УДК 62-50:534

В.Б. Ларин

ОБ ОБРАЩЕНИИ ПРОБЛЕМЫ АНАЛИТИЧЕСКОГО КОНСТРУИРОВАНИЯ РЕГУЛЯТОРОВ

Введение. В процессе развития теории аналитического конструирования регуляторов наряду с прямыми задачами интенсивно исследовались и обратные (см., например, [1, § 89]). Но в отличие от прямой задачи, алгоритм решения которой в случае линейной системы был сведен к стандартной процедуре (построению стабилизирующего решения матричного уравнения Риккати), для обратных задач пока трудно указать аналогичный унифицированный алгоритм (см., например, [2–4], где есть дальнейшие ссылки). В [5] высказано предположение, что основой такого унифицированного алгоритма может служить аппарат линейных матричных неравенств (ЛМН) [4], и предложен соответствующий алгоритм. Однако можно указать задачи, для решения которых требуется более общий подход. Такой подход будет изложен ниже. Статья организована следующим образом. После описания постановок прямой и обратной задачи для систем с непрерывным и дискретным временем, в соответствии с [5, 6] кратко излагается суть алгоритма решения обратной задачи, который базируется на ЛМН, и указываются случаи, когда этот подход может не быть эффективным. Далее излагается предлагаемый подход, суть которого состоит в построении множества возможных решений и выборе из этого множества такого решения, которое удовлетворяет определенным условиям.

Постановка задачи. Сформулируем прямую и обратную задачи аналитического конструирования регуляторов. Задача аналитического конструирования регуляторов для линейной стационарной системы, оптимизируемой по квадратичному функционалу [1], или линейная квадратичная (ЛК) задача [7–9], формулируется так. Движение объекта описывается стационарной системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) \neq 0, \tag{1}$$

где x — вектор состояния системы, u — вектор управляющих воздействий, A, B — независящие от времени матрицы соответствующих размеров. Необходимо найти регулятор (матрицу K)

$$u = Kx, \tag{2}$$

который, обеспечивая устойчивость замкнутой системы

$$\mathrm{Re}\,\lambda(A + BK) < 0, \tag{3}$$

минимизировал бы функционал

$$J = \int_0^\infty (x^{\mathrm{T}} Qx + u^{\mathrm{T}} Ru)dt. \tag{4}$$

Здесь и далее Т — транспонирование; $Q = Q^{\mathrm{T}} \geq 0$, $R = R^{\mathrm{T}} > 0$.

Известно (см., например [7, 8]), что решение этой (прямой) задачи, определяемой (1)–(4), имеет вид

$$K = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}P, \tag{5}$$

где симметричная матрица P — так называемое стабилизирующее решение матричного алгебраического уравнения Риккати

$$A^{\mathrm{T}}P + PA - PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P + Q = 0. \tag{6}$$

Обращение проблемы аналитического конструирования регуляторов [1], или обратная ЛК задача [4], формулируется так. Заданы матрицы A, B, K, удовлетворяющие условию (3); требуется найти (если существуют) матрицы Q, R такие, чтобы регулятор (2) был решением задачи (1)–(4).

Отметим неоднозначность решения обратной задачи. Так, например, если в функционале (4) матрицы R и Q умножить на произвольное положительное число, то это не изменит результат решения прямой задачи (матрицу K, определяемую (5)).

Аналогичным образом формулируются прямая и обратная задачи в случае так называемого дискретного времени, т.е. когда движение объекта описывается не дифференциальным уравнением (1), а конечно-разностным уравнением

$$x(i+1) = Ax(i) + Bu(i), \;\; x(0) \neq 0, \;\; i = 0, 1, \ldots . \tag{7}$$

Смысл векторов x и u аналогичен принятому в (1). При такой постановке задачи соотношения (2), (4) трансформируются следующим образом:

$$u(i) = K\,x(i), \tag{8}$$

$$J = \sum_{i=0}^{\infty} (x^{\mathrm{T}}(i)Qx(i) + u^{\mathrm{T}}(i)Ru(i)), \;\; Q \geq 0, \;\; R > 0. \tag{9}$$

Задача (прямая) состоит в выборе матрицы K в (8), который минимизирует функционал (9) при условии устойчивости замкнутой системы, т.е. модули собственных значений матрицы $(A + BK)$ должны быть меньше единицы:

$$|\,\lambda(A + BK)\,| < 1. \tag{10}$$

Решение этой задачи имеет вид [7, 8, 10]

$$K = -\,(B^{\mathrm{T}}PB + R)^{-1}B^{\mathrm{T}}PA, \tag{11}$$

где P — симметричная матрица, которая представляет собой стабилизирующее решение дискретного матричного алгебраического уравнения Риккати

$$P = A^{\mathrm{T}}PA - A^{\mathrm{T}}PB(B^{\mathrm{T}}PB + R)^{-1}B^{\mathrm{T}}PA + Q. \tag{12}$$

Обратная задача состоит в отыскании матриц Q, R, фигурирующих в (9), по заданным матрицам A, B, K, удовлетворяющим (10).

Далее сосредоточим внимание на вычислительном алгоритме построения решения обратных задач в случае как непрерывного, так и дискретного времени.

Базирующийся на ЛМН алгоритм решения обратной ЛК задачи [5]. Итак, пусть заданы матрицы A, B, K, удовлетворяющие (3). Необходимо найти матрицы Q и R таким образом, чтобы в результате решения ЛК задачи, определяемой (1)–(4), была найдена (согласно (5)) матрица K, совпадающая с исходной.

 ISSN 0572-2691

Для решения этой задачи в [5] использован подход, базирующийся на ЛМН. Согласно [4], для решения обратной ЛК задачи необходимо найти симметричные матрицы

$$Q \geq 0,\ \ R > 0,\ \ P \geq 0, \tag{13}$$

удовлетворяющие уравнениям

$$(A + BK)^{\mathrm{T}} P + P(A + BK) + K^{\mathrm{T}} RK + Q = 0, \tag{14}$$

$$B^{\mathrm{T}} P \ + RK = 0, \tag{15}$$

которые следуют из (5), (6).

Отметим, что такая постановка задачи кроме матричных неравенств (13) содержит уравнения (14), (15). Это затрудняет непосредственное использование стандартных процедур метода ЛМН [11]. Действительно, если (14) и условие $Q \geq 0$ можно записать в виде неравенства

$$(A + BK)^{\mathrm{T}} P + P(A + BK) + K^{\mathrm{T}} RK \leq 0, \tag{16}$$

то сведение процедуры решения уравнения (15) к некоторой стандартной проблеме, формулируемой в терминах ЛМН, требует дополнительных рассуждений. В связи с этим рассмотрим матричные неравенства

$$\begin{bmatrix} Y & S \\ S^{\mathrm{T}} & I \end{bmatrix} \geq 0,\ \ Y < \lambda I,\ \ S = B^{\mathrm{T}} P + RK, \tag{17}$$

где Y — симметричная матрица, λ — скаляр, I (здесь и далее) — единичная матрица соответствующего размера. Согласно [4], неравенство $\begin{bmatrix} Y & S \\ S^{\mathrm{T}} & I \end{bmatrix} \geq 0$ эквивалентно неравенству $Y - SS^{\mathrm{T}} \geq 0,$ которое с учетом второго неравенства в (17) можно переписать в виде

$$\lambda I > SS^{\mathrm{T}}. \tag{18}$$

Из (18) следует, что если найдены матрицы P и $R,$ удовлетворяющие (13), (17) при достаточно малой величине $\lambda,$ то эти матрицы могут служить достаточно хорошей аппроксимацией решения уравнения (15). Руководствуясь этими соображениями, обратную ЛК задачу с учетом (13), (16) и (17) можно сформулировать в терминах ЛМН таким образом. Заданы матрицы $A, B, K;$ необходимо минимизировать λ при выполнении следующих ЛМН:

$$P \geq 0,\ R > 0,\ \ (A + BK)^{\mathrm{T}} P + P(A + BK) + K^{\mathrm{T}} RK \leq 0,$$

$$\begin{bmatrix} Y & S \\ S^{\mathrm{T}} & I \end{bmatrix} \geq 0, \quad Y < \lambda I, \quad S = B^{\mathrm{T}} P + RK. \tag{19}$$

Это стандартная задача ЛМН (задача ЛМН на собственные значения [4]). Для ее решения используется процедура gevp.m пакета MATLAB [11]. В результате получаем матрицы *P*, *R*, *Y* и соответствующие значения скаляра $\lambda.$ Искомое значение матрицы Q определяется уравнением (14). Таким образом, алгоритм решения обратной ЛК задачи (определение матриц $Q,\ R$) сводится к использованию стандартной процедуры пакета MATLAB.

В результате аналогичных рассуждений применительно к задаче с дискретным временем (движение объекта описывается уравнением (7)) также можно получить алгоритм решения обратной ЛК задачи. Пусть заданы матрицы A, B, K, удовлетворяющие (10). Необходимо минимизировать λ при выполнении следующих ЛМН:

$$P > 0, \quad A^{\mathrm{T}}PA - P - K^{\mathrm{T}}RK - (BK)^{\mathrm{T}}PBK \le 0,$$

$$\begin{bmatrix} Y & S \\ S^{\mathrm{T}} & I \end{bmatrix} \ge 0, \quad Y < \lambda I, \quad S = RK + B^{\mathrm{T}}PBK + B^{\mathrm{T}}PA. \tag{20}$$

В отличие от [3] в алгоритме (20) нет требования обратимости матрицы A.

Отметим, что для эффективности описанного выше алгоритма решения обратной задачи для системы с непрерывным временем существенно условие $R > 0$, так как оно исключает тривиальное решение задачи (19), а именно $R = 0,\ \ P = 0$. Существенно, что это условие $(R > 0)$ естественно в задачах минимизации функционала (4), однако оно должно быть опущено при рассмотрении минимаксных или игровых задач [7]. В связи с этим далее опишем подход, позволяющий снять ограничение $R > 0$.

Снятие ограничения $\boldsymbol{R > 0}$. Рассмотрим уравнения (14), (15), определяющие решение обратной задачи. Один из возможных подходов к решению обратной задачи может включать следующие шаги.

1. Отыскание множества решений уравнения (15).

2. Выбор из этого множества решений матриц R и P, удовлетворяющих определенным требованиям.

3. Определение по найденным матрицам R и P матрицы Q согласно (14).

Итак, опишем первый шаг. Введем следующие обозначения. Пусть X_{*1}, $X_{*2},\ldots,\ X_{*n}$ — столбцы матрицы X. По определению

$$\mathrm{vec}\,(X^{\mathrm{T}}) = \begin{bmatrix} X_{*1} \\ \vdots \\ X_{*n} \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Этой процедуре соответствует операция $X(:)$ пакета MATLAB. Известно (см., например, [12]), что матричное уравнение (15) можно записать в виде системы уравнений

$$Dr + Fp = 0, \tag{22}$$

где $r = \mathrm{vec}(R),\ \ p = \mathrm{vec}(P),\ \ D = I \otimes K^{\mathrm{T}},\ \ F = B^{\mathrm{T}} \otimes I$. Здесь и далее $\otimes$ — знак прямого произведения матриц [12] (это произведение реализуется процедурой kron.m пакета MATLAB). Так как матрицы R и P симметричны, систему (22) необходимо дополнить линейными уравнениями

$$G_R r = 0, \ \ G_P\, p = 0, \tag{23}$$

 ISSN 0572-2691

которые следуют из условий $R = R^{\mathrm{T}}$, $P = P^{\mathrm{T}}$. Объединяя (22) и (23), можно записать систему

$$Wz = 0, \tag{24}$$

$$W = \begin{bmatrix} D & F \\ G_R & O \\ O & G_P \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} r \\ p \end{bmatrix}.$$

Здесь и далее O обозначает нулевую матрицу соответствующего размера.

Множество решений уравнения (15) определяется аннулирующим подпространством матрицы W [12]. Это подпространство определяется столбцами матрицы U такой, что $WU = 0$, $U^{\mathrm{T}}U = I$ (для отыскания матрицы U можно использовать процедуру null.m пакета MATLAB).

Очевидно, что получение матрицы U — итог первого шага алгоритма, поскольку каждый из столбцов матрицы U и их линейная комбинация определяют множество симметричных матриц R и P, представляющих собой решение уравнения (15).

Перейдем ко второму шагу алгоритма — выбору матриц R и P. Фигурирующий в (24) вектор z, который определяет матрицы R и P, представим в виде линейной комбинации столбцов матрицы U. Эта комбинация определяется вектором x:

$$z = Ux, \quad \| x \| = 1, \tag{25}$$

где $\| \cdot \|$ — спектральная норма $\left(\| x \| = \sqrt{x^{\mathrm{T}} x} \right)$.

Разбив z на векторы r и p, найдем, согласно (21), матрицы R и P (переход от векторов r и p к матрицам R и P может быть выполнен процедурой reshape.m пакета MATLAB).

Таким образом, выбор конкретных матриц R и P из множества решений уравнения (15) сводится к выбору компонент вектора x в (25). Этот выбор можно подчинить различным требованиям, например максимизации минимального собственного значения матрицы R и т.п.

Третий шаг алгоритма (определение матрицы Q согласно (14)) тривиален. Аналогичные процедуры могут быть использованы и в задаче с дискретным временем ((7)–(9)). В этой задаче аналогом уравнения (15) будет условие $S = 0$, где S определяется неравенствами (20), т.е.

$$RK + B^{\mathrm{T}}PBK + B^{\mathrm{T}}PA = 0. \tag{26}$$

Для того чтобы получить решение этого уравнения при помощи процедур ЛМН (20), необходимо ограничиться тремя случаями: $R > 0, P > 0$; $R > 0$; $P > 0$. Без ограничений такого рода в результате использования алгоритма (20) может получиться тривиальное решение: $R = 0, P = 0$. Отметим, что, в отличие от рассмотренной выше задачи с непрерывным временем, в задаче с дискретным временем случай $R \geq 0$ не является особым. Модифицируем изложенный алгоритм применительно к задаче с дискретным временем. Очевидно, эта модификация связана только с изменением выражения для матрицы F, фигурирующей в (24). Действительно, в рассматриваемом случае (задача с дискретным временем) уравнению (26) соответствует уравнение (22) с такими матрицами D и F:

$$D = I \otimes K^{\mathrm{T}},\ \ F = B^{\mathrm{T}} \otimes (BK)^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}} \otimes A^{\mathrm{T}}. \tag{27}$$

С учетом (27) описанный выше алгоритм можно использовать для решения обратных задач с дискретным временем.

Пример 1. Пусть в (1), (2)

$$A = -\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ \ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \ K = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2+\varepsilon \end{bmatrix},$$

где ε — параметр. Необходимо определить матрицы Q и R из формулы (4). Однако прежде чем рассмотреть результат использования описанной выше вычислительной процедуры решения обратной задачи, приведем одно из возможных аналитических решений уравнения (15):

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+\varepsilon \end{bmatrix},\ \ P = \begin{bmatrix} 1 & 1+\varepsilon \\ 1+\varepsilon & (1+\varepsilon)^2 + \varepsilon \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Соответствующую этим матрицам матрицу Q можно определить из (14).

Рассмотрим решение (28) уравнения (15) при разных значениях ε. Отметим, что при $\varepsilon > 0$ матрицы R и P положительно определены и, следовательно, решение (28) не противоречит лемме 2 из [2], так как в этом случае матрица KB имеет различные действительные собственные значения.

При $\varepsilon < 0$ каждая из матриц R и P имеет собственные значения разных знаков, а матрица KB — комплексные собственные значения.

В случае $\varepsilon = 0$ матрицы R и P сингулярны, а матрица KB имеет кратные собственные значения. Определив по этим (соответствующим $\varepsilon = 0$) матрицам R и P матрицу Q, согласно (14) получим решение обратной задачи (матрицы R и Q в (4)). Однако в этом случае для решения прямой задачи нельзя использовать стандартные процедуры. Действительно, по этим матрицам нельзя найти матрицу K (решение прямой задачи), которая определяется (5), поскольку при сингулярной матрице R уравнение (6) теряет смысл.

Приведем результат использования описанного выше алгоритма для решения этого примера при $\varepsilon = 0$. Матрицы G_R, G_P в (23) имеют такой вид:

$$G_R = G_P = [0\ 1\ 0\ {-1}\ 0].$$

Фигурирующая в (25) матрица U состоит из двух столбцов. Выбирая в (25) компоненты вектора x в соответствии с требованием максимизации минимального собственного значения матрицы R, получаем следующие значения матриц R и P:

$$R = P = a\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ \ a = 0{,}3536. \tag{29}$$

Таким образом, полученные значения матриц R и P отличаются от приведенных в (28) при $\varepsilon = 0$ только множителем a, что несущественно. Далее из (14) получим значение матрицы Q, соответствующее матрицам R и P, определяемым (29):

$$Q = \begin{bmatrix} 1{,}7678 & 2{,}8284 \\ 2{,}8284 & 3{,}8891 \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Обобщение задачи. В описанных выше алгоритмах решения обратной задачи процедура состояла из двух этапов. На первом определялись матрицы R и P, на втором — матрица Q. Существенно, что при этом характеристики искомого решения определяются только требованиями к матрицам R и P. Однако возможна постановка задачи, когда искомое решение определяется требованиями к матрице Q или ко всем трем матрицам R, P, Q. В этом случае необходимо описать множество матриц R, P, Q, удовлетворяющих условиям задачи, и выбрать из этого множества соответствующее решение.

Рассмотрим эту процедуру применительно к задаче с непрерывным временем, которая определяется матричными уравнениями (14), (15). Эти матричные уравнения необходимо заменить соответствующей системой линейных уравнений. Пусть

$$r = \mathrm{vec}\,(R), \quad p = \mathrm{vec}(P), \quad q = \mathrm{vec}(Q).$$

В этих обозначениях уравнению (15) соответствует система (22), уравнению (14) — система

$$Nr + Sp + Tq = 0, \tag{31}$$

где $N = K^{\mathrm{T}} \otimes K^{\mathrm{T}}$, $S = (A + BK)^{\mathrm{T}} \otimes I + I \otimes (A + BK)^{\mathrm{T}}$, $T = I$. Пополним систему (23) уравнением

$$G_Q q = 0, \tag{32}$$

которое следует из условия $Q = Q^{\mathrm{T}}$. Объединяя (22), (23), (31), (32), получаем систему уравнений, аналогичную (24):

$$Wz = 0, \tag{33}$$

$$W = \begin{bmatrix} D & F & O \\ N & S & T \\ G_R & O & O \\ O & G_P & O \\ O & O & G_Q \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} r \\ p \\ q \end{bmatrix}.$$

Множество решений обратной задачи определяется аннулирующим подпространством матрицы W из этой системы. Таким образом, дальнейшие вычислительные процедуры аналогичны описанным выше.

Рассмотрим задачу с дискретным временем. Множество ее решений определяется матричными уравнениями

$$A^{\mathrm{T}} PA - P - K^{\mathrm{T}} RK - (BK)^{\mathrm{T}} PBK + Q = 0, \tag{34}$$

$$RK + B^{\mathrm{T}} PBK + B^{\mathrm{T}} PA = 0, \tag{35}$$

которые следуют из (11), (12). Матричным уравнениям (34), (35) соответствуют следующие линейные алгебраические уравнения:

$$Dr + Fp = 0, \quad Nr + Sp + Tq = 0, \tag{36}$$

где $D = I \otimes K^{\mathrm{T}}$, $F = B^{\mathrm{T}} \otimes (BK)^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}} \otimes A^{\mathrm{T}}$, $N = -K^{\mathrm{T}} \otimes K^{\mathrm{T}}$, $S = A^{\mathrm{T}} \otimes A^{\mathrm{T}} - I - (BK)^{\mathrm{T}} \otimes (BK)^{\mathrm{T}}$, $T = I$, векторы r, p, q имеют прежний смысл.

Таким образом, и в случае задачи с дискретным временем множество ее решений определяется системой, аналогичной (33), в которой матрицы D, F, N, S, T — матричные коэффициенты системы (36).

Пример 2. Продолжим рассмотрение примера 1. Используя систему (33), найдем решение обратной задачи, сформулированной в примере 1, при $\varepsilon = 0$ и при условии, что Q — диагональная матрица.

В этом случае аннулирующее подпространство матрицы W, фигурирующей в (33), имеет размерность 2. Построив линейную комбинацию базисных векторов этого подпространства таким образом, что внедиагональные элементы матрицы Q равны нулю, получаем:

$$R = \begin{bmatrix} 0{,}1838 & 0{,}0788 \\ 0{,}0788 & -0{,}0263 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0{,}0788 & -0{,}0263 \\ -0{,}0263 & -0{,}1313 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0{,}2889 & 0 \\ 0 & -0{,}9191 \end{bmatrix}. \tag{37}$$

В отличие от решения этой же обратной задачи, полученного в примере 1 (выражения (29), (30)), приведенное выше решение позволяет решить прямую задачу, используя стандартные процедуры. Так, приняв в качестве исходных данных матрицы R и Q, определяемые (37), и используя процедуру lqr2.m пакета MATLAB, получаем значение матрицы K, практически совпадающее с исходным (норма разности этих матриц $\sim 2 \cdot 10^{-15}$).

В.Б. Ларін

ПРО ОБЕРНЕННЯ ПРОБЛЕМИ АНАЛІТИЧНОГО КОНСТРУЮВАННЯ РЕГУЛЯТОРІВ

Розглянуто задачу, обернену до задачі синтезу оптимального відносно квадратичного функціонала регулятора, для лінійної стаціонарної системи. Ця задача формулюється у такий спосіб: для заданих матриць, що описують динаміку системи і матриці регулятора, необхідно визначити вагові матриці квадратичного функціонала. Запропонований алгоритм розв'язання цієї задачі включає процедуру побудови множини розв'язків і вибір з цієї множини такого розв'язку, що задовольняє певним критеріям.

V.B. Larin

ON INVERSION OF THE PROBLEM OF ANALYTICAL DESIGNING OF CONTROLLERS

The problem which is inverse to the problem of synthesis of the optimal controller according to quadratic functional for linear stationary system is considered. This problem is formulated as follows. For the matrices describing dynamics of the system and the matrix of a controller, it is necessary to determine the weight matrices of the quadratic functional. The offered algorithm of solving this problem includes procedure of finding the set of solutions and choosing from this set the solution satisfying certain criteria.

1. *Летов А.М.* Динамика полета и управления. — М. : Наука, 1969. — 359 с.
2. *Lee Tsu-Tian, Liaw Guang-Tsong.* The inverse problem of linear optimal control for constant disturbance // Int. J. Control. — 1986. — **43**, N 1. — P. 233–246.
3. *Алиев Ф.А.* Методы решения прикладных задач оптимизации динамических систем. — Баку : Элм, 1989. — 369 с.
4. *Boyd S., Ghaoui L.E., Feron E., Balakrishnan V.* Linear matrix inequalities in system and control theory. — Philadelphia : SIAM, 1994. — 193 p.
5. *Larin V.B.* LMI approach in the inverse problem of optimal control // Syst. Sci. — 2000. — **26**, N 3. — P. 61–68.
6. *Larin V.B.* Control problem for systems with uncertainty // Int. Appl. Mech. — 2001. — **37**, N 12. — P. 1539–1567.
7. *Брайсон А., Хо-Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. Оптимизация, оценки и управление. — М. : Мир, 1972. — 554 с.
8. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. — М. : Мир, 1977. — 650 с.
9. *Aliev F.A., Larin V.B.* Special cases in optimization problems for stationary linear closed-loop systems // Int. Appl. Mech. — 2003. — **39**, N 3. — P. 251–273.
10. *Aliev F.A., Larin V.B.* Optimization of linear control systems: analytical methods and computational algorithms. — Amsterdam : Gordon and Breach Science Publishers, 1998. — 261 p.
11. *Gahinet P., Nemirovski A., Laub A.J., Chilali M.* LMI control toolbox users guide. — The Math. Works Inc., 1995. — 354 p.
12. *Ланкастер П.* Теория матриц. — М. : Наука, 1978. — 280 с.

Получено 14.11.03