

УДК 621-526

Г.Ф. Зайцев, Г.Д. Радзивилов, Н.В. Градобоева

**ПРОТИВОРЕЧИЕ МЕЖДУ УСЛОВИЯМИ
МИНИМИЗАЦИИ СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЙ
ОШИБКИ И КВАДРАТИЧНОЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ
ОЦЕНКИ В СЛЕДЯЩИХ СИСТЕМАХ
С ПРИНЦИПОМ УПРАВЛЕНИЯ ПО ОТКЛОНЕНИЮ**

Если на вход следящей системы поступает одно случайное задающее воздействие $\alpha(t)$, имеющее спектральную плотность $S_\alpha(\omega)$, то, согласно [1], спектральная плотность ошибки

$$S_\theta(\omega) = |K_\theta(j\omega)|^2 S_\alpha(\omega), \quad (1)$$

где $K_\theta(j\omega) = K_\theta(p)|_{p=j\omega}$ — комплексная передаточная функция системы по ошибке. Среднее значение квадрата ошибки

$$\bar{\theta}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_\theta(\omega) d\omega = \frac{1}{T} \int_0^T \theta^2(t) dt, \quad (2)$$

среднеквадратическая ошибка (СКО) $\varepsilon = \sqrt{\bar{\theta}^2}$.

Как видно из формул (1) и (2), СКО определяется передаточной функцией системы по ошибке, т.е. возможность минимизации СКО зависит от свойств передаточной функции $K_\theta(p)$ системы, которая, в свою очередь, определяется принципом управления, в соответствии с которым построена эта система.

В системах с принципом управления по отклонению, как известно [4], имеет место противоречие между условиями повышения динамической точности и устойчивостью, а в некотором диапазоне изменения коэффициента усиления k_0 системы в разомкнутом состоянии — и показателями качества переходных процессов. В этом диапазоне изменения k_0 при уменьшении установившихся динамических ошибок ухудшаются показатели качества переходных процессов, и поэтому в таких системах приходится принимать компромиссное решение.

СКО системы автоматического управления (САУ), т.е. ошибку, усредненную за бесконечно большой промежуток времени, очевидно, можно отнести к разряду динамических установившихся ошибок. Если это так, то возникает вопрос: свойственно ли системам с принципом управления по отклонению противоречие между условиями минимизации СКО и устойчивостью (условиями повышения пока-

зателей качества переходных процессов), аналогичное противоречию между условиями повышения динамической точности и устойчивостью, и необходимо ли принимать компромиссное решение об увеличении СКО относительно ее минимального значения с целью повышения показателей качества переходного процесса.

Поставленную задачу решим на примере анализа конкретной САУ для случая, часто встречающегося на практике, когда на вход системы поступает один полезный сигнал — случайное задающее воздействие $\alpha(t)$.

В качестве примера для исследования возьмем следящую систему с принципом управления по отклонению, структурная схема которой изображена на рис. 1, где $K_1(p) = k_1 / (T_1 p + 1)$; $K_2(p) = k_2 / (T_2 p + 1)p$; $k_1 = 2$ (в ходе исследования k_1 изменяется); $T_1 = 0,003$ с; $T_2 = 0,009$ с; $k_2 = 6$. Передаточная функция системы в разомкнутом состоянии

$$K_o(p) = K_1(p)K_2(p) = \frac{k_o}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p} = \frac{D(p)}{F(p)}, \quad (3)$$

где $k_o = k_1 k_2$ — коэффициент усиления системы в разомкнутом состоянии.

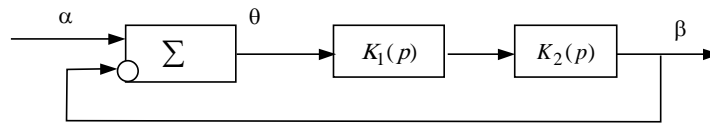


Рис. 1

Исходя из требования устойчивости системы определяем первоначальное значение k_o . Пусть, например, требуется обеспечить запас устойчивости системы по фазе $\gamma = 80^\circ$. Пользуясь логарифмическим частотным критерием устойчивости, определим значение k_o , при котором $\gamma = 80^\circ$.

Согласно (3), комплексная передаточная функция системы в разомкнутом состоянии

$$K_o(j\omega) = \frac{k_o}{(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1)j\omega} = N(\omega)e^{j\psi(\omega)}. \quad (4)$$

В соответствии с (4) получаем выражение для фазочастотной характеристики системы:

$$\psi(\omega) = -90^\circ - \text{arctg}(\omega T_1) - \text{arctg}(\omega T_2) = -90^\circ - \text{arctg}(0,003\omega) - \text{arctg}(0,009\omega).$$

Логарифмическая фазочастотная характеристика (ЛФЧХ) разомкнутой системы изображена на рис. 2.

При запасе устойчивости по фазе $\gamma = 80^\circ$, как видно из рис. 2, частота среза системы $\omega_c = 12$. С учетом этого значения ω_c на рис. 2 в соответствии с (4) построена логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ) разомкнутой системы — кривая L_{12} . С помощью ЛАЧХ определяем $k_o = \omega_c = 12$. Зная k_o , находим значение $k_1 = k_o / k_2 = 12 / 6 = 2$.

Передаточная функция системы по ошибке

$$K_\theta(p) = \frac{\theta(p)}{\alpha(p)} = \frac{1}{1 + K_o(p)} = \frac{F(p)}{F(p) + D(p)} =$$

$$= \frac{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p + k_0} = \frac{a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p}{b_0 p^3 + b_1 p^2 + b_2 p + b_3} = \frac{D_\theta(p)}{F_\theta(p)}, \quad (5)$$

где

$$a_0 = T_1 T_2 = 2,7 \cdot 10^{-5}; \quad a_1 = T_1 + T_2 = 0,012; \quad a_2 = 1;$$

$$b_0 = T_1 T_2 = 2,7 \cdot 10^{-5}; \quad b_1 = T_1 + T_2 = 0,012; \quad b_2 = 1; \quad b_3 = k_0 = 12.$$

Определим СКО системы, имеющей $k_0 = 12$, при поступлении на ее вход одного полезного сигнала — случайного задающего воздействия $\alpha(t)$.

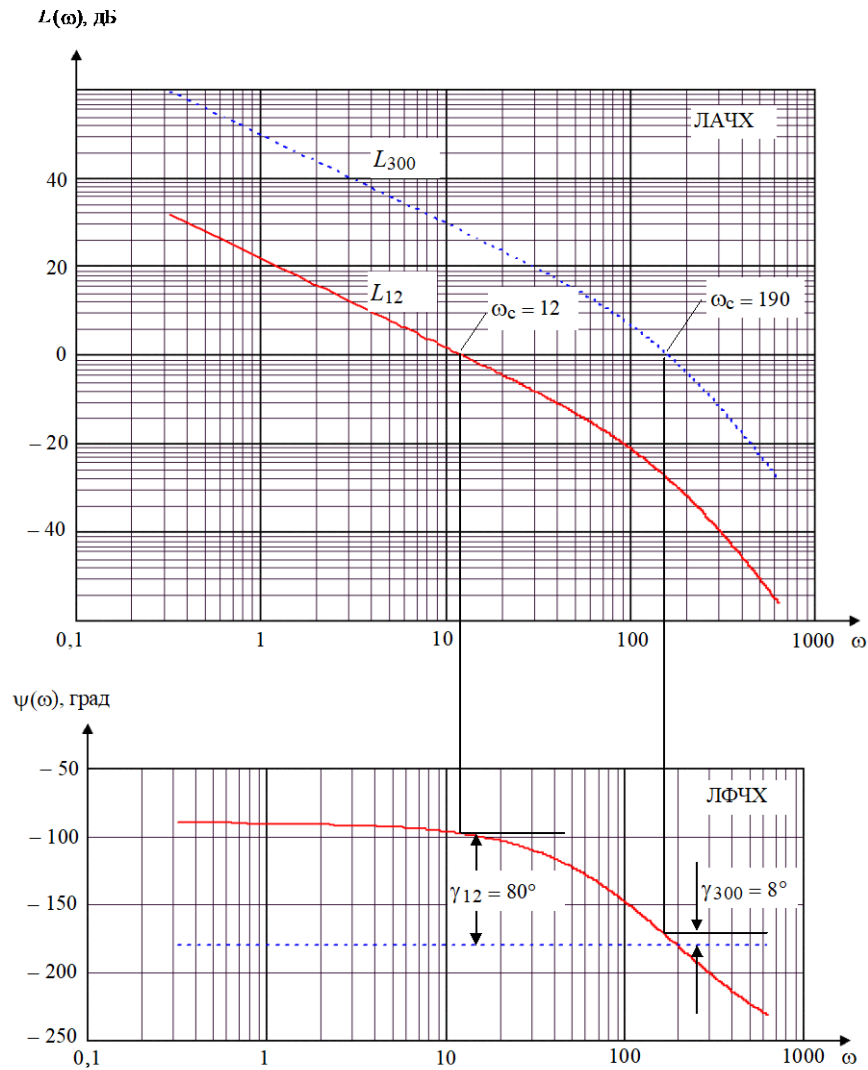


Рис. 2

Предположим, что задающим воздействием служит угловая координата (азимут или угол места) $\alpha(t)$ цели, изменяющаяся относительно радиолокационной станции автосопровождения по графику, изображенному на рис. 3, а.

Из рис. 3 видно, что функция $\alpha(t)$ не является стационарным случайным процессом. Поэтому с помощью рассмотренного статистического метода нельзя определить СКО системы. Однако производную $d\alpha(t)/dt = \dot{\alpha}(t)$ (рис. 3, б) от не-

стационарного случайного сигнала $\alpha(t)$ можно считать стационарным случайным процессом. Обозначив спектральную плотность производной $\dot{\alpha}(t)$ через $S_{\dot{\alpha}}(\omega)$, определим спектральную плотность ошибки системы:

$$S_{\theta}(\omega) = \left| K_{\theta}(j\omega) \frac{1}{j\omega} \right|^2 S_{\dot{\alpha}}(\omega). \quad (6)$$

Несложно убедиться в справедливости этого выражения. В соответствии с рис. 4, а, $\theta(p) = K_{\theta}(p)\dot{\alpha}(p)$. Производную $\dot{\alpha}(t)$ получаем при помощи идеального дифференцирующего звена с передаточной функцией p (рис. 4, б). Чтобы схема рис. 4, б была идентична схеме рис. 4, а, необходимо в звене 2 передаточную функцию $K_{\theta}(p)$ разделить на p , как на рис. 4, б. Тогда $\theta(p) = K_{\theta}(p)\dot{\alpha}(p)/p$. Следовательно, выражение (6) для спектральной плотности ошибки справедливо.

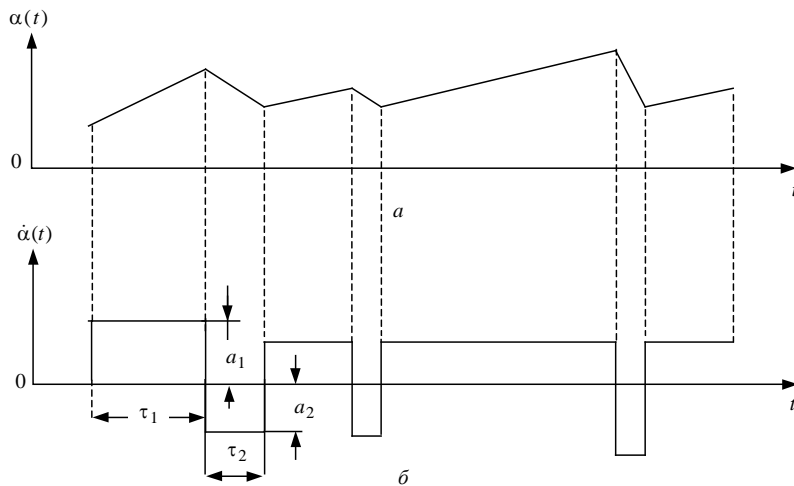


Рис. 3

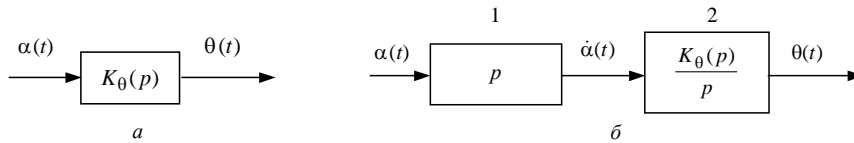


Рис. 4

Пусть спектральная плотность $S_{\dot{\alpha}}(\omega)$ производной $\dot{\alpha}(t)$ — скорости изменения задающего воздействия $\alpha(t)$ — определяется выражением [3]

$$S_{\dot{\alpha}}(\omega) = \frac{2\beta\bar{\Omega}^2}{\omega^2 + \beta^2}, \quad \beta = 0,1 \text{ с}^{-1}; \quad \bar{\Omega}^2 = 18 \text{ рад}^2/\text{с}^2, \quad (7)$$

где $\bar{\Omega}^2$ — среднее значение квадрата скорости; $1/\beta$ — средняя длина промежутков времени, в течение которых скорость остается постоянной.

Для определения спектральной плотности ошибки системы подставим в выражение (6) значения $K_{\theta}(j\omega)$ из (5), и $S_{\dot{\alpha}}(\omega)$ из (7):

$$S_{\theta}(\alpha) = \left| \frac{(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1)}{(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1)j\omega + k_o} \right|^2 \frac{2\beta\bar{\Omega}^2}{\omega^2 + \beta^2}.$$

Согласно (2),

$$\bar{\theta}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\theta}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1)}{(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1)j\omega + k_0} \right|^2 \frac{2\beta\bar{\Omega}^2}{\omega^2 + \beta^2} d\omega.$$

Приведем данный интеграл к табличному:

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\omega)}{|H(j\omega)|^2} d\omega, \quad (8)$$

где $H(j\omega) = c_0(j\omega)^n + c_1(j\omega)^{n-1} + \dots + c_n$; $G(\omega) = d_0(j\omega)^{2n-2} + d_1(j\omega)^{2n-4} + \dots + d_n$,
или

$$\begin{aligned} \bar{\theta}^2 &= 2\beta\bar{\Omega}^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{a_0(j\omega)^2 + a_1j\omega + a_2}{(b_0(j\omega)^3 + b_1(j\omega)^2 + b_2j\omega + b_3)(j\omega + \beta)} \right|^2 d\omega = 2\beta\bar{\Omega}^2 \frac{1}{2\pi} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_0^2(j\omega)^4 - (a_1^2 - 2a_0a_2)(j\omega)^2 + a_2^2}{|b_0(j\omega)^4 + (b_1 + b_0\beta)(j\omega)^3 + (b_2 + b_1\beta)(j\omega)^2 + (b_3 + b_2\beta)j\omega + b_3\beta|^2} d\omega = \\ &= 2\beta\bar{\Omega}^2 I_4. \end{aligned}$$

Значение табличного интеграла в соответствии с [1]

$$I_4 = \frac{d_0(-c_2c_3 + c_1c_4) + c_0d_1c_3 - c_0c_1d_2 + \frac{c_0d_3}{c_4}(c_1c_2 - c_0c_3)}{2c_0(c_1c_2c_3 - c_0c_3^2 - c_4c_1^2)}, \quad (9)$$

где $c_0 = b_0 = T_1T_2 = 2,7 \cdot 10^{-5}$; $c_1 = b_1 + b_0\beta = T_1 + T_2 + T_1T_2\beta = 0,012027$; $c_2 = b_2 + b_1\beta = 1 + 0,1(T_1 + T_2) = 1,0012$; $c_3 = b_3 + b_2\beta = K_0 + 0,1 = 12,1$; $c_4 = b_3\beta = 1,2$; $d_0 = 0$ (так как $d_0(j\omega)^{2n-2} = d_0(j\omega)^6 = 0$); $d_1 = a_0^2 = (T_1T_2)^2 = 7,29 \cdot 10^{-10}$; $d_2 = a_1^2 - 2a_0a_2 = (T_1 + T_2)^2 - 2T_1T_2 = 9 \cdot 10^{-5}$; $d_3 = a_2^2 = 1$.

Поскольку $d_0 = 0$, то

$$I_4 = \frac{c_0d_1c_3 - c_0c_1d_2 + \frac{c_0d_3}{c_4}(c_1c_2 - c_0c_3)}{2c_0(c_1c_2c_3 - c_0c_3^2 - c_4c_1^2)} = \frac{d_1c_3 - c_1d_2 + \frac{d_3}{c_4}(c_1c_2 - c_0c_3)}{2(c_1c_2c_3 - c_0c_3^2 - c_4c_1^2)}. \quad (10)$$

Подставив в (10) значения коэффициентов из (9), получаем $I_4 = 0,034$. Согласно (7), $\bar{\theta}^2 = 2\beta\bar{\Omega}^2 I_4 = 0,124$, СКО системы $\varepsilon = \sqrt{\bar{\theta}^2} = \sqrt{0,124} = 0,352$ рад.

Как известно, наиболее простой метод уменьшения установившихся динамических ошибок САУ — повышение коэффициента усиления системы в разомкнутом состоянии k_0 . Поскольку СКО — это ошибка, усредненная за бесконечно большой промежуток времени, и ее можно отнести к классу установившихся ошибок, то естественно предположить, что повышение k_0 позволит

уменьшить СКО. Справедливость этого вывода подтверждается также сравнением частотного спектра случайного задающего воздействия и частотной характеристики системы. Случайный входной сигнал, как правило, имеет широкий частотный спектр, и поэтому чем шире полоса пропускания системы, тем лучше воспроизводится системой случайное задающее воздействие. Повышение k_0 ведет к увеличению частоты среза ω_c (расширению полосы частот) системы, т.е. способствует уменьшению СКО.

На рис. 2 ломаной L_{300} изображена ЛАЧХ системы при $k_0 = 300$. Как видно из этого рисунка, частота среза ω_c увеличивается по сравнению со случаем, когда $k_0 = 12$, с 12 до 190. Следовательно, увеличивается и полоса пропускания системы.

Проведя аналитические расчеты, убедимся в том, что с увеличением k_0 уменьшается СКО ε . Для этого рассмотренным выше методом с помощью формулы (10) определим I_4 , $\bar{\theta}^2$, ε при различных значениях k_0 . При этом следует иметь в виду, что согласно (9) с изменением k_0 изменяются лишь два коэффициента: $c_3 = b_3 + b_2\beta = k_0 + 0,1$ и $c_4 = b_3\beta = 0,1k_0$. Результаты расчетов I_4 , $\bar{\theta}^2$ и ε при различных k_0 сведены в табл. 1. График зависимости $\varepsilon = f(k_0)$, построенный на основании (10) с помощью компьютерного математического пакета MathCAD-2001 в логарифмическом масштабе по осям абсцисс и ординат изображен на рис. 5, а. Для более наглядного представления о характере зависимости в области больших k_0 график $\varepsilon = f(k_0)$ на рис. 5, б изображен в логарифмическом масштабе по оси ординат и в линейном — по оси абсцисс. Согласно графику $\varepsilon = f(k_0)$, как и предполагалось, СКО уменьшается с увеличением k_0 .

Таблица 1

k_0	I_4	$\bar{\theta}^2$	ε	I_{II}
2	1,192	4,291	2,71	0,256
3	0,538	1,938	1,392	0,173
6	0,137	0,492	0,701	0,089
9	0,061	0,22	0,469	0,062
12	0,034	0,124	0,352	0,048
60	$1,389 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	0,071	0,015
100	$5,009 \cdot 10^{-4}$	$1,823 \cdot 10^{-3}$	0,043	0,013
134	$2,793 \cdot 10^{-4}$	$1,005 \cdot 10^{-3}$	0,032	0,012
200	$1,257 \cdot 10^{-4}$	$4,524 \cdot 10^{-4}$	0,021	0,013
300	$5,63 \cdot 10^{-5}$	$2,027 \cdot 10^{-4}$	0,014	0,02
420	$3,146 \cdot 10^{-5}$	$1,132 \cdot 10^{-4}$	0,011	0,11
438	$3,739 \cdot 10^{-5}$	$1,346 \cdot 10^{-4}$	0,012	0,415
440	$4,218 \cdot 10^{-5}$	$1,519 \cdot 10^{-4}$	0,012	0,601
444	$1,875 \cdot 10^{-4}$	$6,751 \cdot 10^{-4}$	0,026	6,001

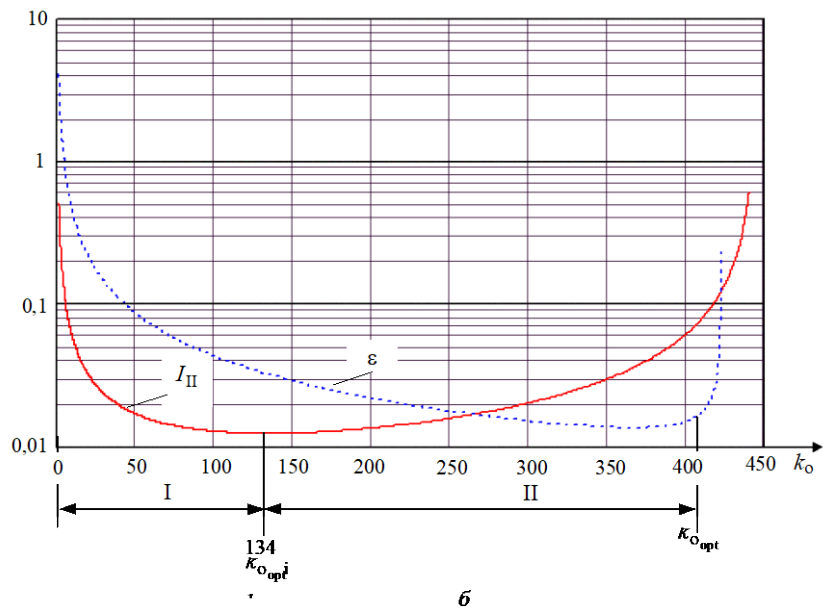
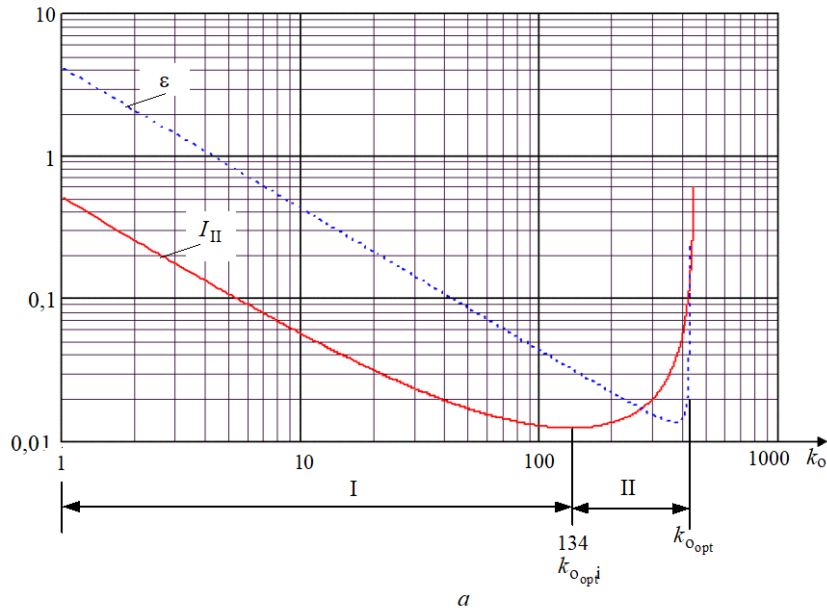


Рис. 5

Синтез оптимального коэффициента $k_{o_{opt}}$, при котором СКО принимает минимальное значение. Как видно из рис. 5, график $\varepsilon = f(k_o)$ имеет экстремум. Найдем точное оптимальное значение $k_{o_{opt}}$, при котором ε принимает минимальное значение, приравнявая производную $d\bar{\theta}^2/dk_o$ к нулю.

Поскольку $\theta^2 = 2\beta\bar{\Omega}^2 I_4$, где I_4 определяется с помощью формулы (10), а $2\beta\bar{\Omega}^2 = \text{const}$, значение $k_{o_{opt}}$ можно определить из уравнения

$$\frac{dI_4}{dk_o} = \frac{d}{dk_o} \frac{d_1(k_o + b_2\beta) - c_1d + \frac{d_3}{k_o\beta}(c_1c_2 - c_0k_ob_2\beta)}{2(c_1c_2(k_o + b_2\beta) - c_0(k_o + b_2\beta)^2 + k_o\beta c_1^2)} = 0. \quad (11)$$

Учитывая, что $b_2 = 1$, получаем

$$\frac{dI_4}{dk_0} = \frac{d_1 - \frac{d_3}{k_0^2 \beta} (c_1 c_2 - c_0 (k_0 + \beta)) - \frac{d_3}{k_0 \beta} c_0}{2c_1 c_2 (k_0 + \beta) - 2c_1^2 k_0 \beta - 2c_0 (k_0 + \beta)^2} - \frac{\left((k_0 + \beta) d_1 - c_1 d_2 + \frac{d_3}{k_0 + \beta} (c_1 c_0 - c_0 (k_0 + \beta)) \right) (2c_1 c_2 - 2c_1^2 \beta - 4c_0 (k_0 + \beta))}{2c_1 c_2 (k_0 + \beta) - 2c_1^2 k_0 \beta - 2c_0 (k_0 + \beta)^2} = 0,$$

или

$$\left(d_1 - \frac{d_3}{k_0^2 \beta} (c_1 c_2 - c_0 (k_0 + \beta)) - \frac{d_3}{k_0 \beta} c_0 \right) (2c_1 c_2 (k_0 + \beta) - 2c_1^2 k_0 \beta - 2c_0 (k_0 + \beta)^2) - \left((k_0 + \beta) d_1 - c_1 d_2 + \frac{d_3}{k_0 + \beta} (c_1 c_2 - c_0 (k_0 + \beta)) \right) (2c_1 c_2 - 2c_1^2 \beta - 4c_0 (k_0 + \beta)) = 0,$$

и окончательно

$$1,9683 \cdot 10^{-15} k_0^4 - 1,45216629414 \cdot 10^{-9} k_0^3 + 1,2957976754807107262 \cdot 10^{-6} k_0^2 - 2,882807221165400488 \cdot 10^{-4} k_0 - 1,443458852133224976 \cdot 10^{-5} = 0.$$

Определяем корни этого уравнения:

$$k_{01} = -5,006 \cdot 10^{-2}; \quad k_{02} = 421,28; \quad k_{03} = 471,9; \quad k_{04} = 736883,7788.$$

Условию устойчивости и физической реализации соответствует корень $k_{01} = k_{0_{\text{opt}}} = 421,28$. Полученное значение $k_{0_{\text{opt}}}$ согласуется с графиком $\varepsilon = f(k_0)$ на рис. 5.

Для того чтобы ответить на поставленный ранее вопрос — имеется ли противоречие между условиями минимизации СКО и квадратичной интегральной оценкой (показателями качества переходного процесса), определим зависимость показателей качества переходных процессов от k_0 .

Зависимость квадратичной интегральной оценки от коэффициента усиления k_0 системы. Для определения переходной функции системы воспользуемся методом разложения изображения ошибки на элементарные дроби [4]. Согласно (5), характеристическое уравнение системы имеет вид

$$F_0(p) = b_0 p^3 + b_1 p^2 + b_2 p + b_3 = 0.$$

Значения корней этого уравнения при различных коэффициентах k_0 сведены в табл. 2.

Таблица 2

k_0	p_1	p_2	p_3
12	- 14,411	- 90,95	- 339,083
134	- 381,458	- 31,493 + j 109,13	- 31,493 - j 109,13
300	- 419,311	- 12,566 + j 162,298	- 12,566 - j 162,298
438	- 443,423	- 0,5107 + j 191,269	- 0,5107 - j 191,26

При единичном скачке $\alpha(t) = 1(t)$ ($\alpha(p) = 1/p = M_\alpha(p)/R_\alpha(p)$) начальные значения i -й компоненты переходной составляющей ошибки определяются выражением [4, 5]

$$A_i = \frac{D_\theta(p_i)M_\alpha(p_i)}{F_\theta'(p_i)R_\alpha(p_i)}, \quad (12)$$

или, после подстановки полиномов $D_\theta(p)$ и $F_\theta(p)$ из (5),

$$A_i = \frac{a_0 p_i^2 + a_1 p_i + a_2}{3b_0 p_i^2 + 2b_1 p_i + b_2}. \quad (13)$$

Подставляя в (13) значения коэффициентов из (5) и соответствующих корней (см. табл. 2), находим A_i при различных k_0 системы.

Для системы с коэффициентом усиления $k_0 = 12$ получаем $A_1 = 1,24$; $A_2 = -0,257$; $A_3 = 0,01627$, при этом переходная составляющая ошибки

$$\theta_{tr}(t) = 1,24 e^{-14,41t} - 0,257 e^{-90,95t} + 0,01627 e^{-339,083t}. \quad (14)$$

График $\theta_{tr}(t)$ изображен на рис. 6 (кривая 1 соответствует $k_0 = 12$; 2 — $k_0 = 134$; 3 — $k_0 = 300$; 4 — $k_0 = 438$).

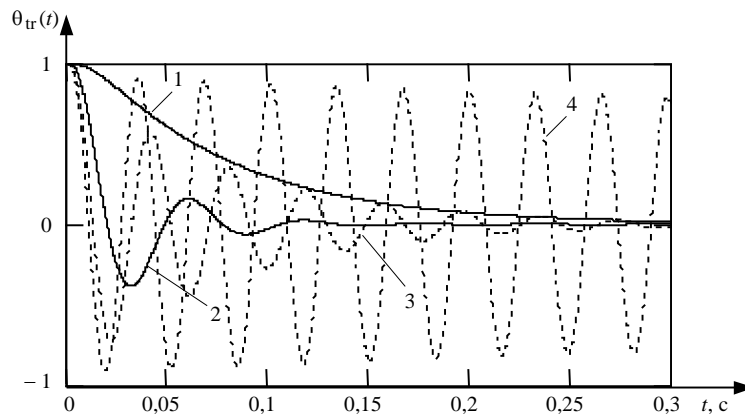


Рис. 6

Выражения для переходных составляющих ошибки при единичном ступенчатом задающем воздействии и различных k_0 , полученные по методике определения переходной составляющей ошибки при комплексных корнях характеристического уравнения системы [4, 5], приведены в табл. 3.

Таблица 3

Коэффициент k_0	Переходная составляющая ошибки $\theta_{tr}(t)$
134	$9,67363 \cdot 10^{-2} e^{-381,458t} + 1,082 e^{-31,493t} \sin(109,6297t + 0,987)$
300	$0,138169 e^{-419,311t} + 0,96 e^{-12,566t} \sin(162,298t + 1,114)$
438	$0,1572 e^{-443,423t} + 0,919 e^{-0,5107t} \sin(191,269t + 1,161)$

Рис. 6 наглядно иллюстрирует, что при малых значениях коэффициента усиления системы в разомкнутом состоянии ($k_0 = 12$) переходный процесс (кривая 1) имеет слаботухающий характер (при малых k_0 система вяло реагирует на из-

менение (скачок) задающего воздействия). С увеличением k_o показатели качества переходного процесса улучшаются, а время переходного процесса уменьшается (кривая 2 при $k_o = 134$). При дальнейшем увеличении k_o показатели качества переходного процесса ухудшаются (кривые 3, 4 при $k_o = 300$ и $k_o = 438$ соответственно) — время переходного процесса увеличивается, а сам процесс становится колебательным. Такое ухудшение этих показателей объясняется уменьшением запаса устойчивости (как видно из рис. 2, при $k_o = 300$ запас по фазе уменьшится до $\gamma = 8^\circ$) и приближением системы к границе устойчивости.

Косвенной оценкой показателей качества переходного процесса может служить квадратичная интегральная оценка $I_{II} = \int_0^{\infty} [\theta(t)]^2 dt$, которая может быть вычислена при помощи формулы Рейли [4]:

$$I_{II} = \int_0^{\infty} [\theta(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\theta(j\omega)|^2 d\omega. \quad (15)$$

Поскольку установившаяся ошибка рассматриваемой системы с астатизмом 1-го порядка при задающем воздействии в виде единичной ступенчатой функции ($\alpha(t) = 1(t)$, $\alpha(p) = 1/p$) равна нулю, то $\theta_{tr}(p) = K_{\theta}(p)\alpha(p) = K_{\theta}(p)/p$, или

$$\theta_{tr}(j\omega) = K_{\theta}(j\omega)/j\omega. \quad (16)$$

Подставив значение $\theta_{tr}(j\omega)$ из (16) в (15), получаем

$$I_{II} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| K_{\theta}(j\omega) \frac{1}{j\omega} \right|^2 d\omega,$$

или, согласно (5),

$$\begin{aligned} I_{II} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1)}{(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1) + k_o} \right|^2 d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{a_0(j\omega)^2 + a_1 j\omega + a_2}{b_0(j\omega)^3 + b_1(j\omega)^2 + b_2 j\omega + b_3} \right|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (17)$$

Приведем интеграл (12) к табличному виду (8):

$$I_{II} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_0^2(j\omega)^4 - (a_1^2 - 2a_0a_2)(j\omega)^2 + a_2^2}{|b_0(j\omega)^3 + b_1(j\omega)^2 + b_2 j\omega + b_3|^2} d\omega. \quad (18)$$

Сравнивая интеграл (18) с табличным интегралом (8), получаем:

$$H(j\omega) = b_0(j\omega)^3 + b_1(j\omega)^2 + b_2 j\omega + b_3;$$

$$G(\omega) = a_0^2(j\omega)^4 - (a_1^2 - 2a_0a_2)(j\omega)^2 + a_2^2.$$

Найдем значение табличного интеграла I_{II} [1]:

$$I_{II} = \frac{b_2 a_0^2 + b_0(a_1^2 - 2a_0 a_2) + b_0 b_1 a_2^2 / b_3}{2b_0(b_1 b_2 - b_0 b_3)}; \quad (19)$$

после подстановки значений коэффициентов из (5) получаем

$$I_{II} = \frac{(2,7 \cdot 10^{-5})^2 + 2,7 \cdot 10^{-5}(0,012^2 - 2 \cdot 2,7 \cdot 10^{-5}) + 2,7 \cdot 10^{-5} \cdot 0,012 / k_0}{2 \cdot 2,7 \cdot 10^{-5}(0,012 - 2,7 \cdot 10^{-5} k_0)}. \quad (20)$$

Подставляя в формулу (20) различные значения k_0 , определяем квадратичные интегральные оценки I_{II} переходных функций системы (см. табл. 1).

График зависимости $I_{II} = f(k_0)$, построенный в соответствии с (20) при помощи пакета MathCAD-2001, изображен на рис. 5. Значения I_{II} в табл. 1 соответствуют приведенному графику.

Синтез оптимального значения коэффициента усиления $k_{0_{opt}}$, соответствующего минимуму квадратичной интегральной оценки. Как видно из рис. 5, график зависимости $I_{II} = f(k_0)$ имеет экстремальный характер. Найдем точное оптимальное значение $k_{0_{opt}}$, при котором I_{II} принимает минимальное значение. Для этого выражение (19) запишем в явном виде относительно k_0 :

$$I_{II} = \frac{b_2 a_0^2 + b_0(a_1^2 - 2a_0 a_2) + b_0 b_1 a_2^2 / k_0}{2b_0(b_1 b_2 - b_0 k_0)},$$

или, учитывая, что $a_0 = b_0$,

$$I_{II} = \frac{b_2 a_0 + (a_1^2 - 2a_0 a_2) + b_1 a_2^2 / k_0}{2(b_1 b_2 - b_0 k_0)}.$$

Определяем производную dI_{II}/dk_0 и приравняем ее к нулю:

$$\frac{dI_{II}}{dk_0} = -b_1 \frac{a_2^2}{k_0^2(2b_1 b_2 - 2b_0 k_0)} + 2 \frac{(b_2 a_0 + a_1^2 - 2a_0 a_2 + b_1 a_2^2 / k_0)}{(2b_1 b_2 - 2b_0 k_0)^2} b_0 = 0;$$

$$-b_1 a_2^2 (2b_1 b_2 - 2b_0 k_0) + 2b_0 k_0^2 (b_2 a_0 + a_1^2 - 2a_0 a_2 + b_1 a_2^2 / k_0) = 0;$$

$$(2b_0 b_2 a_0 + 2b_0 a_1^2 - 4b_0 a_0 a_2) k_0^2 + 4b_1 a_2^2 b_0 k_0 - 2b_1^2 a_2^2 b_2 = 0.$$

После подстановки значений коэффициентов получаем

$$6,38 \cdot 10^{-9} k_0^2 + 1,296 \cdot 10^{-6} k_0 - 2,88 \cdot 10^{-4} = 0.$$

Корни этого уравнения равны:

$$k_{01} = -339,425751462441057006; \quad k_{02} = 134,297546334220544185.$$

Таким образом, оптимальное значение коэффициента усиления системы, при котором квадратичная интегральная оценка I_{II} переходного процесса принимает минимальное значение, $k_{0_{opt}} = 134,2975$, что согласуется с рис. 5.

Противоречие между условиями минимизации СКО и квадратичной интегральной оценки в системах с принципом управления по отклонению. Согласно графику $I_{II} = f(k_o)$ (см. рис. 5), на участке I изменения k_o от 1 до 134 квадратичная интегральная оценка I_{II} уменьшается, а затем, при дальнейшем увеличении k_o (участок II), — возрастает. Такой характер изменения I_{II} согласуется с приведенными на рис. 6 кривыми переходных процессов при различных значениях k_o .

Отметим, что на участке I изменения k_o (см. рис. 5) уменьшается не только I_{II} , но и СКО ϵ , т.е. для уменьшения как ϵ , так и I_{II} следует выполнить одно и то же условие — необходимо повышать k_o . Следовательно, на интервале повышения k_o до оптимального значения $k_{o_{opt}i}$ нет противоречия между условиями повышения ϵ и I_{II} . Однако при дальнейшем увеличении k_o от $k_{o_{opt}i}$ до $k_{o_{opt}}$ (участок II) ϵ продолжает уменьшаться, а I_{II} начинает возрастать — показатели качества переходного процесса ухудшаются (см. кривые 3 и 4 на рис. 6), т.е. при $k_o > k_{o_{opt}i}$ возникает противоречие между условиями минимизации СКО и квадратичной интегральной оценки переходных процессов.

Минимум СКО достигается при значении $k_{o_{opt}} = 421,28$, весьма близком к границе устойчивости (см. рис. 5), когда в системе возникают медленно затухающие колебания. Поскольку такие колебания нежелательны, то при выборе k_o необходимо принимать компромиссное решение, при котором кроме требований к минимизации СКО необходимо учитывать требование к показателям качества переходных процессов (квадратичной интегральной оценке). Очевидно, такое значение k_o должно находиться между значениями $k_{o_{opt}}$ и $k_{o_{opt}i}$, соответствующими минимуму СКО и минимуму квадратичной интегральной оценки, т.е. на участке II.

Таким образом, можно сделать следующие выводы.

1. В отличие от разомкнутых систем, особенность автоматических систем с принципом управления по отклонению (систем с отрицательной обратной связью) состоит в том, что им свойственно противоречие между условиями минимизации СКО и квадратичной интегральной оценки переходных процессов.

2. Минимальное значение СКО в этих системах достигается вблизи границы устойчивости, когда возникают медленно затухающие колебания. Поэтому при выборе k_o следует принимать компромиссное решение.

3. При компромиссном выборе k_o можно рекомендовать его значение, находящееся между $k_{o_{opt}}$ и $k_{o_{opt}i}$, соответствующими минимальным значениям СКО и квадратичной интегральной оценки. Причем если предъявляются более жесткие требования к показателям качества переходного процесса, то значения k_o следует выбирать ближе к $k_{o_{opt}i}$, если же более важно обеспечить требования, предъявляемые к СКО, то они могут быть удовлетворены при выборе k_o , более близком к $k_{o_{opt}}$.

4. Это противоречие ограничивает возможности минимизации СКО в классе систем с принципом управления по отклонению.

Включение в систему различных традиционных корректирующих устройств хотя и позволяет дополнительно уменьшить СКО (как и динамические установившиеся ошибки), но не снимает указанного противоречия, представляющего собой препятствие на пути решения задачи минимизации СКО в этом классе систем.

Г.Ф. Зайцев, Г.Д. Радзивилов, Н.В. Градобоева

ПРОТИРІЧЧЯ МІЖ УМОВАМИ МІНІМІЗАЦІЇ СЕРЕДНЬОКВАДРАТИЧНОЇ ПОМИЛКИ І КВАДРАТИЧНОЇ ІНТЕГРАЛЬНОЇ ОЦІНКИ У СЛІДКУЮЧИХ СИСТЕМАХ З ПРИНЦИПОМ КЕРУВАННЯ ЗА ВІДХИЛЕННЯМ

Показано, що на відміну від розімкнутих систем особливістю систем автоматичного керування з принципом керування за відхиленням (систем з негативним зворотним зв'язком) є протиріччя між умовами мінімізації помилки і квадратичної інтегральної оцінки перехідних процесів при надходженні на їхній вхід одного випадкового задавального впливу. Встановлено, що мінімальне значення середньоквадратичної помилки в цих системах досягається при значеннях їх коефіцієнта підсилення в розімкненому стані, близьких до межі стійкості, коли виникають повільно згасаючі перехідні процеси (значні квадратичні інтегральні оцінки). Дано рекомендації з компромісного вибору коефіцієнта підсилення сліdkуючої системи.

G.F. Zaitsev, G.D. Radzivilov, N.V. Gradoboyeva

INCONSISTENCY BETWEEN CONDITIONS OF MINIMIZING THE QUADRATIC MEAN ERROR AND QUADRATIC INTEGRAL ESTIMATES IN THE TRACKING SYSTEMS WITH A PRINCIPLE OF DEVIATION CONTROL

One of the features of automatic control systems with deviation control principle (systems with a negative feedback) as compared with open systems is the inconsistency between the conditions of minimizing a quadratic mean error and quadratic integral estimate of transient processes when introducing one random set-point action at the input. It has been found that the minimum value of the quadratic mean error in these systems is reached at their gain values in the open systems, close to a stability limit, when slowly fading transient processes arise (considerable quadratic integral estimates). The recommendations as to choice of the gain of the tracking systems have been suggested.

1. *Макаров И.М., Менский Б.М.* Линейные автоматические системы. — М. : Машиностроение, 1982. — 504 с.
2. *Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического регулирования. — М. : Машиностроение, 1966. — 992 с.
3. *Джеймс Х., Никольс Н., Филлипс Р.* Теория следящих систем. — М. : Изд-во иностр. лит., 1951. — 464 с.
4. *Зайцев Г.Ф., Стеклов В.К., Брицький О.І.* Теорія автоматичного управління / Під ред. Г.Ф. Зайцева. — Київ : Техніка, 2002. — 688 с.
5. *Зайцев Г.Ф., Градобоева Н.В., Захаренков Е.В.* Повышение быстродействия следящих систем с помощью связи по задающему воздействию при комплексных корнях характеристического уравнения // Проблемы управления и информатики. — 2000. — № 1. — С. 44–53.

*Получено 02.07.2003
После доработки 05.08.2003*