УДК 518.9

А.П. Игнатенко, А.А. Чикрий

К ОБОСНОВАНИЮ МЕТОДА ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЙ НАВИГАЦИИ В ЗАДАЧЕ ПРОСТОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

Введение. В работе изучаются три наиболее известных метода решения задачи простого преследования: методы параллельного сближения, кривой погони и пропорциональной навигации [1]. Вводится некоторая универсальная функция, зависящая от состояния системы и управлений игроков, через которую выражаются разрешающие функции параллельного преследования и кривой погони.

Рассмотрим дифференциальную игру двух игроков с простой динамикой в пространстве R^n. Движение игроков задается уравнением

$$\dot{z} = u - v,$$

где $z = x - y$ — фазовый вектор, x и y — геометрические координаты преследователя и убегающего соответственно. Управления u и v выбираются из шаров $U = B[0, a]$ и $V = B[0, 1]$, причем $a > 1$, т.е. максимальная скорость преследователя больше, чем убегающего. Терминальное множество задается равенством $x = y$.

Рассмотрим функцию

$$A(z, u, v) = \max\left\{\frac{1}{\|z\|}\left(-\frac{z}{\|z\|}, u - v\right), 0\right\}.$$

Эта функция, зависящая от трех векторных аргументов, принимает числовые значения. Как видно из рис. 1, функция $A(z, u, v)$ — это проекция текущей скорости сближения на единичный вектор $-z/\|z\|$, деленная на величину $\|z\|$. Из определения следуют такие свойства функции $A(z, u, v)$.

1. Если $\left(-\frac{z}{\|z\|}, u - v\right) \le 0$, то $A(z, u, v) = 0$.

2. Если $\left(-\frac{z}{\|z\|}, u - v\right) > 0$, то $A(z, u, v) = \frac{1}{\|z\|}\left(-\frac{z}{\|z\|}, u - v\right)$.

3. Для всех $u \in U, v \in V$ выполняется $A(z, u, v) \le \frac{a+1}{\|z\|}$.

Последнее неравенство получено из неравенства Коши–Буняковского [2]

$$\left(-\frac{z}{\|z\|}, u - v\right) \le \left\|\frac{z}{\|z\|}\right\| \|u - v\| \le \|u\| + \|v\| \le a + 1.$$

Следующее предложение фиксирует связь функции $A(z, u, v)$ и разрешающих функций [3].

 ISSN 0572-2691

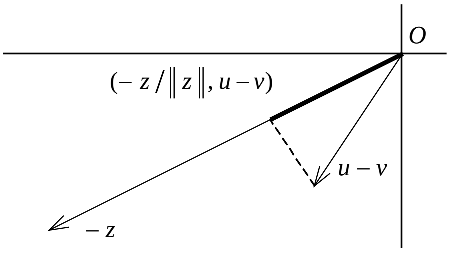

Рис. 1

Предложение 1. Рассмотрим луч $L(z)=\{x : x=-\beta z, \beta \ge 0\}$, и многозначное отображение $U(v, z)=\{u \in U : \{u-v\} \bigcap L(z) \neq \varnothing\}$.

Справедливо равенство

$$\max_{u \in U(v,z)} A(z, u, v)=\alpha_1(z, v),$$

где $\alpha_1(z, v)=\left((z, v)+\sqrt{(z, v)^2+\|z\|^2(a^2-\|v\|^2)}\right)/\|z\|^2$.

Доказательство. Действительно,

$$\max_{u \in U(v,z)} A(z, u, v)=\max_{u \in U(v,z)} \max\left\{\frac{1}{\|z\|}\left(-\frac{z}{\|z\|}, u-v\right), 0\right\}=$$

$$=\max\left\{\max_{u \in U(v,z)} \frac{1}{\|z\|}\left(-\frac{z}{\|z\|}, u-v\right), 0\right\}=\max_{u \in U(v,z)} \frac{1}{\|z\|}\left(-\frac{z}{\|z\|}, u-v\right)=\max_{u \in U(v,z)} \beta,$$

поскольку $\beta \ge 0$.

Заметим, что v и z фиксированны. Тогда $v-\beta z$ при $\beta \ge 0$ — линейная векторозначная функция с параметром β. Далее, $\|v-\beta z\|=\|u\| \le a$, причем максимум β достигается на границе шара U, т.е. $\|v-\beta z\|=a$. Решая это уравнение относительно β, получаем $\beta_*=\left((z, v)+\sqrt{(z, v)^2+\|z\|^2(a^2-\|v\|^2)}\right)/\|z\|^2$. Таким образом,

$$\max_{u \in U(v,z)} A(z, u, v)=\beta_*=\left((z, v)+\sqrt{(z, v)^2+\|z\|^2(a^2-\|v\|^2)}\right)/\|z\|^2=\alpha_1(z, v).$$

Следующие рассуждения указывают на связь функции $A(z, u, v)$ и метода кривой погони [4]. Будем считать, что преследователь обладает информацией о $z(t)$ и $v(t)$. Заметим, что для построения управления $u(t)$ достаточно только знания $z(t)$, однако для отыскания функции $\alpha_0(z, v)$, которая будет определена далее, необходимо знание $v(t)$.

Предложение 2. Имеет место соотношение $\max_{u \in U} A(z, u, v)=\alpha_0(z, v)$, где $\alpha_0(z, v)=\frac{1}{\|z\|}\left(a+\left(\frac{z}{\|z\|}, v\right)\right)$.

Доказательство. Рассмотрим

$$\max_{u\in U} A(z,u,v)=\max_{u\in U}\max\left\{\frac{1}{\|z\|}\left(-\frac{z}{\|z\|},u-v\right),0\right\}=$$

$$=\max\left\{\max_{u\in U}\left(\frac{1}{\|z\|}\left(-\frac{z}{\|z\|},u-v\right)\right),0\right\}=$$

$$=\max\left\{\max_{u\in U}\left(\frac{1}{\|z\|}\left(-\frac{z}{\|z\|},u\right)\right)+\frac{1}{\|z\|}\left(\frac{z}{\|z\|},v\right),0\right\}=\max\left\{\frac{1}{\|z\|}\left(a+\left(\frac{z}{\|z\|},v\right)\right),0\right\}=$$

$$=\frac{1}{\|z\|}\left(a+\left(\frac{z}{\|z\|},v\right)\right)\geq 0\quad \forall v\in V.$$

Заметим, что максимум $A(z,u,v)$ по величине u достигается на управлении $u=-az/\|z\|$, что будет использовано в дальнейшем.

Функция $\alpha_0(z,v)$ — аналог разрешающей функции $\alpha_1(z,v)$ для метода кривой погони в том смысле, что $\alpha_0(z,v)$ равна проекции текущей скорости уменьшения u_0-v вектора z на единичный вектор $-z/\|z\|$, деленной на $\|z\|$, т.е. показывает оценку времени окончания игры при текущих управлениях.

Заметим, что $\alpha_0(z,v)=\max\limits_{u\in U} A(z,u,v)=A(z,u_0,v)$, где $u_0=-az/\|z\|$, а $\alpha_1(z,v)=\max\limits_{u\in U(v,z)} A(z,u,v)=A(z,u_1,v)$, где u_1 — управление метода параллельного преследования, которое имеет вид $u_1=v-\alpha_1(z,v)\,z^0$.

Будем говорить, что x представляет собой ортогональную проекцию вектора y на вектор z, или $x=\mathrm{pr}_z\, y$, если $x=(z/\|z\|,y)$. Ортогональной составляющей [5] вектора y на вектор z, или $\mathrm{ort}_z\, y$, будем называть $\mathrm{ort}_z\, y=$ $=\|y-\mathrm{pr}_z\, yz/\|z\|\|$. Таким образом, вектор y можно разложить на сумму ортогональной проекции и ортогональной составляющей:

$$y=\mathrm{pr}_z\, y\frac{z}{\|z\|}+\mathrm{ort}_z\, y\frac{y-\mathrm{pr}_z\, yz/\|z\|}{\|y-\mathrm{pr}_z\, yz/\|z\|\|}.$$

Ортогональная составляющая может быть представлена в виде [6]

$$\mathrm{ort}_z\, y\frac{y-\mathrm{pr}_z\, yz/\|z\|}{\|y-\mathrm{pr}_z\, yz/\|z\|\|}=\frac{z}{\|z\|}\times\left(y\times\frac{z}{\|z\|}\right).$$

Тогда вектор y имеет вид

$$y=\frac{z}{\|z\|}\left(y,\frac{z}{\|z\|}\right)+\frac{z}{\|z\|}\times\left(y\times\frac{z}{\|z\|}\right).$$

 ISSN 0572-2691

Определение. Поставим в соответствие функции $A(z, u, v)$ функцию $B(z, u, v)$, которую назовем соответствующей $A(z, u, v)$:

$$B(z, u, v) = [\operatorname{ort}_{-z}(u - v)]\, x,$$

где $x = (u - v - \operatorname{pr}_{-z}(u - v)) / \| u - v - \operatorname{pr}_{-z}(u - v) \|$. Это означает, что функция $B(z, u, v)$ по построению ортогональна вектору $-z$ и равна по норме ортогональной составляющей $u - v$ по отношению к вектору $-z$. Если зафиксировано управление $u_i(z, v)$, то $B(z, u_i, v) = \beta_i(z, v)$, где $i = 0, 1$.

Предложение 3. Справедливы следующие соотношения:

1. $\beta_1(z, v) \equiv 0$;
2. $\beta_0(z, v) = -az / \| z \| - v + \alpha_0(z, v)\, z$.

Доказательство. Поскольку при методе параллельного преследования всегда выполняется $u_1 - v = -\beta_* z$, то $B_1(z, u_1, v) \equiv 0$, а следовательно, и $\beta_1(z, v) \equiv 0$.

Осталось доказать пункт 2. Разложим вектор $u_0 - v$ на сумму ортогональной проекции и составляющей: $u_0 - v = -[\operatorname{pr}_{-z}(u_0 - v)]\, z / \| z \| + [\operatorname{ort}_{-z}(u_0 - v)]\, x$, где $x = (u_0 - v - \operatorname{pr}_{-z}(u_0 - v)) / \| u_0 - v - \operatorname{pr}_{-z}(u_0 - v) \|$. Таким образом, $\beta_0(z, v) = \operatorname{ort}_{-z}(u_0 - v)\, x = u_0 - v + [\operatorname{pr}_{-z}(u_0 - v)]\, z / \| z \| = -a z / \| z \| - v + \alpha_0(z, v)\, z$.

Укажем еще несколько свойств, связанных с функциями $\alpha_1(z, v)$ и $\alpha_0(z, v)$.

Предложение 4. Для всех $v \in V$ и $z \in R^n$ выполняется $\alpha_1(z, v) \le \alpha_0(z, v)$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $v = \pm z / \| z \|$. В случае фиксированного вектора z наибольшая разность $\alpha_0(z, v) - \alpha_1(z, v)$ достигается при управлениях v, ортогональных z и максимальных по норме.

Доказательство. Действительно,

$$\alpha_1(z, v) = \frac{(z, v)}{\| z \|^2} + \frac{\sqrt{(z / \| z \|, v)^2 + a^2 - \| v \|^2}}{\| z \|}, \quad \alpha_0(z, v) = \frac{(z, v)}{\| z \|^2} + \frac{a}{\| z \|}.$$

Используя неравенство Коши–Буняковского [4], получаем $|(z / \| z \|, v)| \le \le z / \| z \| \cdot \| v \| = \| v \|$, причем равенство достигается только в случае $v = \pm z / \| z \|$. Следовательно, $\sqrt{(z / \| z \|, v)^2 + a^2 - \| v \|^2} \le a \quad \forall v \in V$ и $z \in R^n$ и равенство достигается только в случае $v = \pm z / \| z \|$, что и доказывает первую часть предложения. Заметим, что при $v = \pm z / \| z \|$ управления u_1 и u_0 совпадают. Рассмотрим $\alpha_0(z, v) - \alpha_1(z, v) = \left(a - \sqrt{(z / \| z \|, v)^2 + a^2 - \| v \|^2} \right) / \| z \|$. Наибольшая разность достигается, когда корень $\sqrt{(z / \| z \|, v)^2 + a^2 - \| v \|^2}$ минимален, что, в свою очередь, имеет место, если вектор v максимален по норме и ортогонален вектору z: $\min\limits_{v \in V} \sqrt{(z / \| z \|, v)^2 + a^2 - \| v \|^2} = \sqrt{a^2 - 1}$. Итак, $\alpha_0(z, v) - \alpha_1(z, v) \le \le \left(a - \sqrt{a^2 - 1} \right) / \| z \|$.

Следствие 1. Угол между управлениями u_1 и u_0 равен $\arccos((u_1, u_0)/a^2)$. Максимальный угол между этими векторами достигается при векторе v, максимальном по норме и ортогональном вектору z. Подставляя значения управлений, получаем $\arccos((u_1, u_0)/a^2) = \arccos\left(\sqrt{a^2 - 1}/a\right)$.

Рассмотрим следующую схему формирования управления преследователя: $u_i = v - \alpha_i(z, v)z + \beta_i(z, v)$, где $i = 0, 1$. Покажем, что определение u_i существует, единственно и допустимо.

Действительно, для всех $v \in V$, $t \geq 0$ и $z \neq 0$ функции $\alpha_i(z, v)$ и $\beta_i(z, v)$ существуют и единственны. Для значения $z = 0$ естественно считать, что $u_i = 0$. Таким образом, при всех значениях аргументов управление u_i существует и единственно.

Покажем, что управление при $i = 1$ совпадает с управлением метода параллельного преследования, а при $i = 0$ — с управлением кривой погони. Поскольку $\beta_1(z, v) = 0$, то $u_1 = v - \alpha_1(z, v)z$, что, очевидно, совпадает с управлением параллельного преследования. Далее, для $i = 0$ справедливо равенство $u_0 = v - \alpha_0(z, v)z + \beta_0(z, v) = v - (z, v)z/\|z\|^2 - az/\|z\| + (-az/\|z\| - v + (z, v)z/\|z\|^2 + az/\|z\|) = -az/\|z\|$. Следовательно, $u_i(t) \in U \quad \forall t, z, v$.

Формулировка метода пропорциональной навигации. Зафиксируем прямоугольную систему координат XY в пространстве движения. Обозначим: φ — угол между вектором $-z$ и осью OX, θ — угол между вектором u и осью OX (рис. 2). Дальнейшие рассуждения проводятся в плоскости $\mathrm{Lin}(z, v)$. Тогда метод пропорциональной навигации можно описать уравнением $\dot{\theta} = K\dot{\varphi}$, где $K \in [1, +\infty]$.

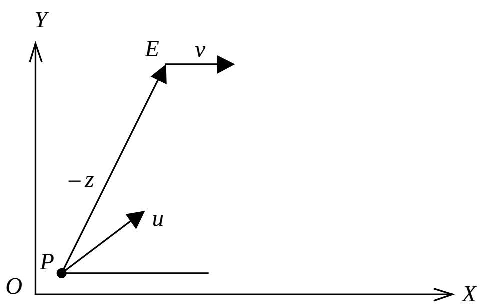

Рис. 2

При $K = 1$ и равных начальных значениях θ и φ получаем, что $\varphi(t) = \theta(t) \ \forall t \geq 0$, что соответствует методу кривой погони.

При $K = \infty$ (в этом случае перепишем формулу указанного метода в виде $\frac{1}{K} \cdot \dot{\theta} = \dot{\varphi}$; тогда, считая, что $|\dot{\theta}| \leq C < \infty$, получаем $\dot{\varphi} = 0$) это метод параллельного преследования.

Зафиксируем момент времени t, векторы $z(t)$ и $v(t)$. Тогда угловая скорость линии визирования $-z$ равна $\dot{\varphi} = \|z\|^{-1} \mathrm{ort}_{-z}(u - v)$. Рассмотрим угловую скорость $\dot{\varphi}$ как функцию управления преследователя u. При управлении u_1 (параллельное преследование) выполняется $\dot{\varphi}_1 \equiv 0$, поскольку $u_1 - v \in \mathrm{Lin}(-z)$

$\forall t, z, v$. При управлении u_0 (кривая погони) $\dot{\varphi}_0 = -\|z\|^{-1} \operatorname{ort}_{-z} v$, поскольку $u_0 \in \operatorname{Lin}(-z)$ $\forall t, z, v$. Каждому углу θ соответствует некоторое управление u_θ (будем считать, что его длина максимальна и равна a).

Рассмотрим угол $\theta_\lambda = \lambda\theta_1 + (1-\lambda)\theta_0$. Для того чтобы в методе пропорциональной навигации перейти от угловых скоростей к функции известных управлений методов параллельного преследования и кривой погони, необходимо показать, что управление u_λ, соответствующее углу θ_λ, совпадает с управлением метода пропорциональной навигации. Введем коэффициент

$$\eta(\lambda) = \frac{\cos(\pi/2 - \lambda\Delta\theta)}{\cos(\pi/2 - \Delta\theta)} = \frac{\sin(\lambda\Delta\theta)}{\sin(\Delta\theta)},$$

где $\lambda \in [0, 1]$ и $0 \le \eta(\lambda) \le 1$. Составляющая $\operatorname{ort}_{-z} u_\lambda = \eta(\lambda) \operatorname{ort}_{-z} u_1$.

Запишем угловую скорость для произвольного значения λ:

$$\dot{\varphi}_\lambda = \|z\|^{-1} \operatorname{ort}_{-z}(u_\lambda - v) = \|z\|^{-1}(\eta(\lambda) \operatorname{ort}_{-z} u_1 - \operatorname{ort}_{-z} v) =$$

$$= \|z\|^{-1}(\eta(\lambda) \operatorname{ort}_{-z} u_1 - \eta(\lambda) \operatorname{ort}_{-z} v - (1-\eta(\lambda)) \operatorname{ort}_{-z} v) =$$

$$= \|z\|^{-1}(\eta(\lambda)(\operatorname{ort}_{-z}(u_1 - v)) - (1-\eta(\lambda)) \operatorname{ort}_{-z} v) = \|z\|^{-1}(1-\eta(\lambda)) \operatorname{ort}_{-z} v.$$

Итак, $\dot{\varphi}_\lambda = \|z\|^{-1}(1-\eta(\lambda)) \operatorname{ort}_{-z} v$. Рассмотрим $\dot{\theta}_0(u_\lambda)$ — скорость поворота вектора u_0 при управлении u_λ:

$$\dot{\theta}_0(u_\lambda) = (1-\eta(\lambda))\dot{\theta}_0(u_0) = (1-\eta(\lambda))\dot{\theta}_0, \quad \dot{\theta}_\lambda = \lambda\dot{\theta}_1(u_\lambda) + (1-\lambda)\dot{\theta}_0(u_\lambda),$$

$$\dot{\theta}_1(u_\lambda) = 0, \quad \dot{\theta}_\lambda = (1-\lambda)\dot{\theta}_0(u_\lambda) = (1-\lambda)\dot{\varphi}_\lambda = \frac{1}{K}\dot{\varphi}_\lambda,$$

где $K = 1/(1-\lambda)$.

Таким образом, метод пропорциональной навигации можно переформулировать в терминах углов и управлений. Определим управление u_λ метода пропорциональной навигации следующим образом. Пусть $\Delta\theta$ — угол между управлениями u_1 и u_0 методов параллельного преследования и кривой погони, тогда $\lambda\Delta\theta$ — угол между векторами u_0 и u_λ (рис. 3):

$$u_\lambda = a\frac{\lambda u_1 + (1-\lambda)u_0}{\|\lambda u_1 + (1-\lambda)u_0\|}.$$

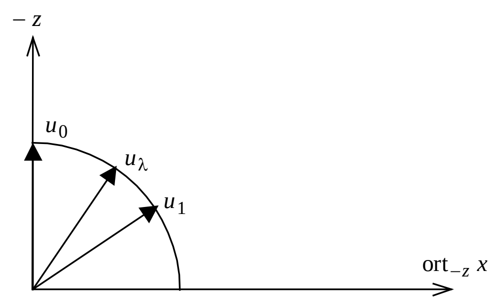

Рис. 3

Введем вспомогательную функцию $\mu(v, z, \lambda) = a / \| \lambda u_1 + (1-\lambda) u_0 \|$. Тогда $u_\lambda = \mu(v, z, \lambda)(\lambda u_1 + (1-\lambda) u_0)$.

Предложение 5. Функция $\mu(v, z, \lambda)$ непрерывна по аргументам z и λ; кроме того, выполняется $1 \le \mu(v, z, \lambda) \le \mu^*$, где $\mu^* = \cos^{-1}\left(\arccos\left(\sqrt{a^2-1}/a\right)/2\right)$.

Доказательство. Непрерывность функции $\mu(v, z, \lambda)$ по параметру λ очевидна. Непрерывность по аргументу z следует из непрерывности по нему управлений u_1 и u_0.

Рассмотрим угол между управлениями u_1 и u_0. В зависимости от управления v изменяется направление вектора u_1, а следовательно, и угол. Максимальное значение $\Delta\theta = \arccos\left(\sqrt{a^2-1}/a\right)$ (следствие из предложения 4) соответствует случаю v, ортогональному z. Поскольку множество U представляет собой круг, то максимальное отклонение нормы линейной комбинации $\| \lambda u_1 + (1-\lambda) u_0 \|$ от нормы u_λ выражается формулой $\max\limits_{v \in V} \mu(v, z, \lambda) = \cos\left(\left(\arccos \sqrt{a^2-1}/a\right)/2\right)$ (рис. 4).

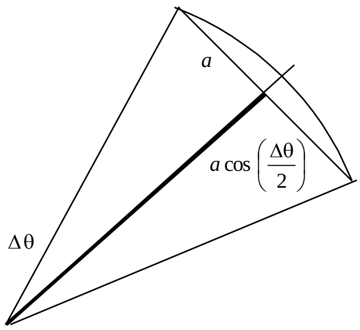

Рис. 4

Рассмотрим функцию $\alpha_\lambda(z, v) = A(z, u_\lambda, v)$ и исследуем ее связь с функциями $\alpha_1(z, v)$, $\alpha_0(z, v)$ и $A(z, u, v)$. Важное значение имеет утверждение, что все функции $\alpha_\lambda(z, v)$ при $\lambda \in [0, 1]$ равны максимуму $A(z, u, v)$ по управлению $u \in U$ при некотором условии.

Предложение 6. Для любого $\lambda \in [0, 1]$ такого, что $1 \ge \lambda^* > \lambda \ge 0$, выполняется $\alpha_\lambda(z, v) \ge \lambda^* \alpha_1(z, v) + (1-\lambda^*) \alpha_0(z, v)$. Если при этом управление $v \notin \mathrm{Lin}\,(-z)$, то указанное неравенство превращается в строгое для всех значений $z \ne 0$.

Доказательство. Действительно, по определению

$$\alpha_\lambda(z, v) = \max\left\{\frac{1}{\| z \|}\left(-\frac{z}{\| z \|}, u_\lambda - v\right), 0\right\}.$$

Согласно построению управления u_λ выполняется $(-z / \| z \|, u_\lambda - v) > 0$. Тогда

$$\alpha_\lambda(z, v) = \frac{1}{\| z \|}\left(-\frac{z}{\| z \|}, \mu(v, z, \lambda)(\lambda u_1 + (1-\lambda) u_0) - v\right) =$$

 ISSN 0572-2691

$$=\frac{1}{\|z\|}\left(-\frac{z}{\|z\|},\,(1+\mu(v,\,z,\,\lambda)-1)(\lambda u_1+(1-\lambda)u_0)-v\right)=$$

$$=\frac{1}{\|z\|}\left(-\frac{z}{\|z\|},\,\lambda u_1+(1-\lambda)u_0-v+(\mu(v,\,z,\,\lambda)-1)(\lambda u_1+(1-\lambda)u_0)\right)=$$

$$=\frac{1}{\|z\|}\left(-\frac{z}{\|z\|},\,\lambda(u_1-v)+(1-\lambda)(u_0-v)+(\mu(v,\,z,\,\lambda)-1)(\lambda u_1+(1-\lambda)u_0)\right).$$

Таким образом, $\alpha_\lambda(z,\,v)=\lambda\alpha_1(z,\,v)+(1-\lambda)\,\alpha_0(z,\,v)+\|z\|^{-1}(-z/\|z\|,(\mu(v,\,z,\,\lambda)-$ $-1)(\lambda u_1+(1-\lambda)u_0))$.

Если $\lambda<\lambda^*$, то $\lambda=\lambda^*-C$, $C>0$. Тогда $\alpha_\lambda(z,v)=\lambda^*\alpha_1(z,v)+(1-\lambda^*)\times$ $\times\alpha_0(z,v)+C(\alpha_0(z,v)-\alpha_1(z,v))+\|z\|^{-1}(-z/\|z\|,(\mu(v,z,\lambda)-1)(\lambda u_1+(1-\lambda)u_0))$. Заметим, что

$$C(\alpha_0(z,\,v)-\alpha_1(z,\,v))\geq 0,\quad \frac{1}{\|z\|}\left(-\frac{z}{\|z\|},\,(\mu(v,\,z,\,\lambda)-1)(\lambda u_1+(1-\lambda)u_0)\right)\geq 0.$$

Следовательно, $\alpha_\lambda(z,\,v)\geq\lambda^*\alpha_1(z,\,v)+(1-\lambda^*)\,\alpha_0(z,\,v)$, причем если управление $v\notin\mathrm{Lin}\,(-z)$, то $C(\alpha_0(z,\,v)-\alpha_1(z,\,v))>\varepsilon>0$, что доказывает предложение.

Следствие 2. Для всех значений $z,v,\lambda,$ при которых функция $\alpha_\lambda(z,v)$ существует, ее можно представить в виде $\alpha_\lambda(z,v)=\lambda\alpha_1(z,v)+(1-\lambda)\alpha_0(z,v)+$ $+\|z\|^{-1}(-z/\|z\|,(\mu(v,z,\lambda)-1)(\lambda u_1+(1-\lambda)u_0))$.

Рассмотрим выражение $(\mu(v,z,\lambda)-1)\|z\|^{-1}(-z/\|z\|,(\lambda u_1+(1-\lambda)u_0))$. Введем коэффициент $K(v,\,z,\,\lambda)$ такой, что

$$(\mu(v,\,z,\,\lambda)-1)\frac{1}{\|z\|}\left(-\frac{z}{\|z\|},\,(\lambda u_1+(1-\lambda)u_0)\right)=K(v,\,z,\,\lambda)(\lambda\alpha_1(z,\,v)+(1-\lambda)\,\alpha_0(z,v)).$$

Тогда функцию $\alpha_\lambda(z,v)$ можно представить в виде $\alpha_\lambda(z,v)=$ $=(K(v,z,\lambda)+1)(\lambda\alpha_1(z,v)+(1-\lambda)\alpha_0(z,v))$.

Предложение 7. Для всех $\lambda\in(0,1)$ выполняется неравенство $\alpha_1(z,v)\leq$ $\leq\alpha_\lambda(z,v)\leq\alpha_0(z,v)$. Если при этом управление $v\notin\mathrm{Lin}(-z)$, то $\alpha_1(z,v)<$ $<\alpha_\lambda(z,v)<\alpha_0(z,v)\;\;\forall z\neq 0$.

Доказательство. Рис. 5 иллюстрирует соответствие векторов u_1,u_0,u_λ и функций $\alpha_1(z,v),\alpha_0(z,v),\alpha_\lambda(z,v)$. Неравенство $\alpha_\lambda(z,v)\geq\alpha_1(z,v)$ следует из предложения 6 для $\lambda^*=1$. Покажем, что $\alpha_\lambda(z,v)\leq\alpha_0(z,v)\;\;\forall\lambda\in(0,1)$. Поскольку $\alpha_0(z,v)=\max\limits_{u\in U}A(z,u,v)$, то, конечно, $\alpha_0(z,v)\geq A(z,u_\lambda,v)=\alpha_\lambda(z,v)$.

Осталось заметить, что если $\alpha_\lambda(z,v)=\alpha_0(z,v)$ для каких-то значений z,λ, то $\|z\|^{-1}(-z/\|z\|,u_\lambda-v)=\|z\|^{-1}(-z/\|z\|,u_0-v)$. Преобразовав это выражение, получаем $(-z/\|z\|, u_\lambda - v) = (-z/\|z\|, u_0 - v)$, или $(-z/\|z\|, u_\lambda) = a$. Поскольку $\|u_\lambda\| = a$, то $u_\lambda \in \mathrm{Lin}(-z)$. Но по определению управления u_λ это возможно только в случае, если $u_1 \in \mathrm{Lin}(-z)$. Следовательно, $\alpha_\lambda(z, v) \neq \alpha_0(z, v)$ для управлений $v \notin \mathrm{Lin}(-z)$. Аналогично доказывается, что $\alpha_\lambda(z, v) \neq \alpha_1(z, v)$ для $v \notin \mathrm{Lin}(-z)$.

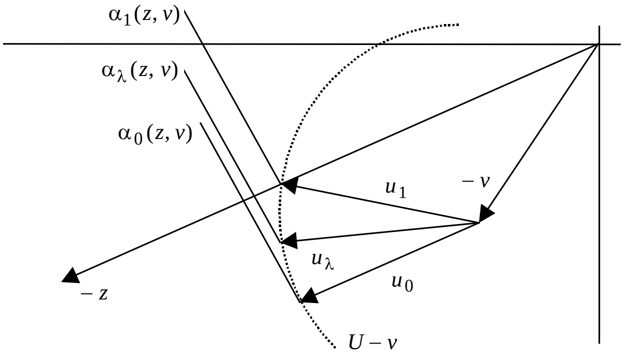

Рис. 5

Предложение 8. Пусть

$$U^* = \{u \in U \,|\, u = \arg\max_{u\in U} (\mathrm{pr}_{-z}[(u + u_0 - \mu(v, z, \lambda)(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_0)])\},$$

тогда справедливо равенство $\alpha_\lambda(z, v) = \max\limits_{u\in U^*} A(z, u, v)$.

Доказательство. Вначале проверим это предложение для значений $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$. Действительно, если $\lambda = 0$, то $U^* = \{u \in U \,|\, u = \arg\max\limits_{u\in U} (\mathrm{pr}_{-z}\, u)\}$, т.е. $U^* = \{u_0\}$. Если же $\lambda = 1$, то $U^* = \{u \in U \,|\, u = \arg\max\limits_{u\in U} (\mathrm{pr}_{-z}(u - u_1 + u_0))\}$. Максимум достигается при $u = u_1$, поскольку проекция $\mathrm{pr}_{-z}\, u_0$ наибольшая. Пусть $\lambda \in (0, 1)$, тогда

$$U^* = \{u \in U \,|\, u = \arg\max_{u\in U} (\mathrm{pr}_{-z}[(u + u_0 - \mu(v, z, \lambda)(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_0))])\}.$$

По тем же соображениям $u_\lambda = \mu(v, z, \lambda)(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_0)$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь время окончания игры. Согласно [3], время окончания игры определяется равенством

$$T(z) = \inf\left\{t \geq 0 : \int_0^t \inf_{v\in V} \alpha(t, \tau, z, v)\, d\tau \geq 1\right\},$$

где $\alpha(t, \tau, z, v)$ — классическая разрешающая функция. В случае простого движения игроков $\alpha(t, \tau, z, v) = \alpha_1(z, v)$. Таким образом, время окончания выражается формулой

 ISSN 0572-2691

$$T(z)=\inf\left\{t\ge 0:\int_0^t \inf_{v\in V}\alpha_1(z,v)\,d\tau\ge 1\right\}.$$

Покажем, что время, введенное этой формулой, совпадает со временем окончания игры. Действительно, выполняется соотношение $\inf\limits_{v\in V}\alpha_1(z,v)=(a-1)/\|z\|$. Следовательно, $T(z)=\|z\|/(a-1)$. Было доказано, что $\alpha_1(z,v)\le\alpha_\lambda(z,v)$ для $\lambda\in[0,1]$; более того, легко видеть, что $\inf\limits_{v\in V}\alpha_\lambda(z,v)=(a-1)/\|z\|\ \forall\lambda$. Таким образом, при управлении убегающего, равном $v=z/\|z\|$, все функции $\alpha_\lambda(z,v)$ совпадают. Это означает, что время метода пропорциональной навигации, определяемое как время встречи при наихудшей стратегии убегающего, не отличается от времени параллельного преследования. Пусть убегающий движется не оптимальным образом, а с некоторым управлением $v=v(t)$. Тогда

$$z(t)=z^0+\int_0^t \dot z\,d\tau=z^0+\int_0^t (u_\lambda-v)\,d\tau=z^0+\int_0^t(-\alpha_\lambda(z,v)\,z+\beta_\lambda(z,v))\,d\tau.$$

Если для некоторого момента времени T траектория попала на терминальное множество, т.е. $z(T)=0$, то $\int_0^T(\alpha_\lambda(z(\tau),v)\,z(\tau)-\beta_\lambda(z,v))\,d\tau=z^0.$

Разделим обе части этого равенства на величину $\|z^0\|$ и умножим скалярно на вектор $d=z^0/\|z^0\|$. Тогда

$$\int_0^T\alpha_\lambda(z(\tau),v)\left(\frac{z(\tau)}{\|z^0\|},\frac{z^0}{\|z^0\|}\right)d\tau-\int_0^T\left(\frac{\beta_\lambda(z,v)}{\|z^0\|},\frac{z^0}{\|z^0\|}\right)d\tau=1.$$

Итак, если известны управление убегающего $v(\cdot)$ и метод преследования (значение λ), можно определить время окончания игры следующим выражением:

$$T(z^0,\lambda,v(\cdot))=\inf\left\{t\ge 0:\int_0^t\alpha_\lambda(z(\tau),v(\tau))\left(\frac{z(\tau)}{\|z^0\|},\frac{z^0}{\|z^0\|}\right)d\tau-\int_0^t\left(\frac{\beta_\lambda(z,v)}{\|z^0\|},\frac{z^0}{\|z^0\|}\right)d\tau\ge 1\right\},$$

где $z(\tau)=z^0+\int_0^\tau(u_\lambda-v)\,d\theta$. Заметим, что $\|z^0\|/(a+1)\le T(z^0,\lambda,v(\cdot))\le\|z^0\|/(a-1)$.

Очевидно, что при $\lambda=1$ это время совпадает со временем параллельного преследования.

Таким образом, в статье доказана ограниченность времени методов пропорциональной навигации при любом значении свободного параметра. Указанный способ определения управления пропорциональной навигации позволяет перенести его и на случаи более сложных движений, что будет предметом дальнейших исследований.

О.П. Ігнатенко, А.О. Чикрій

ДО ОБГРУНТУВАННЯ МЕТОДУ ПРОПОРЦІЙНОЇ НАВІГАЦІЇ В ЗАДАЧІ ПРОСТОГО ПЕРЕСЛІДУВАННЯ

Розглядається метод пропорційної навігації для задачі простого переслідування в n-мірному просторі. Досліджено його зв'язок з методами паралельного переслідування та кривої погоні. Сформульовано параметричне рівняння, яке описує всі вказані методи переслідування. Введено та обгрунтовано розв'язуючу функцію методу пропорційної навігації. Доведено обмеженість часу сімейства методів пропорційної навігації.

A.P. Ignatenko, A.A. Chikriy

ON SUBSTANTIATION OF METHOD OF PROPORTIONAL NAVIGATION IN SIMPLE PURSUIT PROBLEM

This work deals with method of proportional navigation for simple pursuit problem in n-dimensional space. It was investigated interconnection with method of parallel pursuit and method of line of sight. Parametric equation that includes all methods mentioned above was formulated. There was defined and substantiated resolved function of method of proportional navigation. And finally it was proved finiteness of time of family of methods of proportional navigation.

1. *Локк А.С.* Управление снарядами. — М. : Гостехиздат, 1957. — 544 с.
2. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М. : Наука, 1981. — 544 с.
3. *Чикрий А.А.* Конфликтно управляемые процессы. — Киев : Наук. думка, 1992. — 384 с.
4. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений. — М. : Наука, 1970. — 420 с.
5. *Проскуряков И.В.* Сборник задач по линейной алгебре. — М. : Наука, 1967. — 384 с.
6. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. — М. : Наука, 1968. — 720 с.

Получено 17.10.2003