

## ПОСТРОЕНИЕ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ ПАРАМЕТРОВ, КОТОРЫЕ НЕЛИНЕЙНО ВХОДЯТ В КОЭФФИЦИЕНТЫ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

**Введение.** Для исследования реальных систем автоматического управления решения задачи определения устойчивости фиксированной линейной дискретной системы недостаточно. Это обусловлено тем, что параметры реального объекта управления в процессе работы могут изменяться и на практике тяжело установить параметры цифровых регуляторов в точном соответствии с параметрами объекта. Поэтому практически важно — построение области устойчивости (ОУ) в пространстве исследуемых параметров.

Весьма удобным методом построения области устойчивости дискретных линейных систем в плоскости двух параметров является метод дискретного  $D$ -разбиения [1, 2], который разрешает определить области, отвечающие заданному числу корней характеристического уравнения внутри единичной окружности в случае, когда параметры системы входят в коэффициенты характеристического полинома линейно, и так, что уравнение границы дискретного  $D$ -разбиения можно привести к виду

$$G(e^{j\bar{\omega}}) = \nu P(e^{j\bar{\omega}}) + \mu Q(e^{j\bar{\omega}}) + L(e^{j\bar{\omega}}) = 0,$$

где  $\nu$  и  $\mu$  — изменяемые параметры, влияние на устойчивость которых нас интересует,  $\bar{\omega} = \omega T$  — относительная частота,  $T$  — период дискретизации.

В отдельных случаях для непрерывных систем, параметры которых входят нелинейно в виде их произведения в характеристическое уравнение, задачу удастся свести к линейной в пространстве двух параметров. Известно, что в общем случае коэффициенты характеристического уравнения дискретной системы зависят от параметров системы нелинейно. Кроме того, часто в коэффициенты передаточной функции оптимальных цифровых регуляторов нелинейно входят параметры объекта управления [3], поэтому свести определение области устойчивости цифровой системы в пространстве двух, а тем более трех, таких параметров к чисто линейной задаче не удастся.

Когда система имеет высокий порядок и параметры, в пространстве которых определяются границы области устойчивости (ГОУ), входят нелинейно, применяют численные методы с использованием ЭВМ [3–6]. Эти методы позволяют решить задачу построения области устойчивости линейных систем перебором большого числа точек на плоскости параметров с помощью принципа взаимноперпендикулярной ориентации (при котором направление изменения параметров осуществляется в четырех возможных направлениях: вверх, вниз, влево, вправо, т.е. по сторонам квадрата) [4, 5], «гусеничного» метода (последовательное продвижение вдоль границы ОУ с помощью поступательных перемещений и поворотов) и симплексного принципа слежения [4]. При этом вычислительную процедуру определения устойчивости или неустойчивости системы для разных значений параметров, которые соответствуют рассматриваемым точкам, предлагается проводить по одному из известных алгоритмов (Гурвица, Рауса, Льенара–Шипара и т.д.) или вычислением корней характеристического уравнения.

В работе [3] перебор точек в плоскости параметров цифровой системы проводят вращением по эллипсу вектора вокруг известной точки границы ОУ, конец которого с помощью решения характеристического уравнения определяет новые значения кривой этой границы.

Очевидно, что метод перебора параметров наиболее общий, неэкономичен с точки зрения машинной реализации при повышении точности определения ГОУ и не гарантирует корректности результата. Еще больше увеличиваются затраты вычислительных ресурсов при определении методом перебора границы ОУ цифровых систем, что обусловлено сложной нелинейной зависимостью коэффициентов характеристического уравнения от параметров системы [3]. Тогда эффективно определение области устойчивости цифровых систем в пространстве параметров, которые нелинейно входят в коэффициенты характеристического уравнения, с помощью ЭВМ с использованием известных методов, адаптированных к новым условиям.

**Постановка задачи.** Ставится задача построения области устойчивости в плоскости параметров линейных дискретных систем, характеристическое уравнение которых в общем случае имеет вид

$$D(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0, \quad (1)$$

где все коэффициенты вещественные и нелинейно зависят от параметров объекта управления. При решении данной задачи, в отличие от известных численных методов, исключается перебор точек плоскости параметров, которые не принадлежат границе области устойчивости.

Для построения области устойчивости на плоскости двух параметров, один из которых нелинейно, а другой линейно входят в коэффициенты уравнения (1), используем уравнение границы  $D$ -разбиения по одному параметру

$$D(j\bar{\omega}) = kH(j\bar{\omega}) + L(j\bar{\omega}) = 0, \quad (2)$$

где  $k$  — параметр, который линейно входит в коэффициенты и, как правило, служит коэффициентом корректирующего звена, или коэффициентом передачи объекта управления.

В отличие от работ [3, 4], где  $D$ -разбиение используется для определения устойчивости или неустойчивости системы при параметрах, которые соответствуют различным точкам перебора в плоскости двух параметров, в данной работе рассмотрим задачу аналитического определения множества значений линейного параметра  $k$  с помощью уравнения (2) для соответствующего множества предварительно заданных значений некоторого нелинейно входящего параметра  $v$  ( $v_{\min} < v < v_{\max}$ ). Эти параметры в совокупности с расчетными значениями параметра  $k$  определяют точки точной (с погрешностью вычислений) границы области устойчивости в плоскости параметров  $k$  и  $v$ .

Таким образом, задача построения ГОУ в плоскости двух параметров сводится к решению задачи дискретного  $D$ -разбиения по одному параметру.

Вычисление значений параметров  $k$  и построение границы ОУ будем осуществлять без построения кривых  $D$ -разбиения с помощью решения уравнений, которые определяют эти кривые.

Рассматривается задача использования данного подхода для построения ОУ в плоскости двух параметров, нелинейно входящих в коэффициенты характеристического уравнения, и в пространстве двух нелинейных и одного линейно входящего параметров.

**Решение поставленной задачи.** Для определения границы области устойчивости дискретной линейной системы в плоскости параметров, один из которых входит линейно, а другой нелинейно в коэффициенты характеристического уравнения, уравнение границы  $D$ -разбиения по одному параметру, учитывая, что  $e^{jk\bar{\omega}} = \cos k\bar{\omega} + j \sin k\bar{\omega}$ , представим как  $D(j\bar{\omega}) = k(H_1(\bar{\omega}) + jH_2(\bar{\omega})) - (L_1(\bar{\omega}) + jL_2(\bar{\omega})) = 0$ , где в общем виде

$$\begin{aligned} L_1(\bar{\omega}) &= b_n \cos n\bar{\omega} + b_{n-1} \cos (n-1)\bar{\omega} + \dots + b_1 \cos \bar{\omega} + b_0, \\ L_2(\bar{\omega}) &= b_n \sin n\bar{\omega} + b_{n-1} \sin (n-1)\bar{\omega} + \dots + b_1 \sin \bar{\omega}, \\ H_1(\bar{\omega}) &= c_r \cos r\bar{\omega} + c_{r-1} \cos (r-1)\bar{\omega} + \dots + c_1 \cos \bar{\omega} + c_0, \\ H_2(\bar{\omega}) &= c_r \sin r\bar{\omega} + c_{r-1} \sin (r-1)\bar{\omega} + \dots + c_1 \sin \bar{\omega}. \end{aligned} \quad (3)$$

Отсюда получаем выражение для определения линейно зависимого параметра  $k$ :

$$k = \frac{L_1(\bar{\omega})H_1(\bar{\omega}) + L_2(\bar{\omega})H_2(\bar{\omega})}{H_1(\bar{\omega})^2 + H_2(\bar{\omega})^2} + j \frac{L_2(\bar{\omega})H_1(\bar{\omega}) - L_1(\bar{\omega})H_2(\bar{\omega})}{H_1(\bar{\omega})^2 + H_2(\bar{\omega})^2} = U(\bar{\omega}) + jV(\bar{\omega}).$$

Поскольку параметр  $k$  — действительная, физически реальная величина, то задачу определения границы области  $D$ -разбиения можно перевести в задачу определения отрезка устойчивости, которым является отрезок вещественной оси, лежащий в области устойчивости плоскости  $k$ .

Граничные значения параметра  $k$  отрезка устойчивости будем вычислять без построения кривых  $D$ -разбиения из выражения

$$k = \frac{L_1(\bar{\omega})H_1(\bar{\omega}) + L_2(\bar{\omega})H_2(\bar{\omega})}{H_1(\bar{\omega})^2 + H_2(\bar{\omega})^2}, \quad (4)$$

которое, после некоторых преобразований и с учетом (4), представим в общем виде

$$k = \frac{\sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^n c_i b_j \cos (j-i)\bar{\omega}}{\sum_{i=0}^r c_i^2 + 2 \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=i+1}^n c_i b_j \cos (j-i)\bar{\omega}}. \quad (5)$$

Значения относительной частоты  $\bar{\omega}$ , соответствующие граничным значениям  $k$ , определяется уравнением

$$L_2(\bar{\omega})H_1(\bar{\omega}) - L_1(\bar{\omega})H_2(\bar{\omega}) = 0,$$

которое, с учетом (4) после преобразований, представим в виде

$$A_r \sin r\bar{\omega} + A_{r-1} \sin (r-1)\bar{\omega} + \dots + A_1 \sin \bar{\omega} = 0, \quad (6)$$

где

$$A_k = \sum_{i=0, j=m}^{i=r, j=n} c_i b_j - \sum_{i=m, j=0}^{i=r, j=n-1-r} c_i b_j, \quad m = 1, 2, 3, \dots, n,$$

или после некоторых преобразований — как

$$\sin \bar{\omega} (B_r \cos^{r-1} \bar{\omega} + B_{r-1} \cos^{r-2} \bar{\omega} + \dots + B_2 \cos \bar{\omega} + B_1) = 0, \quad (7)$$

где коэффициенты  $B_i$  — комбинации сумм коэффициентов  $A_i$  и в общем виде для  $r \leq 5$  равны:

$$B_r = 2^{r-1} A_r,$$

$$B_{r-1} = 2^{r-2} A_{r-1},$$

$$B_{r-2} = 2^{r-3} A_{r-2} - (r-2) 2^{r-3} A_r,$$

$$B_{r-3} = 2^{r-4} A_{r-3} - (r-3) 2^{r-4} A_{r-1},$$

$$B_{r-4} = 2^{r-5} A_{r-4} - (r-4) 2^{r-5} A_{r-2} + (r-4) 2^{r-5} A_r,$$

коэффициенты  $A_{r-n}$  при  $(r-n) \leq 0$  равны нулю.

Отрезок устойчивости, отвечающий числу  $n$  корней характеристического уравнения внутри единичной окружности ( $n$  — порядок системы), включает в себя номинальное значение  $k_N$ , т.е.  $k' < k_N < k''$ , где  $k'$  и  $k''$  — граничные значения отрезка, при номинальных значениях остальных параметров. Поэтому, используя приведенное выше неравенство, соотношение (5) и уравнение (6), можно получить границы отрезка устойчивости параметра  $k$  линейной дискретной системы без построения границы дискретного  $D$ -разбиения.

Очевидно, что граничные значения параметра  $k'$  и  $k''$  отрезка устойчивости для конкретно заданного нелинейно входящего параметра  $v$ , которые вычисляются по формуле (5) для значений  $\bar{\omega}$  из уравнения (6), в плоскости параметра  $v$  и параметра  $k$  являются точками точной (с погрешностью вычислений) границы области устойчивости в этой плоскости (рис. 1).

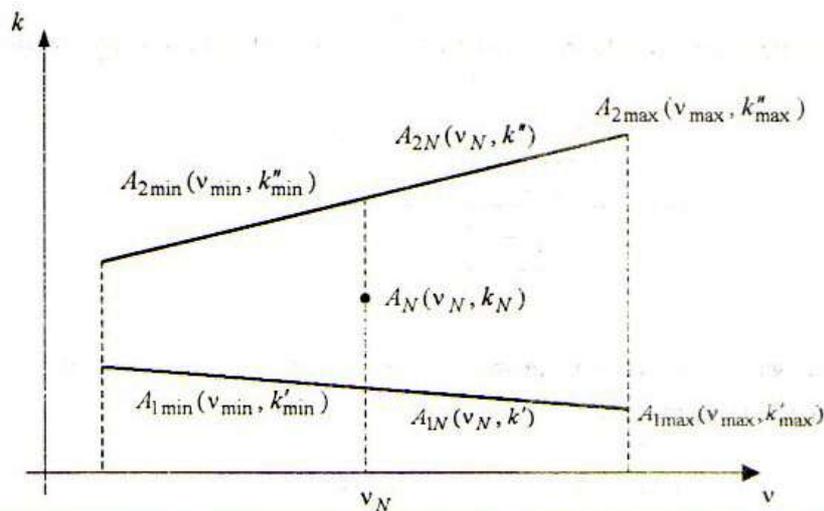


Рис. 1

Если изменять значение нелинейно входящего параметра  $v$  от  $v_{\min}$  до  $v_{\max}$  с заданным шагом  $\Delta v$  аналогично, как и для номинального значения  $v_N$ , используя уравнение (6) и формулу (5), получим совокупность граничных точек отрезков устойчивости параметра  $k$ , которые в плоскости параметров  $k$  и  $v$  совместно с соответствующими значениями  $v_{\min} \leq v \leq v_{\max}$  определяют точную границу области устойчивости (рис. 1).

Используя описанный подход, получим область устойчивости в плоскости линейно входящего параметра  $k$  и другого, нелинейно входящего в коэффициенты характеристического уравнения, параметра  $\mu$ .

По этим областям можно определить область в пространстве трех параметров:  $k$ ,  $v$  и  $\mu$ , в которой все корни характеристического уравнения имеют модуль меньше единицы. Изменяя нелинейно входящие параметры системы, можно выделить область устойчивости в пространстве параметров  $k$ ,  $v$  и  $\mu$ , при некоторой неопределенности других параметров.

Для того чтобы обозначить границу области устойчивости в плоскости двух параметров, нелинейно входящих в коэффициенты характеристического уравнения, необходимо для заданных значений  $v_{\min} \leq v \leq v_{\max}$  одного из параметров вычислить соответствующие им значения параметра  $\mu$ , для этого следует соответствующее количество раз решить относительно  $\bar{\omega}$  и  $\mu$  систему трансцендентных уравнений

$$k - \frac{\sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^n c_i b_j \cos(j-i)\bar{\omega}}{\sum_{i=0}^r c_i^2 + 2 \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=i+1}^n c_i b_j \cos(j-i)\bar{\omega}} = 0, \quad (8)$$

$$A_r \sin r \bar{\omega} + A_{r-1} \sin (r-1) \bar{\omega} + \dots + A_1 \sin \bar{\omega} = 0.$$

Полученные в результате решения системы (8) значения нелинейно входящего параметра  $\mu$  совместно с соответствующими им значениями параметра  $v$  определяют границу области устойчивости в плоскости параметров  $[v, \mu]$ .

Для решения системы уравнений обычно используют численный метод итераций. При этом возникает вопрос о подходящем выборе начальных приближений, что практически очень трудно и в каждом случае необходим индивидуальный подход. Успех не гарантируется, даже если решение системы существует, тем более, что заранее этого можно и не знать.

Поэтому для построения ГОУ в плоскости двух нелинейно входящих параметров можно использовать предложенный выше подход, решая обратную задачу. Очевидно, что совокупность значений нелинейных параметров  $v_i, \mu_i$ , которые соответствуют одному и тому же значению линейного параметра  $k$ , полученному из уравнений (5), (7), отвечает точкам границы области устойчивости в плоскости этих параметров. Определение границы области устойчивости в плоскости параметров  $v$  и  $\mu$  для заданного значения  $k_{\text{given}}$  начинаем с вычисления с помощью описанного выше подхода начального значения  $\mu_0$  границы ОУ при  $v_0 = v_{\min}$ . Далее, для следующего значения  $v = v_0 + \Delta v$  ГОУ перебором параметра  $\mu$  со сменным шагом  $\Delta \mu$  в направлении, которое зависит от характера изменения параметра  $k$  ГОУ при перемене параметра  $\mu$ , устанавливаем такое значение  $\mu$ , при котором имеет место выражение  $|k_{\text{given}} - k| \leq \Delta k$ , где  $\Delta k$  — предварительно заданное значение точности построения ГОУ. Таким образом, в отличие от известных численных методов, исключается перебор точек по одному из параметров, что уменьшает количество точек перебора, и отсутствует процедура определения устойчивости или неустойчивости системы, что сокращает время определения границы устойчивости.

**Пример.** Для иллюстрации возможности практического использования предложенного подхода рассмотрим построение границы области устойчивости системы стабилизации по углу тангажа самолета, когда заданы характеристики точности и качества процесса стабилизации для конкретного 34-го режима полета [5].

Для сравнительного анализа построим границу области устойчивости исследуемой системы методом перебора точек в плоскости параметров цифровой системы [3]. Суть метода заключается в том, что вокруг любой известной точки на границе устойчивости по эллипсу вращается вектор  $R = KR \cos \varphi + jMR \sin \varphi$ , устанавливает новые значения кривой ГОУ в плоскости двух параметров. Определение устойчивости или неустойчивости системы в точках перебора проводится вычислением корней характеристического многочлена  $f(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n$  при за-

данном максимально допустимом отклонении модулей этих корней  $||z_i| - 1| \leq \varepsilon$ .

Структурная схема дискретно-аналоговой системы стабилизации самолета по углу тангажа представлена на рис. 2.

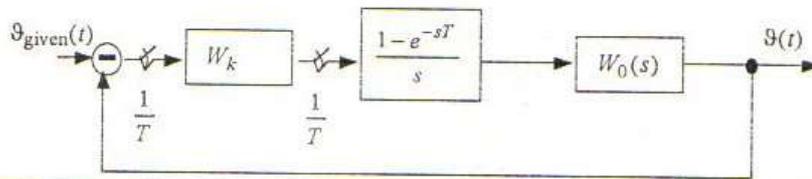


Рис. 2

Корректирующее звено, обеспечивающее заданные характеристики точности и качества процесса стабилизации, имеет передаточную функцию [5]

$$W_k(z) = \frac{k_1 z - k_2}{k_3 z - k_4} = \frac{0,540 z - 0,034}{z - 0,980},$$

а передаточная функция экстраполятора (фиксатора) нулевого порядка имеет вид  $\frac{1 - e^{-sT}}{s}$ . Фиксатор относят к непрерывной части системы с передаточной функцией  $W_0(s)$ , которую в этом случае называют приведенной непрерывной частью.

Передаточная функция замкнутой дискретной системы стабилизации самолета по углу тангажа имеет вид

$$W(z) = \frac{(c_2 z^2 + c_1 z + c_0)(k_1 z - k_2)}{(d_3 z^3 + d_2 z^2 + d_1 z + d_0)(k_3 z - k_4) + (c_2 z^2 + c_1 z + c_0)(k_1 z - k_2)}, \quad (9)$$

где

$$c_0 = -NMA + NMTB - MC - ND,$$

$$c_1 = (NM + N + M)A - (N + M)BT + (2M + 1)C + (2N + 1)D,$$

$$c_2 = -(N + M + 1)A + TB - (M + 2)C - (N + D)D,$$

$$d_0 = -NM, \quad d_1 = (N + M + NM), \quad d_2 = -(1 + N + M), \quad d_3 = 1, \quad (10)$$

$$A = \frac{\alpha}{a^2 b^2} (ab - ad - bd), \quad B = \frac{\alpha d}{ab}, \quad C = \frac{\alpha(a-d)}{a^2(a-b)},$$

$$D = \frac{\alpha}{b^2} \frac{(d-b)}{(a-b)}, \quad N = e^{-at}, \quad M = e^{-bT},$$

а  $T$  — период дискретизации (квантирования). Коэффициенты  $\alpha$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $d$  определяются аэродинамическими параметрами самолета:

$$\alpha = \frac{k_{\omega z}}{\omega_{1p}} \omega_p^2, \quad d = \omega_{1p},$$

$$a = \left( \xi_p \omega_p + \mu_v \frac{k_{\omega z} \omega_p^2}{2\omega_{1p}} \right) - \sqrt{\left( 2\xi_p \omega_p + \mu_v \frac{k_{\omega z} \omega_p}{2\omega_{1p}} \right)^2 - (1 + \mu_v k_{\omega z}) \omega_p^2}, \quad (11)$$

$$b = \left( \xi_p \omega_p + \mu_v \frac{k_{\omega z} \omega_p^2}{2\omega_{1p}} \right) + \sqrt{\left( 2\xi_p \omega_p + \mu_v \frac{k_{\omega z} \omega_p}{2\omega_{1p}} \right)^2 - (1 + \mu_v k_{\omega z}) \omega_p^2}.$$

Аэродинамические параметры самолета F-101B, которые нелинейно входят в коэффициенты передаточной функции для 34-го режима, равны [5]:

$$n_{\omega z} = 0,684; \quad n_{\alpha} = 6,48; \quad n_s = 12,046; \quad z_{\alpha} = 0,480; \quad z_{\delta} = 0,0666;$$

$$\omega_p = 2,61; \quad \xi_p = 0,25; \quad \omega_{1p} = 0,44; \quad \mu_v = 0,39.$$

Только параметры корректирующего звена входят линейно в характеристическое уравнение, а все аэродинамические параметры самолета и период дискретизации  $T$  согласно (10), (11) входят в коэффициенты передаточной функции (9) нелинейно. Поэтому исследуем влияние на устойчивость системы коэффициента  $k_1$  корректирующего звена при различных значениях периода дискретизации  $0 < T < T_{\max} = 1,0$  с. Для этого сначала характеристическое уравнение запишем

$$D(z) = k_1 H(z) - L(z) = 0,$$

где  $H(z) = c_2 z^3 + c_1 z^2 + c_0 z$  — полином, в который входит  $k_1$  и  $L(z) = b_4 z^4 + b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0$  (где  $b_4 = -k_3 d_3$ ,  $b_3 = k_4 d_3 - k_3 d_2$ ,  $b_2 = k_2 c_2 - k_3 d_1 + k_4 d_2$ ,  $b_1 = k_2 c_1 - k_3 d_0 + k_4 d_2$ ,  $b_0 = c_0 k_2 + k_4 d_0$ ) — полином, который не зависит от  $k_1$ .

Граничные значения параметра  $k_1$  отрезков устойчивости для различных значений  $0 < T < T_{\max}$  определяются из соотношения (5), которое для исследуемой системы имеет вид

$$k = \frac{\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^4 c_i b_j \cos(j-i)\bar{\omega}}{\sum_{i=0}^2 c_i^2 + 2 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=i+1}^4 c_i b_j \cos(j-i)\bar{\omega}}. \quad (12)$$

Для того чтобы вычислить значения относительной частоты  $\bar{\omega}$ , при которых  $k_1$  отвечает граничным значениям, нужно решить относительно  $\bar{\omega}$  уравнение  $L_2(\bar{\omega})H_1(\bar{\omega}) - L_1(\bar{\omega})H_2(\bar{\omega}) = 0$ , которое после преобразований имеет вид

$$\sin \bar{\omega} (B_3 \cos^2 \bar{\omega} + B_2 \cos \bar{\omega} + B_1) = 0, \quad (13)$$

где  $B_1 = A_1 - A_2$ ,  $B_2 = 2A_2$ ,  $B_3 = 4A_3$  и  $A_1 = b_4 c_2 + b_3 c_1 - b_2 c_2 - c_1 b_1 + b_2 c_0 - c_0 b_0$ ,  $A_2 = b_3 c_0 + c_1 b_4 - c_1 b_0 - c_2 b_1$ ,  $A_3 = b_4 c_0 - c_2 b_0$ .

Совокупность граничных значений параметра  $k_1$  для различных значений параметра  $T$  ( $0 < T \leq T_{\max} = 1,0$  с шагом изменения  $\Delta T = 0,025$ ), нелинейно входящего в коэффициенты характеристического уравнения системы, совместно с этими значениями  $T$  определяют в плоскости параметров  $[T, k_1]$  границы точной области устойчивости системы, полученные: 1 — предложенным методом; 2 — методом перебора точек (рис. 3).

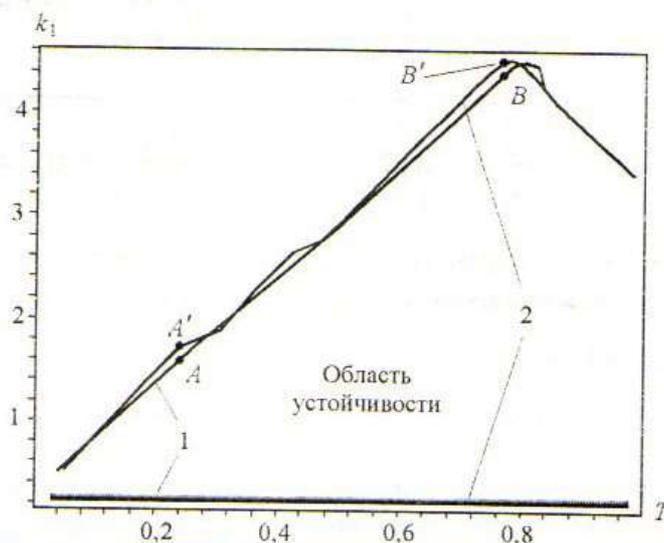


Рис. 3

На этом же рисунке показана ГОУ, построенная методом перебора [3], с исходными параметрами: начальный угол  $\varphi_0 = 0$ ; дискретность изменения угла поворота  $\Delta\varphi = \pi/180$ ; дискретность изменения параметра  $\Delta R = 0,05$ , максимально допустимое отклонение корней характеристического уравнения  $\varepsilon = ||z_i| - 1| = 0,01$ , максимальные значения параметров системы  $k_{\max} = 4,5$ ,  $T_{\max} = 0,9$ ,  $M = 1$ ,  $K = 1$ .

На границе ОУ, построенной предложенным подходом, в точках  $A$ , где  $T = 0,25$ ,  $k_1 = 1,6392$ , и  $B$ , где  $T = 0,77$ ,  $k_1 = 4,4525$ , модули корней характеристического уравнения равны:

$$A: |z_1| = 1,0000; |z_2| = 1,0000; |z_3| = 0,0285; |z_4| = 0,7038;$$

$$B: |z_1| = 0,0409; |z_2| = 0,9999; |z_3| = 0,9999; |z_4| = 0,7957.$$

На границе ОУ, построенной методом перебора, в точках  $A'$ , где  $T = 0,25$ ,  $k_1 = 1,7523$ , и  $B'$ , где  $T = 0,77$ ,  $k_1 = 4,5480$ , модули корней характеристического уравнения имеют следующие значения:

$$A': |z_1| = 0,12819; |z_2| = 1,0001; |z_3| = 1,0001; |z_4| = 0,8923;$$

$$B': |z_1| = 1,0096; |z_2| = 1,0096; |z_3| = 0,0282; |z_4| = 0,7069.$$

Аналогично совокупность граничных значений параметра  $k_1$  для различных значений параметра  $0,1 \leq \xi_p \leq 2,5$ , нелинейно входящего в коэффициенты характеристического уравнения системы, вместе с этими значениями  $\xi_p$ , определяют в

плоскости параметров  $[\xi_p, k_1]$  границы точной области устойчивости системы, полученные: 1 — предложенным методом; 2 — методом перебора точек (рис. 4). На этом же рисунке показана ГОУ, построенная методом перебора [3], с исходными параметрами: начальный угол  $\varphi_0 = 0$ ; дискретность изменения угла поворота  $\Delta\varphi = \pi/180$ ; дискретность изменения параметра  $\Delta R = 0,01$ , максимально допустимое отклонение корней характеристического уравнения  $\varepsilon = ||z_i| - 1| = 0,005$ , максимальные значения параметров системы  $k_{\max} = 1,5$ ,  $\xi_{p\max} = 2,5$ ,  $M = 1$ ,  $K = 0,1$ .

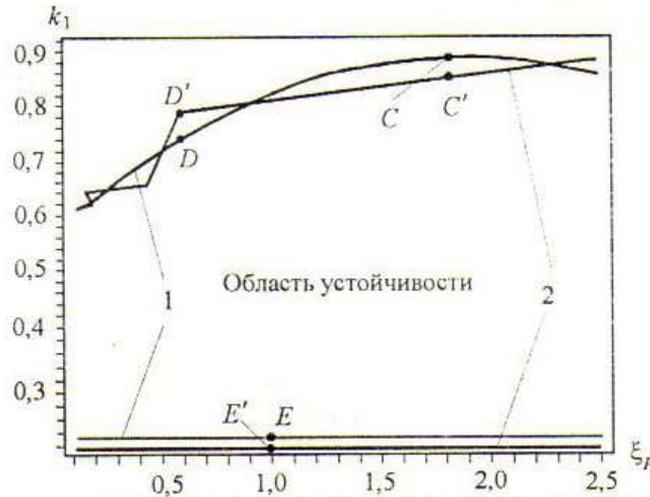


Рис. 4

На границе ОУ, построенной предложенным подходом, в точках  $C$ , где  $\xi_p = 1,85$ ,  $k_1 = 0,9109$ ;  $D$ , где  $\xi_p = 0,60$ ,  $k_1 = 0,7755$  и  $E$ , где  $\xi_p = 1,00$ ,  $k_1 = 0,238$ , модули корней характеристического уравнения соответственно равны:

$$C: |z_1| = 0,2596; |z_2| = 0,9578; |z_3| = 0,9998; |z_4| = 0,9998;$$

$$D: |z_1| = 0,4774; |z_2| = 0,9554; |z_3| = 0,9999; |z_4| = 0,9999;$$

$$E: |z_1| = 0,4318; |z_2| = 0,8768; |z_3| = 0,9965; |z_4| = 0,9965.$$

На границе ОУ, построенной методом перебора, в точках  $C'$ , где  $\xi_p = 1,850$ ,  $k_1 = 0,877$ ;  $D'$ , где  $\xi_p = 0,60$ ,  $k_1 = 0,8169$ , и  $E'$ , где  $\xi_p = 1,00$ ,  $k_1 = 0,220$ , модули корней характеристического уравнения имеют следующие значения:

$$C': |z_1| = 0,2537; |z_2| = 0,9551; |z_3| = 0,9995; |z_4| = 0,9995;$$

$$D': |z_1| = 0,4827; |z_2| = 0,9559; |z_3| = 1,0046; |z_4| = 1,0046;$$

$$E': |z_1| = 0,4335; |z_2| = 0,8578; |z_3| = 1,005; |z_4| = 1,005.$$

Используя результаты вычислений при построении ГОУ исследуемой системы в плоскости параметров  $[T, k_1]$  и  $[\xi_p, k_1]$ , получаем область устойчивости системы в пространстве  $[T, \xi_p, k_1]$  (рис. 5).

При решении задачи определения области устойчивости с помощью предложенного подхода, для 40 предварительно заданных значений нелинейно входящих

параметров  $T$  и  $\xi_p$  из (12) и (13) получено 80 значений параметра  $k_1$ , которые совместно с соответствующими заданными значениями  $T$  и  $\xi_p$  являются точками практически точной ГОУ в плоскостях  $[T, k_1]$  и  $[\xi_p, k_1]$ .

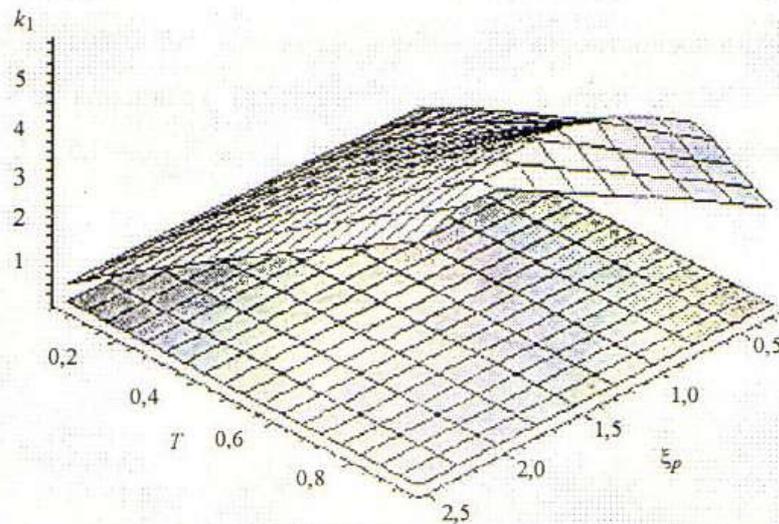


Рис. 5

При определении верхней границы области устойчивости методом перебора проделано 264 шага изменения параметров  $T$  и  $k_1$  и 791 — изменения параметров  $\xi_p$  и  $k_1$ . В результате получена 51 точка ГОУ в плоскости  $[T, k_1]$  и 38 — в плоскости  $[\xi_p, k_1]$ .

Результаты анализа значений корней характеристического уравнения показывают, что точки ГОУ, полученной методом перебора (см. рис. 3, 4), могут находиться как внутри действительной области устойчивости (точка  $C'$ :  $|z_{\max}| = 0,9998$ ), так и за ее границей (точка  $D'$ :  $|z_{\max}| = 1,0046$ ). При этом незначительные отклонения максимальных значений корней  $|z_{\max}|$  от граничных  $|z| = 1$  значительно изменяют параметры, т.е. искажают ОУ. Так в точке  $D'$  отклонение  $|z_{\max}|$  на 0,47 % привело к отклонению  $k_1$  на 5,34 %.

Для получения более точной ГОУ методом перебора необходимо изменить максимально допустимое отклонение корней характеристического уравнения  $\epsilon = ||z_i| - 1|$ , что существенно увеличивает вычислительные затраты, или оптимально задать исходные параметры, что затруднено неопределенностью выбора начальных условий, которые зависят, как правило, от заранее неизвестной конфигурации области устойчивости.

**Заключение.** Представленные результаты позволяют сделать вывод о возможности эффективного практического применения рассмотренного подхода для определения границы области устойчивости дискретных линейных систем в плоскости двух параметров, один из которых входит линейно, а другой нелинейно в коэффициенты характеристического уравнения, и в пространстве трех параметров. Как следует из сравнительного анализа, объем вычислений при определении ГОУ предложенным подходом значительно меньше объема вычислений при использовании метода перебора, что разрешает уменьшить время и повысить точность решения задачи.

## ПОБУДОВА ОБЛАСТІ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНИХ ЦИФРОВИХ СИСТЕМ В ПРОСТОРІ ПАРАМЕТРІВ, ЯКІ НЕЛІНІЙНО ВХОДЯТЬ В КОЕФІЦІЄНТИ ХАРАКТЕРИСТИЧНОГО РІВНЯННЯ

Розглянуто питання побудови областей стійкості лінійних цифрових систем в просторі параметрів, які нелінійно входять в коефіцієнти характеристичного рівняння. Завдяки використанню дискретного аналога методу  $D$ -розбиття та розробленого алгоритму отримано область стійкості реальної цифрової системи. Запропонований метод дає кращі показники точності визначення області стійкості та є більш ефективним і економічним з точки зору машинної реалізації, ніж існуючі універсальні числові методи.

*S.L. Movchan*

## CONSTRUCTION OF STABILITY REGION OF DIGITAL LINEAR SYSTEMS IN SPACE OF PARAMETERS WHICH APPEAR NONLINEARLY IN COEFFICIENTS OF A SECULAR EQUATION

The problems of construction of stability regions of digital linear systems in space of parameters which appear nonlinearly in coefficients of a secular equation are considered. Due to usage of discrete analog of a method of a  $D$ -partition and designed algorithm, the stability region of a real discrete system is obtained. The offered method gives the best indexes of an exactness of definition of a stability region and is more effective from the point of view of machine implementation, than existing universal numerical methods.

1. *Неймарк Ю.П.* Устойчивость линеаризованных систем. — Л.: ЛКВВИЛ, 1949. — 140 с.
2. *Петров Н.П., Поляк В.Т.* Робастное  $D$ -разбиение // Автоматика и телемеханика. — 1991. — № 5. — С. 41–53.
3. *Гостев В.Н., Стеклов В.К.* Системы автоматического управления с цифровым регулятором. — Киев : Радиоаматор, 1998. — 704 с.
4. *Дидук Г.А.* Машинные методы исследования автоматических систем. — Л. : Энергия, 1983. — 242 с.
5. *Топчиев Ю.И., Потемкин В.Г., Иваненко В.Г.* Системы стабилизации. — М. : Машиностроение, 1974. — 248 с.
6. *Топчиев Ю.И.* Атлас для проектирования систем автоматического регулирования. — М. : Машиностроение, 1989. — 751 с.

Получено 25.03.2002  
После доработки 21.11.2003