УДК 519.6

И.В. Сергиенко, В.С. Дейнека

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЕМ С УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ

Введем в рассмотрение: область Ω, состоящую из двух открытых непересекающихся строго липшицевых областей Ω_1, Ω_2 из n-мерного вещественного линейного пространства R^n; границу $\Gamma = (\partial\Omega_1 \bigcup \partial\Omega_2) \setminus \gamma$ $(\gamma = \partial\Omega_1 \bigcap \partial\Omega_2 \neq \varnothing)$ области $\overline{\Omega}$, $\partial\Omega_i$ — граница области Ω_i, $i = 1, 2$; составной цилиндр $\Omega_T = \Omega \times (0, T]$; боковую поверхность $\Gamma_T = \Gamma \times (0, T]$ цилиндра $\Omega_T \bigcup \gamma_T$, $\gamma_T = \gamma \times (0, T]$.

Пусть в области Ω_T определено псевдогиперболическое уравнение [1]

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial t} \right) + a(x)\frac{\partial y}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) + b(x)\, y = f(x, t). \qquad (1)$$

Здесь

$$a_{ij} = a_{ji},\ k_{ij} = k_{ji};\ a_{ij}\big|_{\overline{\Omega}_l},\ k_{ij}\big|_{\overline{\Omega}_l} \in C(\overline{\Omega}_l) \bigcap C^1(\Omega_l),\ i, j = \overline{1, n},$$

$$a\big|_{\Omega_l} \in C(\Omega_l),\ 0 < a_0' \le a \le a_1' < \infty,\ b\big|_{\Omega_l} \in C(\Omega_l),\ 0 \le b \le b_1^0 < \infty,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, \xi_i\, \xi_j \ge \alpha_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2,\ \ \sum_{i,j=1}^{n} k_{ij}\, \xi_i\, \xi_j \ge \alpha_1 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2,\ \ \alpha_0, \alpha_1 = \text{const} > 0,$$

$$f\big|_{\Omega_{lT}} \in C(\Omega_{lT}),\ l = 1, 2,\ \ |\, f \,| < \infty. \qquad (1')$$

На границе Γ_T задано однородное условие Дирихле

$$y = 0. \qquad (2)$$

На участке γ_T условия сопряжения имеют вид

$$\left[\frac{\partial_L y}{\partial \nu} \right] = 0, \qquad (3)$$

$$\left\{\frac{\partial_L y}{\partial \nu}\right\}^{\pm} = r[y], \tag{4}$$

где $0 \le r = r(x) \le r_1 < \infty$, $r_1 = \mathrm{const}$, $[\varphi] = \varphi^+ - \varphi^-$, $\varphi^+ = \{\varphi\}^+ = \varphi(x, t)$ при $(x, t) \in \gamma_T^+ = (\partial\Omega_2 \cap \gamma) \times (0, \mathrm{T}]$, $\varphi^- = \{\varphi\}^- = \varphi(x, t)$ при $(x, t) \in \gamma_T^- = (\partial\Omega_1 \cap \gamma) \times$ $\times (0, \mathrm{T}]$, ν — орт нормали к γ (нормаль к γ), направленный в область Ω_2;

$$\frac{\partial_L y}{\partial \nu} = \sum_{i, j=1}^{n} \left(a_{ij} \frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial t} + k_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) \cos(\nu, x_i).$$

При $t = 0$ заданы начальные условия

$$y(x, 0) = y_0(x), \quad x \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2, \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} = y_1(x), \quad x \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2. \tag{6}$$

Определение 1. Обобщенным решением начально-краевой задачи (1)–(6) называется функция $y(x, t) \in W(0, \mathrm{T})$ $(W(0, \mathrm{T}) = \{v \in L^2(0, \mathrm{T}; V) : \frac{dv}{dt} \in L_2(0, \mathrm{T}; V)$, $\frac{d^2 v}{dt^2} \in L^2(0, \mathrm{T}; L_2(\Omega))\}$, $V = \{v(x,t) : v|_{\Omega_l} \in W_2^1(\Omega_l),\ l = 1, 2;\ \forall t \in [0, \mathrm{T}], v|_{\Gamma_\mathrm{T}} = 0\}$, $L^2(0, \mathrm{T}; V) = \{v(x, t) \in V : \int_0^\mathrm{T} \|v\|_V^2 \, dt < \infty\}$, $\|v\|_V = \left\{\sum_{l=1}^{2} \|v\|^2_{W_2^1(\Omega_l)}\right\}^{1/2}$), которая $\forall\, w(x) \in V_0 =$ $\{v(x) : v|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i),\ i = 1, 2;\ v|_\Gamma = 0\}$ удовлетворяет тождествам

$$\left(\frac{d^2 y}{dt^2}, w\right) + a_0\left(\frac{dy}{dt}, w\right) + a(y, w) = l(w), \quad \forall t \in (0, \mathrm{T}), \tag{7}$$

$$a_0(y, w) = a_0(y_0, w), \quad t = 0, \tag{8}$$

$$\left(\frac{dy}{dt}, w\right) = (y_1, w), \quad t = 0, \tag{9}$$

где

$$(\varphi, \psi) = \int_\Omega \varphi(x, t)\, \psi(x, t)\, dx, \quad a_0(\varphi, \psi) = \int_\Omega \left(\sum_{i, j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + a \varphi \psi \right) dx,$$

$$a(\varphi, \psi) = \int_\Omega \left(\sum_{i, j=1}^{n} k_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + b \varphi \psi \right) dx + \int_\gamma r[\varphi][\psi]\, d\gamma, \quad l(w) = (f, w).$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия (1′) и $y_0 \in V_0$, $y_1 \in L_2(\Omega)$. Тогда существует единственное обобщенное решение $y(x, t) \in W(0, \mathrm{T})$ начально-краевой задачи (1)–(6).

ISSN 0572-2691

Справедливость теоремы установим аналогично доказательству теоремы 1 работы [1], используя результаты из [1, 2].

Пусть $H_{n0} \subset V_0$ — некоторое n-мерное подпространство пространства V_0 с базисом $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$. Подпространство функций вида

$$u_n(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t)\varphi_i(x), \ \ \alpha_i \in C^2([0,\mathrm{T}]), \ \ i = \overline{1,n}, \tag{10}$$

обозначим $H_n \subset W(0,\mathrm{T})$.

Определение 2. Приближенным обобщенным решением начально-краевой задачи (1)–(6) называется функция $u_n(x,t) \in H_n$, которая $\forall v_n(x) \in H_{n0}$ удовлетворяет тождествам

$$\left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}, v_n\right) + a_0\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}, v_n\right) + a(u_n, v_n) = l(v_n), \ \ \forall t \in (0,\mathrm{T}], \tag{11}$$

$$a_0(u_n, v_n) = a_0(y_0, v_n), \ \ t = 0, \tag{12}$$

$$\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}, v_n\right) = (y_1, v_n), \ \ t = 0. \tag{13}$$

Лемма 1. Пусть $u(x,t) \in W(0,\mathrm{T})$ — обобщенное решение задачи (1)–(6). Тогда существует единственная функция $\overline{u}_n(x,t) \in H_n$ такая, что

$$a(u - \overline{u}_n, v_n) = 0, \ \ \forall v_n \in H_{n0}, \ \ t \in [0,\mathrm{T}], \tag{14}$$

и

$$\overline{\alpha}_0 \| u - \overline{u}_n \|_V^2 \le a(u - \overline{u}_n, u - \overline{u}_n) \le c_1 \| u - \tilde{u} \|_V^2, \ \ \forall \tilde{u} \in H_n, \ \ t \in [0,\mathrm{T}]. \tag{15}$$

Следуя [3, 4], введем обозначения: $\eta = u - \overline{u}_n$, $\varphi = U - \overline{u}_n$, $Z = u - U$, $U = u_n(x,t)$; $u(x,t)$, $u_n(x,t)$ — соответственно обобщенное и приближенное обобщенное решения задачи (1)–(6). Для произвольной функции $v_n(x,t) \in H_n$, учитывая (14), имеем

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}, v_n\right) + a_0\left(\frac{d\varphi}{dt}, v_n\right) + a(\varphi, v_n) = (f, v_n) -$$

$$-\left(\frac{d^2\overline{u}_n}{dt^2}, v_n\right) - a_0\left(\frac{d\overline{u}_n}{dt}, v_n\right) - a(\overline{u}_n, v_n) = \left(\frac{d^2\eta}{dt^2}, v_n\right) + a_0\left(\frac{d\eta}{dt}, v_n\right)$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}, v_n\right) - \left(\frac{d\varphi}{dt}, \frac{dv_n}{dt}\right) + \frac{d}{dt}a_0(\varphi, v_n) - a_0\left(\varphi, \frac{dv_n}{dt}\right) + a(\varphi, v_n) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{d\eta}{dt}, v_n\right) - \left(\frac{d\eta}{dt}, \frac{dv_n}{dt}\right) + \frac{d}{dt}a_0(\eta, v_n) - a_0\left(\eta, \frac{dv_n}{dt}\right). \tag{16}$$

Так как $Z = \eta - \varphi$, то из (16) следует

$$-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \frac{\partial v_n}{\partial t}\right) - a_0\left(\varphi, \frac{\partial v_n}{\partial t}\right) + a(\varphi, v_n) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}, v_n\right) - \left(\frac{d\eta}{dt}, \frac{dv_n}{dt}\right) + \frac{d}{dt} a_0(z, v_n) - a_0\left(\eta, \frac{dv_n}{dt}\right). \quad (17)$$

Введем в рассмотрение $\forall\xi\ (\xi \in (0, \mathrm{T}])$ функцию $\tilde{v}(x, t) = \int_t^\xi \varphi(x, \tau)\, d\tau$. Тогда $\tilde{v}(x, t) \in H_n, \tilde{v}(x, \xi) = 0, \frac{\partial\tilde{v}}{\partial t} = -\varphi(x, t)$. Полагая $v_n(x, t) = \tilde{v}(x, t)$, из (17) получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\varphi(\cdot, t)\|_{L_2}^2 + a_0(\varphi, \varphi)(t) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt} a(\tilde{v}, \tilde{v}) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}, \tilde{v}_n\right) + \left(\frac{d\eta}{dt}, \varphi\right) + \frac{d}{dt} a_0(z, \tilde{v}_n) + a_0(\eta, \varphi). \quad (18)$$

Проинтегрировав обе части полученного равенства по переменной t от 0 до ξ $(\xi \in (0, \mathrm{T}])$, получим

$$\|\varphi(\cdot, \xi)\|_{L_2}^2 - \|\varphi(\cdot, 0)\|_{L_2}^2 + 2\int_0^\xi a_0(\varphi, \varphi)\, dt + a(\tilde{v}(\cdot, 0), \tilde{v}(\cdot, 0)) =$$

$$= -2\left(\frac{dz}{dt}(\cdot, 0), \tilde{v}(\cdot, 0)\right) + 2\int_0^\xi \left(\frac{\partial\eta}{\partial t}, \varphi\right) dt - 2a_0(z(\cdot, 0), \tilde{v}_n(\cdot, 0)) + 2\int_0^\xi a_0(\eta, \varphi)\, dt. \quad (19)$$

С учетом начальных условий имеем

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t}, \tilde{v}(0)\right) = a_0(z(\cdot, 0), \tilde{v}_n(0)) = 0.$$

Следовательно, из (19) вытекает

$$\|\varphi(\cdot, \xi)\|_{L_2}^2 + 2\int_0^\xi a_0(\varphi, \varphi)\, dt \le \|\varphi(\cdot, 0)\|_{L_2}^2 + 2\int_0^\xi \left(\frac{\partial\eta}{\partial t}, \varphi\right) dt + 2\int_0^\xi a_0(\eta, \varphi)\, dt$$

или

$$\|\varphi(\cdot, \xi)\|_{L_2}^2 + 2(1 - \varepsilon_2)\int_0^\xi a_0(\varphi, \varphi)\, dt \le \|\varphi(\cdot, 0)\|_{L_2}^2 +$$

$$+ \frac{\mathrm{T}}{2\varepsilon_1}\left\|\frac{\partial\eta}{\partial t}\right\|_{L_2 \times L_\infty}^2 + \frac{\mathrm{T}}{2\varepsilon_2} a_0(\eta, \eta)_{L_\infty} + 2\mathrm{T}\varepsilon_1\|\varphi\|_{L_2 \times L_\infty}^2. \quad (20)$$

 ISSN 0572-2691

Выберем $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ такими, что $\varepsilon_2 \in (0,1)$, $\varepsilon_1 \in \left(0, \frac{1}{2\mathrm{T}}\right)$. Тогда

$$\|\varphi\|^2_{L_2\times L_\infty} \le c_2^2\left(\|\varphi(\cdot,0)\|^2_{L_2} + \left\|\frac{\partial\eta}{\partial t}\right\|^2_{L_2\times L_\infty} + a_0(\eta,\eta)_{L_\infty}\right), \tag{21}$$

где $\|\psi\|_{L_2\times L_\infty} = \sup\limits_{t\in(0,\mathrm{T}]}\|\varphi\|_{L_2}$, $\|\varphi\|_{L_2} = (\varphi,\varphi)^{1/2}$, $a_0(\eta,\eta)_{L_\infty} = \sup\limits_{t\in(0,\mathrm{T}]} a_0(\eta,\eta)$. С учетом неравенства треугольника из (21) получаем

$$\|z\|_{L_2\times L_\infty} \le \|\eta\|_{L_2\times L_\infty} + \|\varphi\|_{L_2\times L_\infty} \le$$

$$\le c_3\left(\|\eta\|_{L_2\times L_\infty} + \|z(\cdot,0)\|_{L_2} + \left\|\frac{\partial\eta}{\partial t}\right\|_{L_2\times L_\infty} + a_0^{1/2}(\eta,\eta)_{L_\infty}\right).$$

Так как $a_0(z(\cdot,0), z(\cdot,0)) \le a_0(\eta(\cdot,0), \eta(\cdot,0))$, то

$$\|z\|_{L_2\times L_\infty} \le c_4\left(\|\eta\|_{L_2\times L_\infty} + \left\|\frac{\partial\eta}{\partial t}\right\|_{L_2\times L_\infty} + a_0^{1/2}(\eta,\eta)_{L_\infty}\right). \tag{22}$$

Лемма 2. Пусть $u(x,t)$ и $U(x,t)$ — обобщенное и приближенное обобщенное решения задачи (1)–(6). Тогда имеет место неравенство (22).

Теорема 2. Пусть $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ — конечно-элементный базис подпространства H_{n0} функций метода конечных элементов (МКЭ) регулярного семейства с полиномами МКЭ степени k на конечных элементах разбиения областей $\overline{\Omega}_1, \overline{\Omega}_2$ $\forall t \in (0,\mathrm{T}]$, а $u(x,t)$ — достаточно гладкое на $\Omega_{l\mathrm{T}}$, $l = 1, 2$, классическое решение начально-краевой задачи (1)–(6). Тогда для погрешности $Z = u - U$ имеет место оценка

$$\|Z\|_{L_2\times L_\infty} \le ch^k,$$

где $U = U(x,t)$ — приближенное обобщенное решение МКЭ, $c = \mathrm{const} > 0$, h — наибольший из диаметров всех конечных элементов данного регулярного семейства.

Справедливость теоремы устанавливается на основе неравенства (22) с учетом неравенства (15) и оценок интерполяции [5].

Схема Кранка–Николсона

Учитывая представления (10) и базис $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$ подпространства $H_{n0} \subset V_0$, из (11)–(13) получаем следующую задачу Коши для системы n линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$M\ddot{\alpha} + M_1\dot{\alpha} + K\alpha = F(t),\ t \in (0,\mathrm{T}], \tag{23}$$

$$M_0\alpha(0) = F_0, \tag{24}$$

$$M_0^1\dot{\alpha}(0) = F_0^1. \tag{25}$$

Здесь

$$M=\{m_{ij}\}_{i,\,j=1}^{n},\ \ M_1=\{m_{ij}^1\}_{i,\,j=1}^{n},\ \ K=\{k_{ij}\}_{i,\,j=1}^{n},$$

$$M_0=\{m_{0ij}\}_{i,\,j=1}^{n},\ \ M_0^1=\{m_{0ij}^1\}_{i,\,j=1}^{n},\ \ F=\{f_i\}_{i=1}^{n},\ \ F_0=\{f_{0i}\}_{i=1}^{n},$$

$$F_0^1=\{f_{0i}^1\}_{i=1}^{n},\ \ m_{ij}=(\varphi_i,\varphi_j),\ \ m_{ij}^1=a_0(\varphi_i,\varphi_j),\ \ k_{ij}=a(\varphi_i,\varphi_j),$$

$$m_{0ij}=a_0(\varphi_i,\varphi_j),\ \ m_{0ij}^1=(\varphi_i,\varphi_j),\ \ f_i=l(\varphi_i),\ \ f_{0i}=a_0(y_0,\varphi_i),\ \ f_{0i}^1=(y_1,\varphi_i).$$

Для задачи Коши (23)–(25) разностную схему Кранка–Николсона запишем так:

$$a_0(U^0,v_n)=a_0(y_0,v_n),\ \ \forall v_n\in H_{n0}, \tag{26}$$

$$(\Theta^0,v_n)=(y_1,v_n),\ \ \forall v_n\in H_{n0}, \tag{27}$$

$$(\partial_\tau\Theta^j,v_n)+a_0(\Theta^{j+1/2},v_n)+a(U^{j+1/2},v_n)=(f^{j+1/2},v_n),\ \ j=\overline{0,m-1}, \tag{28}$$

$$U^{j+1}=U^j+\tau\Theta^{j+1/2}, \tag{29}$$

где $\partial_\tau\Theta^j=(\Theta^{j+1}-\Theta^j)/\tau$, $\Theta^{j+1/2}=(\Theta^j+\Theta^{j+1})/2$, $U^0=U(x,0)$.

Обозначим

$$q^j=\Theta^j-\left(\frac{\partial\overline{u}_n}{\partial t}\right)^j,\ \ \eta^j=u^j-\overline{u}_n^j,\ \ \xi^j=U^j-\overline{u}_n^j. \tag{30}$$

Учитывая (7), (14), (28), запишем

$$(\partial_\tau q^j,v_n)+a_0(q^{j+1/2},v_n)+a(\xi^{j+1/2},v_n)=(f^{j+1/2},v_n)-\left(\partial_\tau\left(\frac{\partial\overline{u}_n}{\partial t}\right)^j,\ v_n\right)-$$

$$-a_0\left(\left(\frac{\partial\overline{u}_n}{\partial t}\right)^{j+1/2},\ v_n\right)-a(\overline{u}_n^{j+1/2},v_n)=(\overline{\rho}^j,v_n)+a_0\left(\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^{j+1/2},v_n\right), \tag{31}$$

где

$$\overline{\rho}^j=\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)^{j+1/2}-\partial_\tau\left(\frac{\partial\overline{u}_n}{\partial t}\right)^j=\rho^j+\partial_\tau\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^j,$$

$$\rho^j=\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)^{j+1/2}-\partial_\tau\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^j. \tag{31$'$}$$

Из (29), (30) следует

$$\partial_\tau\xi^j=\Theta^{j+1/2}-\partial_\tau\overline{u}_n^j=q^{j+1/2}-\left(\partial_\tau\overline{u}_n^j-\left(\frac{\partial\overline{u}_n}{\partial t}\right)^{j+1/2}\right)=$$

 ISSN 0572-2691

$$= q^0 + \frac{\tau}{2}\left(\sum_{i=0}^{j} \partial_\tau q^i + \sum_{i=0}^{j-1} \partial_\tau q^i \right) + \partial_\tau \eta^j - \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^{j+1/2} - \sigma^j , \qquad (32)$$

где $\sigma^j = \partial_\tau u^j - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+1/2}, \; j = \overline{1, m-1}.$

Аналогично имеем

$$\partial_\tau \xi^0 = q_0 + \frac{\tau}{2}\partial_\tau q^0 + \partial_\tau \eta^0 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^{1/2} - \sigma^0. \qquad (33)$$

Введем в рассмотрение функции $\varphi^j(x), \; j = \overline{0, m}$:

$$\varphi^0(x) = 0, \; \varphi^1(x) = \tau \xi^{1/2}, \; \varphi^j(x) = \tau \sum_{i=0}^{j-1} \xi^{i+1/2}, \; j = \overline{2, m}. \qquad (34)$$

Тогда

$$\varphi^{1/2} = \frac{\tau}{2}\xi^{1/2}, \; \varphi^{j+1/2} = \frac{\tau}{2}\left(\sum_{i=0}^{j} \xi^{i+1/2} + \sum_{i=0}^{j-1} \xi^{i+1/2} \right), \; j = \overline{1, m-1}. \qquad (35)$$

Учитывая (29)–(33), имеем

$$(\partial_\tau \xi^0, v_n) + \frac{\tau}{2} a_0(\partial_\tau \xi^0, \, v_n) + a(\varphi^{1/2}, v_n) = \left(q^0 + \partial_\tau \eta^0 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^{1/2} - \sigma^0, v_n \right) +$$

$$+ \frac{\tau}{2}\{(\partial_\tau q^0, v_n) + a_0(q^{1/2}, v_n) - a_0(\overline{\sigma}^0, v_n) + a(\xi^{1/2}, v_n)\} =$$

$$= \left(q^0 + \partial_\tau \eta^0 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^{1/2} - \sigma^0, v_n \right) + \frac{\tau}{2}\left\{ (\overline{\rho}^0, v_n) + a_0\left(\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^{1/2}, \; v_n \right) \right\} - \frac{\tau}{2} a_0(\overline{\sigma}^0, v_n) =$$

$$= \left(q^0 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^{0}, v_n \right) - \frac{\tau}{2}\left(\partial_\tau \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^{0}, \, v_n \right) + (\partial_\tau \eta^0 - \sigma^0, \, v_n) +$$

$$+ \frac{\tau}{2}\left\{ (\overline{\rho}^0, v_n) + a_0\left(\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^{1/2}, v_n \right) \right\} - \frac{\tau}{2} a_0(\overline{\sigma}^0, v_n). \qquad (36)$$

Аналогично получим

$$(\partial_\tau \xi^j, v_n) + \frac{\tau}{2}\left\{ \sum_{i=0}^{j} a_0(\partial_\tau \xi^i, v_n) + \sum_{i=0}^{j-1} a_0(\partial_\tau \xi^i, v_n) \right\} + a(\varphi^{j+1/2}, v_n) =$$

$$= \left(q^0 + \partial_\tau \eta^j - \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^{j+1/2} - \sigma^j, v_n \right) +$$

$$+\frac{\tau}{2}\sum_{i=0}^{j}((\partial_\tau q^i, v_n) + a_0(q^{i+1/2}, v_n) - a_0(\overline{\sigma}^i, v_n) + a(\xi^{i+1/2}, v_n)) +$$

$$+\frac{\tau}{2}\left\{\sum_{i=0}^{j-1}((\partial_\tau q^i, v_n) + a_0(q^{i+1/2}, v_n) - a_0(\overline{\sigma}^i, v_n) + a(\xi^{i+1/2}, v_n))\right\} =$$

$$=\left(q^0 - \left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^0, v_n\right) - \frac{\tau}{2}\sum_{i=0}^{j}\left(\partial_\tau\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^i, v_n\right) - \frac{\tau}{2}\sum_{i=0}^{j-1}\left(\partial_\tau\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^i, v_n\right) +$$

$$+\frac{\tau}{2}\left\{\sum_{i=0}^{j}\left((\overline{\rho}^i, v_n) + a_0\left(\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^{i+1/2}, v_n\right) - a_0(\overline{\sigma}^i, v_n)\right) +\right.$$

$$\left.+\sum_{i=0}^{j-1}\left((\overline{\rho}^i, v_n) + a_0\left(\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^{i+1/2}, v_n\right) - a_0(\overline{\sigma}^i, v_n)\right)\right\} + (\partial_\tau \eta^j - \sigma^j, v_n), \tag{37}$$

где $\overline{\sigma}^j = \partial_\tau \overline{u}_n^j - \left(\frac{\partial \overline{u}_n}{\partial t}\right)^{j+1/2}$, $j = \overline{1, m}$.

Пусть $v_n = \partial_\tau \varphi^j = \xi^{j+1/2}$. Тогда из (36), (37) вытекает

$$\frac{1}{2}\|\xi^{j+1}\|^2 - \frac{1}{2}\|\xi^j\|^2 + \tau a_0(\xi^{j+1/2}, \xi^{j+1/2}) - \tau a_0(\xi^0, \xi^{j+1/2}) +$$

$$+\frac{1}{2}a(\varphi^{j+1}, \varphi^{j+1}) - \frac{1}{2}a(\varphi^i, \varphi^i) = \tau R_1^j(\xi^{j+1/2}),$$

или

$$\frac{1}{2}\|\xi^{j+1}\|^2 - \frac{1}{2}\|\xi^j\|^2 + \tau(1-\varepsilon) a_0(\xi^{j+1/2}, \xi^{j+1/2}) +$$

$$+\frac{1}{2}a(\varphi^{j+1}, \varphi^{j+1}) - \frac{1}{2}a(\varphi^i, \varphi^i) \le \tau R^j(\xi^{j+1/2}). \tag{38}$$

Здесь ε — произвольное положительное число, удовлетворяющее условию $\varepsilon \in (0, 1)$,

$$R^j(\xi^{j+1/2}) = R_1^j(\xi^{j+1/2}) + \frac{1}{4\varepsilon}a_0(\xi^0, \xi^0),$$

$$R_1^j(\xi^{j+1/2}) = (\partial_\tau\eta^j - \sigma^j, v_n) - \frac{\tau}{2}\left\{\sum_{i=0}^{j}\left(\partial_\tau\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^i, \xi^{i+1/2}\right) + \sum_{i=0}^{j-1}\left(\partial_\tau\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^i, \xi^{i+1/2}\right)\right\} +$$

$$+\frac{\tau}{2}\left\{\sum_{i=0}^{j}\left((\overline{\rho}^i, \xi^{i+1/2}) + a_0\left(\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^{i+1/2}, \xi^{j+1/2}\right) - a_0(\overline{\sigma}^i, \xi^{j+1/2})\right) +\right.$$

$$+\sum_{i=0}^{j-1}\left((\rho^i,\xi^{j+1/2})+a_0\left(\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^{i+1/2},\xi^{j+1/2}\right)-a_0(\overline{\sigma}^i,\xi^{j+1/2})\right)\Bigg\}.$$

Следуя [3, 4], легко показать справедливость соотношений

$$R_1^j(\xi^{j+1/2})=(\partial_\tau\eta^j-\sigma^j,v_n)-\frac{\tau}{2}\left\{\left(\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^{j+1/2},\xi^{j+1/2}\right)-\frac{2}{\tau}\left(\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^{0},\xi^{j+1/2}\right)\right\}+$$

$$+\frac{\tau}{2}\left\{\left(\sum_{i=0}^{j}\overline{\rho}^i,\xi^{i+1/2}\right)+a_0\left(\sum_{i=0}^{j}\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^{i+1/2},\xi^{j+1/2}\right)-a_0\left(\sum_{i=0}^{j}\overline{\sigma}^i,\xi^{j+1/2}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{i=0}^{j-1}\rho^i,\xi^{j+1/2}\right)+a_0\left(\sum_{i=0}^{j-1}\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^{i+1/2},\xi^{j+1/2}\right)-a_0\left(\sum_{i=0}^{j-1}\overline{\sigma}^i,\xi^{j+1/2}\right)\right\}\le$$

$$\le\frac{c_1}{\varepsilon_1}(\tau^4+h^{2k})+\varepsilon_1 c_2\max_j\|\xi^j\|^2+\varepsilon_1 c_3\, a_0(\xi^{j+1/2},\xi^{j+1/2}),\tag{39}$$

где ε_1 — произвольное положительное число.

Поскольку $a_0(\xi^0,\xi^0)\le c_2\,h^{2k}$, то с учетом (39) из (38) имеем

$$\|\xi^l\|^2+\tau(1-\varepsilon)\sum_{j=0}^{l}a_0(\xi^{j+1/2},\xi^{j+1/2})\le\|\xi^0\|+\frac{c_1\mathrm{T}}{\varepsilon_1}(h^{2k}+\tau^4)+$$

$$+\varepsilon_1 c_2\mathrm{T}\max_j\|\xi^j\|^2+\varepsilon_1 c_3\,\tau\sum_{j=0}^{l}a_0(\xi^{j+1/2},\xi^{j+1/2}).$$

Следовательно,

$$\max_j\|\xi^j\|^2\le c(h^{2k}+\tau^2).\tag{40}$$

Учитывая (40), имеем

$$\max_{j=\overline{1,m}}\|U^j-u_j\|\le\|\xi^j\|+\|\eta^j\|\le c(h^k+\tau^2),\tag{41}$$

где $u_j=u(x,t_j)$.

Тем самым доказана справедливость следующей теоремы.

Теорема 3. Пусть $u(x,t)$ — классическое решение начально-краевой задачи (1)–(6), которое достаточно гладкое на $\overline{\Omega}_{l\mathrm{T}}$, $l=1,2$, а $\{U^j(x)\}_{j=0}^m$ — ее приближенное решение, получаемое с помощью схемы Кранка–Николсона и функций МКЭ регулярного семейства на областях Ω_l, $l=1,2$. Тогда имеет место оценка (41).

І.В. Сергієнко, В.С. Дейнека

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ, ЩО ОПИСУЮТЬСЯ ПСЕВДОГІПЕРБОЛІЧНИМ РІВНЯННЯМ З УМОВАМИ СПРЯЖЕННЯ

Побудовано обчислювальні алгоритми підвищеного порядку точності для дискретизації нового класу задач, що описують динамічні процеси в багатокомпонентних середовищах псевдогіперболічними рівняннями з умовами спряження неідеального контакту.

I.V. Sergienko, V.S. Deineka

NUMERICAL SIMULATION OF DYNAMIC PROCESSES DESCRIBED BY A PSEUDOHYPERBOLIC EQUATION WITH CONJUGATION CONDITIONS

Computational algorithms are created that have an increased order of accuracy. They are used for discretization of a new class of problems that describe dynamic processes in multicomponent media by pseudohyperbolic equations with conjugation conditions of an imperfect contact.

1. *Сергиенко И.В., Дейнека В.С.* Оптимальное управление системой, описываемой псевдогиперболическим уравнением с условиями сопряжения // Проблемы управления и информатики. — 2002. — № 5. — С. 23–44.
2. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М. : Мир, 1972. — 414 с.
3. *Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В.* Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. — Киев : Наук. думка, 1998. — 615 с.
4. *Garth A. Baker.* Error estimates for finite element methods for second order hyperbolic equations // SIAM J. Numer. Anal. — 1976. — **13**, N 4. — P. 564–576.
5. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. — М. : Мир, 1980. — 512 с.

Получено 16.12.2003