_0, T]$ и решение включения (1) такие, что $u = x(s, z, t_0) \in \Phi(s)$. Кривая $\gamma(t) = x(t, z, t_0)$ — решение задачи Коши $\frac{dx}{dt} \in F(x, t)$, $x(s) = u$, $t \in [t_0, s]$. Множество $X(t_0, 0, s)$ — компакт в R^n. Тогда существует точка $p \in X(t_0, 0, s)$, для которой $\| z - p \| \le \beta(t_0) \| \gamma(s) \|$, т.е. $z \in (X(t_0, 0, s))^{\beta(t_0)\| \gamma(s) \|}$. По теореме о непрерывной зависимости решения дифференциального включения от начальных условий и времени график $\overline{\Gamma}$ отображения $s \mapsto X(t_0, 0, s)$ — компакт, $s \in [t_0, T]$ [5]. Поэтому существуют $a > 0$, $b > 0$, для которых $|\overline{\Gamma}| = \max\{\| w \| : w \in \overline{\Gamma}\} \le a$, $\| \gamma(s) \| \le |\Phi(s)| \le |\Gamma(\Phi)| \le b$. Отсюда следует $\| z \| \le a + \beta(t_0) b$.

Теорема доказана.

Теорема 2. Если $x_0 \in \partial E_*$, то $\Gamma(X(x_0)) \cap \Gamma(\Phi) \ne \varnothing$, причем $X(t, x_0, t_0) \cap \operatorname{int} \Phi(t) = \varnothing$, $t \in [t_0, T]$.

Доказательство. Поскольку $x_0 \in E_*$, то $\Gamma(X(x_0)) \cap \Gamma(\Phi) \ne \varnothing$. Предположим от противного, что существует момент $t \in [t_0, T]$ такой, что $X(t, x_0, t_0) \cap \operatorname{int} \Phi(t) \ne \varnothing$. Тогда можно указать точку $z \in \Gamma(X(x_0)) \cap \Gamma(\Phi)$, $z = (u, t)$, $u \in X(t, x_0, t_0) \cap \operatorname{int} \Phi(t)$. Будем считать, что $t \ne t_0$. Это означает, что существует решение $x(t, x_0, t_0)$ дифференциального включения (1), для которого $u = x(t, x_0, t_0)$. Кроме того, для некоторого $\delta > 0$ имеет место включение $u^\delta \subset \Phi(t)$. Возьмем последовательность $x_k \to x_0$, $x_k \notin E_*$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда существует решение $x(t, x_k, t_0)$ дифференциального включения (1) такое, что

$$\| x(t, x_k, t_0) - x(t, x_0, t_0) \| \le c(t) \| x_k - x_0 \|,$$

где $c(t) > 0$ — абсолютно непрерывная функция [6]. Выберем номер k_0, для которого выполняется $\| x_k - x_0 \| \le \frac{\delta}{c(t)}$ при всех $k > k_0$. Отсюда $x(t, x_k, t_0) \in u^\delta$ и поэтому $x(t, x_k, t_0) \in \operatorname{int} \Phi(t)$, $k > k_0$. Итак, в этом случае предположение ошибочно. Если $z = (u, t_0)$ и $u \in \operatorname{int} \Phi(t_0)$, то $u^\delta \subset \operatorname{int} \Phi(t_0)$ для некоторого $\delta > 0$. Это означает, что $u \in \operatorname{int} E_*$.

Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть образ отображения Φ является замыканием открытого множества. Если $\Gamma(X(x_0)) \cap \Gamma(\Phi) \ne \varnothing$, $X(t, x_0, t_0) \cap \operatorname{int} \Phi(t) = \varnothing$, $t \in [t_0, T]$, то $x_0 \in \partial E_*$.

Доказательство. Построим отображение $\Psi : t \mapsto \Psi(t)$, $t \in [t_0, T]$, следующим образом. График $\Gamma(\Psi) = (R^n \times [t_0, T] / \Gamma(\Phi)) \cup \Delta(\Phi)$ и образ $\Psi(t) = \Gamma(\Psi)\big|_t$, где $\Gamma(\Psi)\big|_\tau$ — сечение множества $\Gamma(\Psi)$ гиперплоскостью $t = \tau$. Определим $r = 2 \max\limits_{t \in [t_0, T]} \max\limits_{z \in X(t, x_0, t_0)} \| z \|$. Построим многозначное отображение $\Xi : t \mapsto \Xi(t)$ так, что $\Xi(t) = \Psi(t) \cap K_r(0)$, $t \in [t_0, T]$. По определению трубки $\Delta(\Xi) = \Delta(\Psi) \cup S_r(0)$ [6].

По лемме 2 отображение Ξ полунепрерывно сверху, так как $\Delta(\Xi)$ — компакт. Рассмотрим задачу внутренней практической устойчивости при фазовых ограничениях, заданных отображением Ξ на интервале $t \in [t_0, T]$, причем оптимальное по включению множество G_* такого вида устойчивости на конечном интервале не пусто, поскольку $x_0 \in G_*$ [6]. Таким образом, $x_0 \in E_* \cap G_*$.

Построим последовательность $\{y_k\}$, $y_k \to x_0$, $y_k \notin E_*$, $k = 1, 2, \ldots$. Это означает, что $x_0 \in \partial E_*$. Для этого определим $d = \inf\limits_{t \in [t_0, T]} d(\Xi(t))$ и обозначим ε-сужение множества $\Xi(t)$ следующим образом: $\Xi(t, \varepsilon) = (\Xi(t))^{\langle \varepsilon \rangle}$, $\varepsilon \in (0, d/2)$. По построению $d > \max\limits_{t \in [t_0, T]} d(X(t, x_0, t_0)) \geq 0$. Обозначим $G_*(\varepsilon)$ максимальное по включению множество практической устойчивости с фазовыми ограничениями $\Xi(t, \varepsilon)$, $t \in [t_0, T]$. Из леммы 6 и следствия леммы 8 следует, что отображение $\varepsilon \mapsto \Xi(t, \varepsilon)$ непрерывно и строго монотонно, поэтому $\varepsilon \mapsto G_*(\varepsilon)$ — строго монотонное и непрерывное отображение. Обозначим $y(\varepsilon) = \arg\min\{\| y - x_0 \| : y \in G_*(\varepsilon)\}$, $\varepsilon_k = \varepsilon / k$, где $\varepsilon \in (0, d/2)$, $k = 1, 2, \ldots$. По построению $y_k \in \operatorname{int} G_*$, $y_k = y(\varepsilon_k) \to x_0$, $k = 1, 2, \ldots$. Имеем $\Gamma(X(y_k)) \subseteq \Gamma(\Xi)$, $\Delta(X(y_k)) \cap \Delta(\Xi) = \varnothing$, $k = 1, 2, \ldots$. Поэтому $\Delta(X(y_k)) \cap \Delta(\Phi) = \varnothing$ и $\Gamma(X(y_k)) \cap \Gamma(\Phi) = \varnothing$, $k = 1, 2, \ldots$. Таким образом, $y_k \notin E_*$, но $y_k \to x_0$, $k = 1, 2, \ldots$. Поскольку $x_0 \in E_*$, то $x_0 \in \partial E_*$.

Теорема доказана.

Следствие. В условиях теорем 2, 3, для того чтобы $x_0 \in \operatorname{int} E_*$, необходимо и достаточно, чтобы существовал момент $t \in [t_0, T]$, для которого $X(t, x_0, t_0) \cap \operatorname{int} \Phi(t) = \varnothing$.

Внешняя практическая слабая устойчивость линейных дифференциальных включений. Пусть задано многозначное отображение $U : t \mapsto U(t)$, которое является строгим компактозначным выпуклозначным и непрерывным, $U(t) \subset R^n$, $t \in [t_0, T]$. Рассмотрим дифференциальное включение

$$\frac{dx}{dt} \in \{A(t)x\} + U(t), \quad t \in [t_0, T]. \tag{2}$$

Здесь $x \in R^n$ — n-мерный вектор фазовых координат, $A(t)$ — $n \times n$-матрица с непрерывными компонентами. Справедлива формула $X(t, x_0, t_0) = \{\Theta(t, t_0) x_0\} + Q(t)$, где $\Theta(t, t_0)$ — фундаментальная матрица системы $\frac{dx}{dt} = A(t)x$, нормированная в точке $t = t_0$, $x(t_0) = x_0$, $Q(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \Theta(t, s) U(s)\, ds$ [7]. Отображение $Q : t \mapsto Q(t)$ выпуклозначно и непрерывно на отрезке $[t_0, T]$ [4]. Проанализируем систему (2) на внешнюю практическую устойчивость в предположении, что отображение Φ, задающее фазовые ограничения, строго и непрерывно, $Q(t) \subset \operatorname{int} \Phi(t)$, $t \in [t_0, T]$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4. Если $\Phi(t)$ — звездный компакт, $0 \in U(t)$, $t \in [t_0, T]$, то множество E_* является звездным.

Доказательство. Возьмем произвольную точку z из множества E_*. По теореме 2 существуют $t \in [t_0, T]$ и $a(t) \in Q(t)$ такие, что $\Theta(t, t_0) z + a(t) \in \Phi(t)$, при этом $a(t) \in \operatorname{int} \Phi(t)$. Тогда $\lambda(\Theta(t, t_0) z + a(t)) \in \Phi(t)$, $\lambda \in [0, 1]$. Но $\lambda a(t) \in Q(t)$, $\lambda \in [0, 1]$, так как $0 \in Q(t)$ и $Q(t)$ — выпуклое множество. Поэтому $\{\Theta(t, t_0)(\lambda z)\} + Q(t) \cap \Phi(t) \neq \varnothing$. Отсюда следует $\lambda z \in E_*$, $\lambda \in [0, 1]$.

Теорема доказана.

Теорема 5. Если $\Phi(t)$ — выпуклый компакт, $t \in [t_0, T]$, то множество E_* является звездным.

Доказательство. Зафиксируем z из E_*. По теореме 2 существует $t \in [t_0, T]$ и $a(t) \in Q(t)$, для которых $\Theta(t, t_0) z + a(t) \in \Phi(t)$. Поскольку $a(t) \in \Phi(t)$, то $\Theta(t, t_0)(\lambda z) + a(t) = \lambda(\Theta(t, t_0) z + a(t)) + (1 - \lambda) a(t) \in \Phi(t)$, $\lambda \in [0, 1]$. Таким образом, $\lambda z \in E_*$, $\lambda \in [0, 1]$.

Теорема доказана.

Из теорем 2, 3 следует, для того чтобы точка $x_0 \in \partial E_*$, необходимо и достаточно существование момента $\tau \in [t_0, T]$ и $z \in \partial X(\tau, x_0, t_0) \cap \partial \Phi(\tau)$, при этом для любого $x \in X(t, x_0, t_0)$ имело бы место $x \notin \operatorname{int} \Phi(t)$, $t \in [t_0, T]$. Исходя из свойств опорной функции [4], для $t \in [t_0, T]$ существует $\psi \in S$ такое, что

$$c(\Phi(t), \psi) \leq x^{\mathrm{T}} \psi \leq c(X(t, x_0, t_0), \psi). \tag{3}$$

Кроме того, существуют $\tau \in [t_0, T]$, $\xi \in S$, для которых

$$z^{\mathrm{T}} \xi = c(X(\tau, x_0, t_0), \xi) = c(\Phi(\tau), \xi). \tag{4}$$

Поскольку $c(X(t, x_0, t_0), \psi) = c(\{\Theta(t, t_0) x_0\}, \psi) + c(Q(t), \psi) = \psi^{\mathrm{T}} \Theta(t, t_0) x_0 + + c(Q(t), \psi)$, то из соотношений (3), (4) получаем, что для каждого $t \in [t_0, T]$ существует $\psi \in S$, для которого

$$\psi^{\mathrm{T}} \Theta(t, t_0) x_0 \geq c(\Phi(t), \psi) - c(Q(t), \psi), \tag{5}$$

при этом найдутся $\tau \in [t_0, T]$, $\xi \in S$ такие, что

$$\xi^{\mathrm{T}} \Theta(\tau, t_0) x_0 = c(\Phi(\tau), \xi) - c(Q(\tau), \xi).$$

Поскольку $Q(t) \subset \operatorname{int} \Phi(t)$, $t \in [t_0, T]$, то $c(\Phi(t), \psi) > c(Q(t), \psi)$, $t \in [t_0, T]$, $\psi \in S$. Таким образом, из (5) получаем

$$\max_{\psi \in S} \frac{\psi^{\mathrm{T}} \Theta(t, t_0) x_0}{c(\Phi(t), \psi) - c(Q(t), \psi)} \geq 1 \tag{6}$$

для всех $t \in [t_0, T]$, причем в (6) имеет место равенство при $t = \tau$. Отсюда справедливо следующее утверждение.

Критерий 1. Для того чтобы точка $x_0 \in \partial E_*$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$\min_{t\in[t_0,T]} \max_{\psi\in S} \frac{\psi^{\mathrm{T}}\Theta(t, t_0)\, x_0}{c(\Phi(t), \psi) - c(Q(t), \psi)} = 1. \tag{7}$$

При этом $\min\limits_{t\in[t_0,T]} \min\limits_{\psi\in S} (c(\Phi(t), \psi) - c(Q(t), \psi)) > 0.$

Следствие. Функция деформации множества E_* имеет вид

$$k_*(\ell) = \max_{t\in[t_0,T]} \min_{\psi\in S} \frac{c(\Phi(t), \psi) - c(Q(t), \psi)}{\psi^{\mathrm{T}}\Theta(t, t_0)\,\ell}, \quad \ell \in S. \tag{8}$$

Тогда в силу теоремы 5

$$E_* = \{x \in R^n : x = k\ell,\ \ k \in [0, k_*(\ell)],\ \ \ell \in S\}.$$

Таким образом, можно предложить следующий численный метод аппроксимации множества E_*.

Алгоритм

Вводим сетки $\alpha \subset [t_0, T]$, $\omega \subset S$.

Шаг 1. Вычисляем фундаментальную матрицу $\Theta(t, t_0)$, как решение задачи Коши $\dfrac{d\Theta(t, t_0)}{dt} = A(t)\,\Theta(t, t_0)$, $\Theta(t_0, t_0) = I$, $t \in \alpha$.

Шаг 2. Для каждого $\ell \in \omega$ перебором по множествам α и ω находим

$$\bar{k}(\ell) = \max_{t\in\alpha} \min_{\psi\in\omega} \frac{c(\Phi(t), \psi) - c(Q(t), \psi)}{\psi^{\mathrm{T}}\Theta(t, t_0)\,\ell}.$$

Шаг 3. Множество

$$\bar{E} = \{x \in R^n : x = k\ell,\ \ k \in [0, \bar{k}(\ell)],\ \ \ell \in \omega\}$$

служит аппроксимацией для E_*.

Замечание. Если отображение Φ кусочно-непрерывно на отрезке $[t_0, T]$, моменты t_0, T не являются точками разрыва, $\Phi(t) = \Phi(t+0) \cup \Phi(t-0)$, $t \in (t_0, T)$, то формула (7) имеет вид

$$\min_{t\in[t_0,T]} \min\left\{ \max_{\psi\in S} \frac{\psi^{\mathrm{T}}\Theta(t, t_0)x_0}{c(\Phi(t+0), \psi) - c(Q(t), \psi)},\ \max_{\psi\in S} \frac{\psi^{\mathrm{T}}\Theta(t, t_0)x_0}{c(\Phi(t-0), \psi) - c(Q(t), \psi)} \right\} = 1,$$

причем $\min\limits_{t\in[t_0,T]} \min\limits_{\psi\in S} (\min\{c(\Phi(t-0), \psi), c(\Phi(t+0), \psi)\} - c(Q(t), \psi)) > 0$. В этом случае функцию деформации (8) перепишем следующим образом:

$$k_*(\ell) = \min_{t\in[t_0,T]} \min\left\{ \max_{\psi\in S} \frac{c(\Phi(t+0), \psi) - c(Q(t), \psi)}{\psi^{\mathrm{T}}\Theta(t, t_0)\ell},\ \max_{\psi\in S} \frac{c(\Phi(t-0), \psi) - c(Q(t), \psi)}{\psi^{\mathrm{T}}\Theta(t, t_0)\ell} \right\}.$$

Построение максимального множества внешней практической слабой устойчивости для конкретных фазовых ограничений. Приведем некоторые формулы вычисления оптимальной функции деформации для конкретных видов отображений Φ.

1. Пусть

$$\Phi(t) = \{ x \in R^n : \max_{k=1,2,\dots,n} |\ell_k^{\mathrm{T}}(t)x| \le 1\},$$

где $\ell_k(t)$ — n-мерные непрерывные вектор-функции, $t \in [t_0, T]$, $k = 1, 2, \dots, n$, $\operatorname{rang}\{\ell_k(t)\} = n$. Тогда $c(\Phi(t), \psi) = \sum_{i=1}^{n} |g_i^{\mathrm{T}}(t)\psi|$. Здесь $g_k(t)$ — n-мерные непрерывные вектор-функции такие, что $(L^{-1}(t))^{\mathrm{T}} = (g_1(t)\ g_2(t) \dots g_n(t))$, где матрица $L(t) = (\ell_1(t)\ \ell_2(t) \dots \ell_n(t))$, $t \in [t_0, T]$, $k = 1, 2, \dots, n$. Имеет место равенство $c(Q(t), \psi) = \int_{t_0}^{t} c(U(s), \Theta^{\mathrm{T}}(t, s)\psi)\, ds$. Построим $c(Q(t), \psi)$ для конкретных видов отображения U. Пусть

$$U(t) = \{u \in R^n : |u_i| \le r_i(t),\ i = 1, 2, \dots, n\}, \tag{9}$$

где функции $r_i(t) > 0$ непрерывны, $t \in [t_0, T]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда $c(U(s), \Theta^{\mathrm{T}}(t, s)\psi) = \sum_{i=1}^{n} r_i(s) |\Theta_i^{\mathrm{T}}(t, s)\psi|$, $\Theta(t, s) = (\Theta_1(t, s)\ \Theta_2(t, s) \dots \Theta_n(t, s))$, $\Theta_i(t, s) \in R^n$, $i = 1, 2, \dots, n$. Таким образом, $c(Q(t), \psi) = \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} r_i(s) |\Theta_i^{\mathrm{T}}(t, s)\psi|\, ds$.

В силу (8)

$$k_*(\ell) = \max_{t \in [t_0, T]} \min_{\psi \in S} \frac{\sum_{i=1}^{n} |g_i^{\mathrm{T}}(t)\psi| - \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} r_i(s) |\Theta_i^{\mathrm{T}}(t, s)\psi|\, ds}{\psi^{\mathrm{T}}\Theta(t, t_0)\ell}, \quad \ell \in S.$$

Если $r(t) > 0$ — непрерывная функция, $t \in [t_0, T]$,

$$U(t) = \{ u \in R^n : \|u\| \le r(t)\}, \tag{10}$$

то $c(U(s), \Theta^{\mathrm{T}}(t, s)\psi) = r(s) \|\Theta^{\mathrm{T}}(t, s)\psi\|$ и имеет место формула $c(Q(t), \psi) = \int_{t_0}^{t} r(s) \|\Theta^{\mathrm{T}}(t, s)\psi\|\, ds$. Тогда оптимальная функция деформации

$$k_*(\ell) = \max_{t \in [t_0, T]} \min_{\psi \in S} \frac{\sum_{i=1}^{n} |g_i^{\mathrm{T}}(t)\psi| - \int_{t_0}^{t} r(s) \|\Theta^{\mathrm{T}}(t, s)\psi\|\, ds}{\psi^{\mathrm{T}}\Theta(t, t_0)\ell}, \quad \ell \in S.$$

Пусть

$$U(t) = \{ u \in R^n : u^{\mathrm{T}} B(t) u \le 1\}, \tag{11}$$

где $B(t)$ — положительно-определенная симметричная матрица с непрерывными компонентами размерности $n \times n.$ Тогда

$$c(U(s),\ \Theta^{\mathrm{T}}(t, s)\psi) = \sqrt{\psi^{\mathrm{T}} \Theta(t, s) B^{-1}(s) \Theta^{\mathrm{T}}(t, s)\psi}\ .$$

Отсюда

$$c(Q(t),\ \psi) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\psi^{\mathrm{T}} \Theta(t, s) B^{-1}(s)\ \Theta^{\mathrm{T}}(t, s)\psi}\ ds$$

и функция деформации

$$k_*(\ell) = \max_{t \in [t_0, T]} \min_{\psi \in S} \frac{\sum_{i=1}^{n} \left| g_i^{\mathrm{T}}(t)\psi \right| - \int_{t_0}^{t} \sqrt{\psi^{\mathrm{T}} \Theta(t, s) B^{-1}(s)\ \Theta^{\mathrm{T}}(t, s)\psi}\ ds}{\psi^{\mathrm{T}} \Theta(t, t_0)\ell}, \quad \ell \in S.$$

2. Рассмотрим фазовые ограничения вида

$$\Phi(t) = \{x \in R^n : \max_{k=1,2,\dots,d} x^{\mathrm{T}} B_k(t) x \le 1\},$$

где $B_k(t)$ — положительно-определенные симметричные матрицы с непрерывными компонентами размерности $n \times n,$ $t \in [t_0, T],$ $k = 1, 2, \dots, d.$ Тогда $c(\Phi(t),\ \psi) = \max\limits_{k=1,2,\dots,d} \sqrt{\psi^{\mathrm{T}} B_k^{-1}(t)\psi}.$ Если отображение U определяется с помощью (9), то

$$k_*(\ell) = \max_{t \in [t_0, T]} \min_{\psi \in S} \max_{k=1,2,\dots,d} \frac{\sqrt{\psi^{\mathrm{T}} B_k^{-1}(t)\psi} - \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} r_i(s) \left| \Theta_i^{\mathrm{T}}(t, s)\psi \right| ds}{\psi^{\mathrm{T}} \Theta(t, t_0)\ell}, \quad \ell \in S.$$

Для (10) оптимальная функция деформации

$$k_*(\ell) = \max_{t \in [t_0, T]} \min_{\psi \in S} \max_{k=1,2,\dots,d} \frac{\sqrt{\psi^{\mathrm{T}} B_k^{-1}(t)\psi} - \int_{t_0}^{t} r(s) \left\| \Theta^{\mathrm{T}}(t, s)\psi \right\| ds}{\psi^{\mathrm{T}} \Theta(t, t_0)\ell}$$

и для (11) справедлива формула

$$k_*(\ell) = \max_{t \in [t_0, T]} \min_{\psi \in S} \max_{k=1,2,\dots,d} \frac{\sqrt{\psi^{\mathrm{T}} B_k^{-1}(t)\psi} - \int_{t_0}^{t} \sqrt{\psi^{\mathrm{T}} \Theta(t, s) B^{-1}(s) \Theta^{\mathrm{T}}(t, s)\psi}\ ds}{\psi^{\mathrm{T}} \Theta(t, t_0)\ell}, \quad \ell \in S.$$

Таким образом, в работе исследованы свойства оптимального по включению множества внешней практической слабой устойчивости дифференциального включения и построен алгоритм нахождения этого множества для линейного дифференциального включения. Результаты исследования в перспективе могут быть развиты для решения задачи стабилизации до практической устойчивости динамической системы управления.

Ф.Г. Гаращенко, В.В. Пічкур

ВЛАСТИВОСТІ ОПТИМАЛЬНИХ МНОЖИН ЗОВНІШНЬОЇ ПРАКТИЧНОЇ СЛАБКОЇ СТІЙКОСТІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ВКЛЮЧЕНЬ

Отримано необхідні і достатні умови належності точки до границі максимальної області зовнішньої практичної слабкої стійкості диференціальних включень. Для лінійного включення при опуклих фазових обмеженнях побудовано відповідні критерії. Знайдено оптимальні функції деформації для конкретних фазових обмежень.

F.G. Garashchenko, V.V. Pichkur

PROPERTIES OF OPTIMAL SETS OF EXTERNAL PRACTICAL WEAK STABILITY OF DIFFERENTIAL INCLUSIONS

The necessary and sufficient conditions for a point belonging to the boundary of the maximum domain of external practical weak stability of differential inclusions are obtained. For linear inclusion in the case of convex phase constraints corresponding criteria are built. The optimal functions of deformation for concrete phase constraints are obtained.

1. *Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф.* Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. — Киев : Наук. думка, 1985. — 304 с.
2. *Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В.* Практична стійкість та структурна оптимізація динамічних систем. — Київ : Київ. ун-т, 2000. — 197 с.
3. *Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В.* Чисельні методи побудови оптимальних множин практичної стійкості динамічних систем // Комп'ютерна математика. Оптимізація обчислень: Зб. наук. праць. — 2001. — **2**. — С. 85–94.
4. *Благодатских В.И., Филиппов А.Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. МИАН, 1985, — **169**. — С. 194–252.
5. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М. : Наука, 1985. — 224 с.
6. *Гаращенко Ф.Г., Пичкур В.В.* Оптимальные множества практической устойчивости дифференциальных включений // Проблемы управления и информатики. — 2003. — № 2. — С. 10–19.
7. *Панасюк А.И., Панасюк В.И.* Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем. — Минск : Наука и техника, 1986. — 296 с.

Получено 28.10.2003