УДК 62.50:519.95

С.В. Соколов

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Конфликтные задачи, возникающие при управлении динамическими объектами, описываемыми дифференциальными уравнениями, и объединяемые термином «дифференциальные игры», занимают в современной теории оптимального управления существенное место.

Математический образ конфликтных задач составляют задачи, в которых рассматривается динамическая система, описываемая дифференциальными уравнениями, связывающими ее фазовые координаты с управляющими и другими воздействиями, причем часть воздействий сориентирована на выполнение требуемой известной задачи, а остальные мешают ее достижению. Поэтому в рассмотренную схему укладываются многие задачи одностороннего управления (задачи управления с неполной информацией, с неопределенной помехой и т.д.). Далее игровой характер задачи будем понимать в том смысле, что игрок в каждый момент времени при определении своих действий может опираться лишь на знание физических возможностей своих и противника, а также целей противника.

Характерно, что существующие методы теории дифференциальных игр не позволяют только на их основе решать стандартным способом ту или иную прикладную задачу, а поиски специализированных решений приводят к постоянному появлению новых построений, порождаемых иными трактовками дифференциальных игр [1, 2]. Поэтому разработка подхода к поиску решения задач дифференциальных игр, позволяющего в общем случае в аналитическом виде определять оптимальные стратегии игроков в практических приложениях, представляет как научный, так и практический интерес.

Еще большую актуальность такой подход приобретает в связи с рассмотрением игр объектов, описываемых дифференциальными уравнениями с частными производными, для которых, в отличие от игроков-объектов, задаваемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, вообще отсутствуют какие-либо подходы к решению.

Исходя из изложенного, рассмотрим задачу дифференциальной игры в следующей постановке.

Векторы состояния игроков A и B — распределенных динамических систем — описываются векторными нелинейными дифференциальными уравнениями с частными производными вида

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} = F_i\left(\varphi_{i=A,B}, \frac{\partial\varphi_{i=A,B}}{\partial X}, ..., \frac{\partial\varphi^{(n)}_{i=A,B}}{\partial X^{(n)}}, X, t\right) + \\ + F_{i_0}\left(\varphi_{i=A,B}, \frac{\partial\varphi_{i=A,B}}{\partial X}, ..., \frac{\partial\varphi^{(n)}_{i=A,B}}{\partial X^{(n)}}, X, t\right) U_i(\varphi_{i=A,B}, X, t), \tag{1}$$

где $\varphi_i = \varphi_i(X,t)$ — вектор состояния распределенной системы-игрока, $i = A, B$; X — вектор аргумента; F_i, F_{i_0} — известные нелинейные векторные и матричные функции; $U_i = U_i(\varphi_{i=A,B}, X, t)$ — векторы игрового управления.

От каждого i-го игрока, точно знающего текущее состояние свое и противника, требуется выбрать управление U_i так, чтобы минимизировать некоторый заданный функционал качества $J_{1_i}(\varphi_{i=A(B)})$ при одновременной максимизации другого $J_{2_i}(\varphi_{i=B(A)})$. Так, например, в традиционных задачах уклонения–перехвата упругих космических аппаратов (КА) от КА A требуется обеспечить в каждый текущий момент времени минимум отклонения субвектора φ_{SA} параметров его состояния (координат, линейной и угловой скорости и т.д.) от аналогичного субвектора φ_{SB} состояния КА B по всей области существования аргумента X

$$J_{1A} = \int_X [\varphi_{SA} - \varphi_{SB}]^{\mathrm{T}} [\varphi_{SA} - \varphi_{SB}] \, dX,$$

а от КА B — наоборот, обеспечить его максимум, т.е. минимум

$$J_{1B} = -\int_X [\varphi_{SA} - \varphi_{SB}]^{\mathrm{T}} [\varphi_{SA} - \varphi_{SB}] \, dX.$$

В задачах электронной борьбы передающему центру A необходимо обеспечить минимум отклонения субвектора параметров φ_{SA} электромагнитного потока от вектора заданных значений g в соответствующей области аргумента X_*

$$J_{1A} = \int_{X_*} [\varphi_{SA} - g]^{\mathrm{T}} [\varphi_{SA} - g] \, dX,$$

а станции, создающей помехи, — минимум его отклонения от вектора значений h, требуемых игроку B (например, нулевых)

$$J_{1B} = -\int_{X_*} [\varphi_{SA} - h]^{\mathrm{T}} [\varphi_{SA} - h] \, dX.$$

В более сложном варианте игры игроку A еще дополнительно требуется подавить станцию B, т.е. обеспечить минимум функционала $J_{2A} = \int_{X_*} \varphi_{SB}^{\mathrm{T}} \varphi_{SB} \, dX$, а игроку B — сохранить параметры своего потока в заданных пределах, т.е. минимизировать $J_{2B} = \int_{X_*} [\varphi_{SB} - q]^{\mathrm{T}} [\varphi_{SB} - q] \, dX$, где q — вектор известных требуемых значений.

В обобщенной форме существующие для распределенных систем критерии J_{ji} можно представить, согласно [3, 4], в виде

$$J_{ji} = \int_X \Phi_{ji} [X, \varphi_{i=A,B}(X, t)] \, dX,$$

где Φ_i — известная нелинейная функция векторного аргумента, $i = A, B$, $j = 1, 2, \ldots$.

Следует при этом отметить, что в большинстве практических случаев (как видно из изложенного выше) функция Φ_{ji} выбирается или монотонно возрастающей на известном интервале аргумента, или квадратичной, что позволяет в дальнейших рассуждениях сделать допущение о ее положительной определенности.

ISSN 0572-2691

Перед окончательной формализацией постановки задачи объединим систему векторных уравнений (1)

$$\frac{\partial \varphi_A}{\partial t} = F_A + F_{A0}\,U_A\,(\varphi_A, \varphi_B, X, t),$$

$$\frac{\partial \varphi_B}{\partial t} = F_B + F_{B0}\,U_B\,(\varphi_A, \varphi_B, X, t)$$

в единое векторное уравнение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = F + F_1\,U_A(\varphi, X, t) + F_2\,U_B(\varphi, X, t), \tag{2}$$

где

$$\varphi = \begin{vmatrix} \varphi_A \\ \varphi_B \end{vmatrix}, \quad F = \begin{vmatrix} F_A \\ F_B \end{vmatrix} = F(\varphi, X, t),$$

$$F_1 = \begin{vmatrix} F_{A0} \\ 0 \end{vmatrix} = F_1(\varphi, X, t), \quad F_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ F_{B0} \end{vmatrix} = F_2(\varphi, X, t),$$

а также учтем, что при синтезе реальных динамических систем, помимо рассмотренных критериев, решающих задачу достижения заданных требований к динамике состояния системы (2), при формировании вектора управления вводят, как правило, критерий, минимизация которого обеспечивает минимум «энергетики» управления в произвольный текущий момент времени и который может быть записан в общем виде в форме

$$J_{U_i} = \int_{t_0}^{t}\int_X \Phi_{U_i}[U_i(\varphi, X, t)]\,dX\,dt,$$

где Φ_{U_i} — известная нелинейная функция, выбираемая в подавляющем большинстве случаев квадратичной: $\Phi_{U_i} = U_i^{\mathrm{T}} U_i$, $i = A, B$.

Тогда в соответствии с изложенным организация процедуры синтеза искомых игровых управлений требует выбора векторов U_A, U_B из условия минимума соответствующих функционалов

$$\begin{aligned} J_A &= \int_X \Phi_A[X, \varphi]\,dX + \int_{t_0}^{t}\int_X \Phi_{U_A}[U_A]\,dX\,dt, \\ J_B &= \int_X \Phi_B[X, \varphi]\,dX + \int_{t_0}^{t}\int_X \Phi_{U_B}[U_B]\,dX\,dt, \end{aligned} \tag{3}$$

одновременно определенных на множестве решений уравнения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = F + F_1 U_A + F_2 U_B. \tag{4}$$

В силу оговоренной выше положительной определенности функционалов $J_{A(B)}$, а также их «энергетических» составляющих $\Phi_{U_{A(B)}}$, для решения поставленной задачи целесообразно использовать тот известный факт, что при неотрицательно определенной критериальной функции для обеспечения ее минимального значения в каждый момент времени достаточно, чтобы производная ее по времени, взятая с обратным знаком, имела максимум [4, 5]. На первом этапе синтеза, при поиске управления U_A, это приводит к условию

$$\max_{U_A}(-\dot{J}_A) = \max_{U_A}\left\{-\int_X \left(\frac{\partial \Phi_A}{\partial \varphi}\dot{\varphi} + \Phi_{U_A}[U_A]\right)dX\right\} =$$

$$= \max_{U_A}\left\{-\int_X \left(\frac{\partial \Phi_A}{\partial \varphi}[F + F_1 U_A + F_2 U_B] + \Phi_{U_A}[U_A]\right)dX\right\}.$$

Анализ полученного выражения показывает, что решение поставленной задачи сводится к классической задаче отыскания вектор-функции U_A, реализующей минимум определенного интеграла

$$\int_X \left(\frac{\partial \Phi_A}{\partial \varphi}[F + F_1 U_A + F_2 U_B] + \Phi_{U_A}[U_A]\right)dX.$$

При этом искомая вектор-функция U_A должна удовлетворять уравнению Эйлера

$$\frac{\partial \Phi_A}{\partial \varphi}F_1 - \frac{\partial}{\partial U_A}\Phi_{U_A}[U_A] = 0,$$

или

$$\left(\frac{\partial \Phi_{U_A}}{\partial U_A}\right)^{\mathrm{T}} = F_1^{\mathrm{T}}\frac{\partial \Phi_A^{\mathrm{T}}}{\partial \varphi}, \tag{5}$$

из которого следует, что в общем случае определение вектора U_A требует решения нелинейного векторного уравнения, представляющего собой непростую вычислительную задачу. В частном случае квадратичной формы функции Φ_{U_A} решение уравнения (5) легко находится аналитически:

$$(2U_{A_{\mathrm{opt}}}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = F_1^{\mathrm{T}}\frac{\partial \Phi_A^{\mathrm{T}}}{\partial \varphi},$$

т.е.

$$U_{A_{\mathrm{opt}}} = \frac{1}{2}F_1^{\mathrm{T}}\frac{\partial \Phi_A^{\mathrm{T}}}{\partial \varphi} = \frac{1}{2}F_{A_0}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \Phi_A^{\mathrm{T}}}{\partial \varphi_A}. \tag{6}$$

Здесь функция φ определяется уже из решения уравнения, полученного подстановкой $U_{A_{\mathrm{opt}}}$ в уравнение (2):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = F + \frac{1}{2}F_1 F_1^{\mathrm{T}}\frac{\partial \Phi_A^{\mathrm{T}}}{\partial \varphi} + F_2 U_B = F_* + F_2 U_B. \tag{7}$$

Уравнения (6), (7) завершают 1-й шаг (этап) синтеза искомого игрового управления, после чего начинается процедура 2-го шага — поиск оптимального вектора U_B из условия минимума критерия J_B:

$$J_B = \int_X \Phi_B[X, \varphi]dX + \int_{t_0}^{t}\int_X \Phi_{U_B}[U_B]dX\,dt. \tag{8}$$

 ISSN 0572-2691

Очевидно, что вследствие совпадения структур уравнения (7)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = F_* + F_2 U_B$$

и уравнения (4), а также критериев J_A и J_B вектор U_B может быть сформирован с использованием подхода, совпадающего с приведенным. Таким образом, задача 2-го этапа — синтез оптимального управления $U_B(\varphi, X, t)$ — может быть сформулирована как задача поиска вектор-функции U_B, доставляющей минимум (8) на множестве функций $\varphi(X, t)$, удовлетворяющих решению (7). Так как данная задача с точностью до обозначений совпадает с приведенной выше, то и алгоритм ее решения оказывается тем же. Повторяя прежние вычисления, приходим к уравнению для оптимального управления $U_B(\varphi, X, t)$, аналогичному (5):

$$\left(\frac{\partial\Phi_{U_B}}{\partial U_B}\right)^{\mathrm{T}} = F_2^{\mathrm{T}} \frac{\partial\Phi_B^{\mathrm{T}}}{\partial\varphi},$$

откуда для традиционного случая квадратичной формы Φ_{U_B} получаем

$$U_{B_{\text{opt}}} = \frac{1}{2} F_2^{\mathrm{T}} \frac{\partial\Phi_B^{\mathrm{T}}}{\partial\varphi} = \frac{1}{2} F_{B_0}^{\mathrm{T}} \frac{\partial\Phi_B^{T}}{\partial\varphi_B}. \tag{9}$$

Очевидно, что в этом случае вектор-функция φ, определяющая выражения как для $U_{A_{\text{opt}}}(\varphi, X, t)$, так и для $U_{B_{\text{opt}}}(\varphi, X, t)$, представляет собой решение уравнения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = F + \frac{1}{2} F_1 F_1^{\mathrm{T}} \frac{\partial\Phi_A^{\mathrm{T}}}{\partial\varphi} + \frac{1}{2} F_2 F_2^{\mathrm{T}} \frac{\partial\Phi_B^{\mathrm{T}}}{\partial\varphi}, \tag{10}$$

интегрирование которого (каждым игроком для своего вектора состояния) завершает процесс решения поставленной задачи.

Следует отметить, что с вычислительной точки зрения решение уравнения (10) оказывается ненамного сложнее, чем решение исходного уравнения (2). Более того, сходство структур (2) и (10) обуславливает возможность использования в полном объеме методов, разработанных для решения уравнения (2) в работах [3, 4].

Для иллюстрации возможности практического использования предложенного подхода рассмотрим следующий пример.

Пример. Объект *A*, описываемый нелинейным стохастическим уравнением

$$\dot{x} = -x - 0{,}01x^2 - 0{,}2y + U_A + \xi_X,$$

где ξ_X — белый гауссовский нормированный шум, функционирует в условиях противодействия противника *B*, описываемого, в свою очередь, уравнением

$$\dot{y} = -y^3 - 0{,}1x^2 + U_B + \xi_Y;$$

здесь ξ_Y — также белый гауссовский нормированный шум.

Игроку *A*, наблюдающему за состоянием своим и противника с помощью измерителя

$$z_X = 1{,}5x^2 + y + \zeta_X,$$

где ζ_X — белый гауссовский центрированный шум с интенсивностью D_X, требуется обеспечить в каждый текущий момент времени близкое к гауссовскому распределение координаты x с нулевым средним математическим ожиданием (МО) $m_x = 0$ и дисперсией $D_X = 0{,}8$ при одновременном «навязывании» противнику близкого к гауссовскому распределения с МО $m_y = 3{,}5$ и дисперсией $D_Y = 50$. Аналогично противодействующий ему игрок B, наблюдающий за своим состоянием и состоянием объекта A с помощью измерителя

$$z_Y = y^2 + x + \zeta_Y,$$

где ζ_Y — белый гауссовский центрированный шум с интенсивностью D_Y, имеет целью добиться для себя гауссовского распределения со средним МО, равным 0,5, и дисперсией 0,6, а для противника — со средним МО, равным 7, и дисперсией 50. Так как цель игры — обеспечение соответствующих распределений, то для ее достижения необходимо знание соответствующей плотности распределения $\varphi = \varphi(x, y)$, описываемой в данном случае уравнением Стратоновича (см. [3, 5])

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = (1 + 0{,}02x + 3y^2)\,\varphi + (x + 0{,}01x^2 + 0{,}2y)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (y^3 + 0{,}1x^2)\frac{\partial\varphi}{\partial y} +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) + [Q - Q_0]\,\varphi - U_A\frac{\partial\varphi}{\partial x} - U_B\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial U_A}{\partial x}\varphi - \frac{\partial U_B}{\partial y}\varphi, \qquad (11)$$

$$Q = -\frac{1}{2}\left[z - \begin{vmatrix} 1{,}5x^2 + y \\ y^2 + x \end{vmatrix}\right]^{\mathrm{T}} \begin{vmatrix} D_X^{-1} & 0 \\ 0 & D_Y^{-1} \end{vmatrix} \left[z - \begin{vmatrix} 1{,}5x^2 + y \\ y^2 + x \end{vmatrix}\right],$$

совпадающим по структуре с уравнением (4).

Минимизируемые функционалы в рассматриваемом случае принимают вид:

$$J_A = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\{\varphi(x, y) - G_1[(0; 0{,}8; x), (3{,}5;50;y)]\}^2\,dx\,dy + \int_{t_0}^{t}\int_{-\infty}^{\infty}\int U_A^2(x, y, t)\,dx\,dy\,dt,$$

$$J_B = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\{\varphi(x, y) - G_2[(7; 50;x), (0{,}5; 0{,}6; y)]\}^2\,dx\,dy + \int_{t_0}^{t}\int_{-\infty}^{\infty}\int U_B^2(x, y, t)\,dx\,dy\,dt,$$

где $G_i[(m_x, D_X, x), (m_y, D_Y, y)],\ i = 1, 2,$ — двумерное гауссовское распределение с соответствующими характеристиками.

Следуя рассуждениям, приведшим к выражениям для оптимальных законов управления (6) и (9), по аналогии получаем:

$$U_{A_{\mathrm{opt}}}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(G_1 - \varphi)\,\varphi,$$
$$U_{B_{\mathrm{opt}}}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(G_2 - \varphi)\,\varphi, \qquad (12)$$

где функция φ определяется интегрированием уравнения (11) после подстановки в него законов (12).

Данное уравнение решено методом прямоугольных сеток в области $(x, y) \in \in [-230; 230]$ с шагом $\Delta x = \Delta y = 0{,}05$ при $D_X = D_Y = 1{,}5$, $\varphi(x, y, t_0) = G[(0{,}1; 0{,}3; x), (0{,}4; 0{,}4; y)]$ для $Z(t_i)$, полученных в результате численного моделирования уравнений объектов и наблюдателей на интервале $t \in [0, 100]$ методом Рунге–Кутта 4-го порядка с шагом $\Delta t = 0{,}05$ с (формирование управления происходило в масштабе времени поступления измерительной информации, т.е. для каждого временнóго шага моделирования t_i). По окончании времени моделирования интегральные квадратичные отклонения φ оказались такими:

— при отсутствии противодействия со стороны игрока B (управление $U_B = 0$, $J_B = 0$) отклонение φ от G_1 составило ~ 0,16;

— при отсутствии противодействия со стороны игрока A ($U_A = 0$, $J_A = 0$) отклонение φ от G_2 составило ~ 0,12;

— при реализации игры в полном объеме (как было рассмотрено выше при синтезе управлений U_A, U_B) отклонение φ от G_1 составило ~ 0,19, от G_2 ~ 0,21.

Таким образом, полученные результаты позволяют сделать вывод о возможности эффективного использования предложенного подхода для синтеза игрового управления распределенными нелинейными динамическими объектами.

С.В. Соколов

ПРО РОЗВ’ЯЗОК ЗАДАЧІ ДИФЕРЕНЦІЙНОЇ ГРИ ДЛЯ РОЗПОДІЛЕНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Запропоновано підхід, що дозволяє розв’язати задачу синтезу оптимальних керувань для гравців, які являють собою розподілені динамічні системи, за наявності повної інформації про модель об’єкта противника та його цілі. Наведено приклад, що ілюструє можливості практичного застосування розглянутого підходу.

S.V. Sokolov

ON THE DECISION OF A TASK OF DIFFERENTIAL GAME FOR THE DISTRIBUTED DYNAMIC SYSTEMS

The approach allowing to solve a problem of synthesis of optimum control for the players, representing the distributed dynamic systems is offered, at the presence of complete information about model of object of the opponent and its purposes. The example showing opportunities of practical use of the considered approach is given.

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. — М. : Наука, 1974. — 368 с.
2. *Федоров В.В.* Численные методы максимина. — М. : Наука, 1979. — 280 с.
3. *Справочник* по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. — М. : Наука, 1987. — 712 с.
4. *Сиразетдинов Т.К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. — М. : Наука, 1977. — 375 с.
5. *Казаков И.Е.* Статистическая теория систем управления в пространстве состояний. — М. : Наука, 1975. — 432 с.

Получено 10.06.2002