

## ОБ ИНТЕГРАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ПОПЕРЕЧНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СМЕЩЕНИЙ ТОЛСТОГО УПРУГОГО СЛОЯ

Предложенные в [1] и развитые в [2, 3] методы математического моделирования решений начально-краевых задач динамики распределенных пространственно-временных процессов позволяют построить функцию состояния последних в условиях неполноты наблюдений за их начально-краевым состоянием. Не менее успешной оказалась методика [1–3] и при решении сложных математических задач управления такими процессами: были построены [2, 3] начально-краевые и пространственно-распределенные функции управления линейными динамическими системами по достижении ими дискретно и непрерывно определенного желаемого состояния. Исходной для решения этих задач есть интегральная математическая модель процесса, построение которой сопряжено [3] с определенными математическими трудностями, которые увеличиваются с усложнением физики исследуемых процессов и дифференциальных моделей, если такие имеются. Один из сложноформализуемых, а следовательно, и сложноуправляемых процессов — классический процесс [4] динамики упругих объектов типа «плита-пластина». Традиционно дифференциальные уравнения динамики таких объектов строились на базе простых механических гипотез, которые позволяют восстанавливать поле распределенных по толщине упруго-динамических смещений пластины по смещению ее срединной поверхности, динамика которой описывалась двумерными дифференциальными уравнениями. Последнее не всегда оказывалось приемлемым по точности, что стало существенным при рассмотрении упругих плит-пластин конечной толщины. В работе [6] нами построены дифференциальные уравнения толстой упругой плиты конечной толщины, но неограниченной в пространстве и времени. Для исследования динамики плит конечных размеров и успешного управления такой динамикой (особенно в условиях неполноты информации об их начально-краевом состоянии) удобной была бы методика решения подобных задач, описанная и апробированная в [2, 3]. Для применения данной методики к объектам, математической моделью динамики которых есть дифференциальные уравнения, построенные в [6], ниже рассматривается переход от этих уравнений к их интегральному эквиваленту. В декартовой системе координат построена интегральная зависимость функции поперечных упруго-динамических смещений точек слоя от поверхностных нагрузок, которые их вызывают. Математические представления сравниваются с результатами решения проблемы, полученными другими авторами по другим методикам.

### Дифференциальная математическая модель поперечных динамических смещений толстого упругого слоя

Рассмотрим толстый упругий слой толщиной  $2h$ , точки которого отнесем к декартовой системе координат  $x, y, z$  так, чтобы граничные поверхности его определялись плоскостями  $z = \pm h$ . Предполагая, что поверхности эти находятся под воздействием нормальных и касательных к ним внешнединамических ( $t$  — временная координата) нагрузок  $q_1^\pm(x, y, t)$  и  $q_2^\pm(x, y, t)$ , через  $u(x, y, z, t)$ ,  $v(x, y, z, t)$ ,

$w(x, y, z, t)$  обозначим смещения точек слоя в направлении координатных осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  соответственно. При исследовании динамики такого слоя будем исходить из уравнений, которые описывают зависимость составляющих  $w_k^{(l)}(x, y, z, t)$  ( $l, k = \overline{1, 2}$ ) поперечных динамических смещений

$$w(x, y, z, t) = \sum_{l,k=1}^2 w_k^{(l)}(x, y, z, t). \quad (1)$$

Они будут такими [6]:

$$Q^{(l)}(\partial_x, \partial_y, \partial_t) w_k^{(l)}(x, y, z, t) = d_k^{(l)}(\partial_x, \partial_y, z, \partial_t) q_k^{(l)}(x, y, t) \quad (l, k = \overline{1, 2}). \quad (2)$$

Здесь и далее

$$q_1^{(1)}(x, y, t) = \frac{1}{2}(q_1^+(x, y, t) + q_1^-(x, y, t)), \quad q_2^{(1)}(x, y, t) = q_2^+(x, y, t) - q_2^-(x, y, t),$$

$$q_1^{(2)}(x, y, t) = \frac{1}{2}(q_1^+(x, y, t) - q_1^-(x, y, t)), \quad q_2^{(2)}(x, y, t) = q_2^+(x, y, t) + q_2^-(x, y, t),$$

$$\begin{aligned} Q^{(1)}(\partial_x, \partial_y, \partial_t) &= \\ &= (\Delta + D_2^2)((\lambda + 2\mu)D_1^2 - \lambda\Delta) \cos(hD_1) \frac{\sin(hD_2)}{D_2} - 4\mu\Delta D_1^2 \frac{\sin(hD_1)}{D_1} \cos(hD_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q^{(2)}(\partial_x, \partial_y, \partial_t) &= \\ &= (\Delta + D_2^2)(\lambda\Delta - (\lambda + 2\mu)D_1^2) \frac{\sin(hD_1)}{D_1} \cos(hD_2) + 4\mu\Delta D_2^2 \cos(hD_1) \frac{\sin(hD_2)}{D_2}, \end{aligned}$$

$$d_1^{(1)}(\partial_x, \partial_y, z, \partial_t) = D_1^2 \left[ (\Delta + D_2^2) \frac{\sin(zD_1)}{D_1} \frac{\sin(hD_2)}{D_2} - 2\Delta \frac{\sin(hD_1)}{D_1} \frac{\sin(zD_2)}{D_2} \right],$$

$$\begin{aligned} d_2^{(1)}(\partial_x, \partial_y, z, \partial_t) &= \\ &= d \left[ \frac{1}{\mu} ((\lambda + 2\mu)D_1^2 - \lambda\Delta) \cos(hD_1) \frac{\sin(zD_2)}{D_2} - 2D_1^2 \frac{\sin(zD_1)}{D_1} \cos(hD_2) \right], \end{aligned} \quad (3)$$

$$d_1^{(2)}(\partial_x, \partial_y, z, \partial_t) = (\Delta + D_2^2) \cos(zD_1) \cos(hD_2) - 2\Delta \cos(hD_1) \cos(zD_2),$$

$$\begin{aligned} d_2^{(2)}(\partial_x, \partial_y, z, \partial_t) &= \\ &= d \left[ 2D_2^2 \cos(zD_1) \frac{\sin(hD_2)}{D_2} + \frac{1}{\mu} (\lambda\Delta - (\lambda + 2\mu)D_1^2) \frac{\sin(hD_1)}{D_1} \cos(zD_2) \right] \end{aligned}$$

при  $\Delta$ ,  $D_1^2$ ,  $D_2^2$ , которые соотношениями

$$\Delta = d(\partial_x + \partial_y), \quad D_1^2 = \Delta_1 + \frac{1}{c_1^2} \partial_t^2, \quad D_2^2 = \Delta_2 - \frac{1}{c_2^2} \partial_t^2$$

определяются через

$$\Delta_1 = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \Delta + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \Delta_2, \quad \Delta_2 = \partial_x^2 + \partial_y^2,$$

константы Ляме  $\lambda$  и  $\mu$ , скорости  $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$  и  $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  распространения упругих волн расширения и сдвига в рассматриваемой среде ( $\rho$  — удельная плотность материала) и через оператор  $d$ , для которого

$$d(u + v) = \partial_x u + \partial_y v.$$

В частном случае, когда  $\partial_x u = \partial_y v$ ,  $\partial_y u = \partial_x v = 0$ , что соответствует осесимметрической деформации рассматриваемого слоя,

$$d = \partial_x + \partial_y, \quad \Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \partial_x^2 + \partial_y^2.$$

### Интегральная математическая модель динамики толстого упругого слоя

Рассмотрим задачу построения интегрального эквивалента дифференциальной зависимости (2) функций  $w_k^{(l)}(x, y, z, t)$  поперечных динамических смещений точек рассматриваемого слоя от внешнединамических силовых характеристик  $q_k^{(l)}(x, y, t)$  ( $l, k = 1, 2$ ), полагая, что

$$q_k^{(l)}(x, y, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} q_k^{(l)}(x', y', t') \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(t - t') dx' dy' dt',$$

где  $\delta(\cdot)$  —  $\delta$ -функция Дирака, которую для удобства представим соотношением

$$\delta(\cdot) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ip(\cdot)} dp$$

(здесь  $i$  — мнимая единица). При этом [1]

$$w_k^{(l)}(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} q_k^{(l)}(x', y', t') G_k^{(l)}(x - x', y - y', z, t - t') dx' dy' dt', \quad (4)$$

где

$$G_k^{(l)}(x - x', y - y', z, t - t') = \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d_k^{(l)}(p_1, p_2, z, q)}{Q^{(l)}(p_1, p_2, q)} e^{p_1(x-x') + p_2(y-y') + q(t-t')} dp_1 dp_2 dq. \quad (5)$$

Обозначив

$$\bar{q}_k^{(l)}(p_1, p_2, q) = \int_{-\infty}^{+\infty} q_k^{(l)}(x', y', t') e^{-(p_1 x' + p_2 y' + q t')} dx' dy' dt'$$

преобразованную по Лапласу функцию

$$q_k^{(l)}(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \bar{q}_k^{(l)}(p_1, p_2, q) e^{p_1 x + p_2 y + q t} dp_1 dp_2 dq,$$

соотношение (4) запишем в виде

$$w_k^{(l)}(x, y, z, t) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{p_1 x + p_2 y} U_k^{(l)}(p_1, p_2, z, t) dp_1 dp_2, \quad (6)$$

где

$$U_k^{(l)}(p_1, p_2, z, t) = \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \bar{q}_k^{(l)}(p_1, p_2, q) \frac{d_k^{(l)}(p_1, p_2, z, q)}{Q^{(l)}(p_1, p_2, q)} e^{q t} dq. \quad (7)$$

Заметим, что выражения (5), (7) для функций  $G_k^{(l)}(\cdot)$  и  $U_k^{(l)}(\cdot)$  конкретизируются и уточняются при осесимметрической деформации рассматриваемого слоя, когда фигурирующий в определении  $\Delta$  оператор  $d = \partial_x + \partial_y$ . Исходя из последнего, с учетом приведенных в [6] приближений операторов  $Q^{(l)}(\partial_x, \partial_y, \partial_t)$  и  $d_k^{(l)}(\partial_x, \partial_y, z, \partial_t)$  ( $l, k = \overline{1, 2}$ ) заключаем, что выражения  $Q^{(l)}(p_1, p_2, q)$  и  $d_k^{(l)}(p_1, p_2, z, q)$  в (5), (7), записанные для этого случая в рамках классической и уточненной [4, 5] теории изгиба упругих плит-пластин, будут следующими:

- для классической теории изгиба упругих пластин (точность порядка  $h$ ):

$$Q^{(1)}(p_1, p_2, q) = \mu h \left( \frac{4(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} (p_1^2 + p_2^2) - \frac{\rho}{\mu} q^2 \right), \quad Q^{(2)}(p_1, p_2, q) = h \rho q^2,$$

$$d_1^{(1)}(p_1, p_2, z, q) = 0, \quad d_2^{(1)}(p_1, p_2, z, q) = z(p_1 + p_2) \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}, \quad (8)$$

$$d_1^{(2)}(p_1, p_2, z, q) = 1, \quad d_2^{(2)}(p_1, p_2, z, q) = h(p_1 + p_2);$$

- для уточненной теории изгиба упругих плит (точность порядка  $h^3$ ):

$$Q^{(1)}(p_1, p_2, q) = \mu h \left\{ \frac{4(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} (p_1^2 + p_2^2) - \frac{\rho}{\mu} q^2 \right\} -$$

$$- \mu \frac{h^3}{3!} \left\{ \frac{8(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} (p_1^2 + p_2^2)^2 - \frac{4(2\lambda^2 + 8\lambda\mu + 7\mu^2)}{(\lambda + 2\mu)^2} (p_1^2 + p_2^2) \frac{\rho}{\mu} q^2 + \frac{\lambda + 5\mu}{\lambda + 2\mu} \left( \frac{\rho}{\mu} q^2 \right)^2 \right\},$$

$$Q^{(2)}(p_1, p_2, q) = h \rho q^2 +$$

$$+ \mu \frac{h^3}{3!} \left\{ \frac{8(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} (p_1^2 + p_2^2)^2 - \frac{4(3\lambda + 4\mu)}{\lambda + 2\mu} (p_1^2 + p_2^2) \frac{\rho}{\mu} q^2 + \frac{3\lambda + 7\mu}{\lambda + 2\mu} \left( \frac{\rho}{\mu} q^2 \right)^2 \right\},$$

$$d_1^{(1)}(p_1, p_2, z, q) = zh \left( p_1^2 + p_2^2 - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} q^2 \right),$$

$$d_2^{(1)}(p_1, p_2, z, q) = z(p_1 + p_2) \left\{ \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} + \frac{1}{2} h^2 \left[ p_1^2 + p_2^2 - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} q^2 \right] \right\} - \quad (9)$$

$$- \frac{1}{3!} z^3 (p_1 + p_2) \left\{ \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} (p_1^2 + p_2^2) - \frac{\lambda^2 + 4\lambda\mu + 2\mu^2}{(\lambda + 2\mu)^2} \frac{\rho}{\mu} q^2 \right\},$$

$$d_1^{(2)}(p_1, p_2, z, q) = 1 - \frac{1}{2} h^2 \left[ \frac{3\lambda + 4\mu}{\lambda + 2\mu} (p_1^2 + p_2^2) - \frac{\rho}{\mu} q^2 \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} z^2 \left[ \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} (p_1^2 + p_2^2) + \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} q^2 \right],$$

$$d_2^{(2)}(p_1, p_2, z, q) = h(p_1 + p_2) \left\{ 1 - \frac{1}{3!} h^2 \left[ \frac{3\lambda + 4\mu}{\lambda + 2\mu} (p_1^2 + p_2^2) - \frac{2\lambda + 3\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\rho}{\mu} q^2 \right] \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} z^2 h(p_1 + p_2) \left\{ \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left( p_1^2 + p_2^2 - \frac{\rho}{\mu} q^2 \right) \right\}.$$

Нетрудно заметить, что для построения определенных таким образом функций  $G_k^{(l)}(\cdot)$ , а следовательно, и  $U_k^{(l)}(\cdot)$  можно воспользоваться классической теорией интегральных вычетов одномерной функции комплексной переменной, дополненной в [7] логическими обобщениями на многомерный случай и условиями о ее непрерывности, симметричности и затухании на бесконечности.

### Сравнение полученных результатов с результатами, известными ранее

Для оценки достоверности предложенного выше интегрального представления (4), (5) составляющих  $w_k^{(l)}(x, y, z, t)$  функции  $w(x, y, z, t)$  поперечных динамических смещений рассматриваемого слоя сравним выражения (6), (7) этих составляющих с результатами, полученными Г.И. Петрашением и Л.А. Молотковым в [8, 9] путем контурного интегрирования уравнений осесимметрической теории упругости. Для этого декартовую систему координат  $x, y, z$ , к которой отнесены точки рассматриваемого слоя, заменим цилиндрической системой  $r, \theta, z$ .

В этом случае соотношение (2), внешнединамические нагрузки  $q_k^{(l)}(\cdot)$  ( $l, k = \overline{1, 2}$ ) и дифференциальные операторы (3) заменятся на

$$\begin{aligned} Q^{(l)}(\Delta, \partial_t^2) w_k^{(l)}(r, z, t) &= \frac{1}{\mu} d_k^{(l)}(\Delta, z, \partial_t^2) \partial_r^{1-k} q_k^{(l)}(r, t), & (10) \\ q_1^{(1)}(r, t) &= \frac{1}{2}(q_1^+(r, t) + q_1^-(r, t)), \quad q_2^{(1)}(r, t) = \frac{1}{2}(q_2^+(r, t) - q_2^-(r, t)), \\ q_1^{(2)}(r, t) &= \frac{1}{2}(q_1^+(r, t) - q_1^-(r, t)), \quad q_2^{(2)}(r, t) = \frac{1}{2}(q_2^+(r, t) + q_2^-(r, t)), \\ Q^{(1)}(\Delta, \partial_t^2) &= (\Delta + D_2^2)^2 \cos(hD_1) \frac{\sin(hD_2)}{D_2} - 4\Delta D_1^2 \frac{\sin(hD_1)}{D_1} \cos(hD_2), \\ Q^{(2)}(\Delta, \partial_t^2) &= (\Delta + D_2^2)^2 \frac{\sin(hD_1)}{D_1} \cos(hD_2) - 4\Delta D_2^2 \cos(hD_1) \frac{\sin(hD_2)}{D_2}, \\ d_1^{(1)}(\Delta, z, \partial_t^2) &= D_1^2 \left[ (\Delta + D_2^2) \frac{\sin(zD_1)}{D_1} \frac{\sin(hD_2)}{D_2} - 2\Delta \frac{\sin(hD_1)}{D_1} \frac{\sin(zD_2)}{D_2} \right], & (11) \\ d_2^{(1)}(\Delta, z, \partial_t^2) &= \Delta \left[ (\Delta + D_2^2) \cos(hD_1) \frac{\sin(zD_2)}{D_2} - 2D_1^2 \frac{\sin(zD_1)}{D_1} \cos(hD_2) \right], \\ d_1^{(2)}(\Delta, z, \partial_t^2) &= -(\Delta + D_2^2) \cos(zD_1) \cos(hD_2) + 2\Delta \cos(hD_1) \cos(zD_2), \\ d_2^{(2)}(\Delta, z, \partial_t^2) &= \Delta \left[ (\Delta + D_2^2) \frac{\sin(hD_1)}{D_1} \cos(zD_2) - 2D_2^2 \cos(zD_1) \frac{\sin(hD_2)}{D_2} \right] \end{aligned}$$

при

$$\Delta = d\partial_r, \quad d = \partial_r + \frac{1}{r}, \quad D_m^2 = \Delta - \frac{1}{c_m^2} \partial_t^2 \quad (m = \overline{1, 2})$$

(здесь, как и выше,  $c_1, c_2$  — скорости распространения волн расширения и сдвига в бесконечном упругом пространстве). Для решения задачи построения интегральных зависимостей типа (4) произведение функций Дирака  $\delta(x - x')$ ,  $\delta(y - y')$  заменим функцией

$$\delta(r - r') = r' \int_0^{+\infty} \sigma J_{k-1}(\sigma r) J_{k-1}(\sigma r') d\sigma,$$

в которой  $J_{k-1}(\sigma r)$  — функция Бесселя  $(k-1)$ -го порядка. Решением поставленной задачи при этом будет интегральное представление

$$w_k^{(l)}(r, z, t) = \int_0^{+\infty} r' \int_{-\infty}^{+\infty} q_k^{(l)}(r', t') G_k^{(l)}(r, r', z, t-t') dt' dr', \quad (12)$$

функция  $G_k^{(l)}(r, r', z, t-t')$  которого определяется уравнением

$$Q^{(l)}(\Delta, \partial_t^2) G_k^{(l)}(r, r', z, t-t') = \frac{1}{\mu} d_k^{(l)}(\Delta, z, \partial_t^2) \partial_r^{1-k} \delta(r-r') \delta(t-t').$$

Как и выше, это гриновская функция, описывающая упругие смещения точек слоя, удаленных на расстояние  $r$  от оси симметрии, которые возникают там в момент времени  $t$  от действия поверхностных динамических сил единичной интенсивности, действующих в момент времени  $t'$  в точках окружности радиуса  $r'$ .

Рассмотрим поле динамических смещений (12), полагая, что

$$G_k^{(l)}(r, r', z, t-t') = \frac{1}{\mu} \frac{d_k^{(l)}(\Delta, z, \partial_t^2)}{Q^{(l)}(\Delta, \partial_t^2)} \partial_r^{1-k} \delta(r-r') \delta(t-t').$$

Учитывая, что определенные выше операторы  $Q^{(l)}(\cdot)$ ,  $d_k^{(l)}(\cdot)$  есть целые алгебраические функции своих аргументов,

$$\frac{1}{\partial_r} J_1(\sigma r) = \frac{1}{(-\sigma)} J_0(\sigma r),$$

а при любом натуральном  $N$  имеют место соотношения

$$(\Delta)^N J_0(\sigma r) = (-\sigma^2)^N J_0(\sigma r),$$

$$(\partial_t^2)^N e^{i\theta(t-t')} = (-\theta^2)^N e^{i\theta(t-t')},$$

функцию  $G_k^{(l)}(r, r', z, t-t')$  представим следующим образом:

$$G_k^{(l)}(r, r', z, t-t') = \frac{(-1)^{k-1}}{2\pi\mu} \int_0^{+\infty} \sigma^{2-k} J_0(\sigma r) J_{k-1}(\sigma r') \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d_k^{(l)}(-\sigma^2, z, -\theta^2)}{Q^{(l)}(-\sigma^2, -\theta^2)} e^{i\theta(t-t')} d\theta d\sigma. \quad (13)$$

Заменив внутренний интеграл в (13) на  $p = i\theta$ , можно получить интеграл Римана–Меллина:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d_k^{(l)}(-\sigma^2, z, p^2)}{Q^{(l)}(-\sigma^2, p^2)} e^{p(t-t')} dp,$$

в общем случае отличающийся от нуля только при  $t-t' > 0$ . После этого

$$G_k^{(l)}(r, r', z, t-t') = \frac{(-1)^{k-1}}{2\pi\mu i} \int_0^{+\infty} \sigma^{2-k} J_0(\sigma r) J_{k-1}(\sigma r') \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d_k^{(l)}(-\sigma^2, z, p^2)}{Q^{(l)}(-\sigma^2, p^2)} e^{p(t-t')} dp d\sigma. \quad (14)$$

Решение задачи построения прогибов рассматриваемого слоя, нагруженного произвольными осесимметрическими усилиями  $q_k^\pm(r, t)$ , нормально (при  $k=1$ ) и касательно (при  $k=2$ ) с момента времени  $t=0$ , действующими на его граничных поверхностях  $z = \pm h$ , будет выражаться соотношением (12), функция  $G_k^{(l)}(r, r', z, t-t')$  в котором определяется равенством (14).

Для сравнения полученного решения с решением задачи, построенным в [8] путем контурного интегрирования уравнений Лямэ осесимметрической теории упругости, будем исходить из выражения (14) для функций  $G_k^{(l)}(\cdot)$  ( $l, k = \overline{1, 2}$ ), дополненного соотношениями (11). Далее аналогично [8] введем в рассмотрение следующие обозначения:

$$\begin{aligned} D_1^{(1)}(\sigma, \eta, z) &= -g \operatorname{sh}(\sigma z \alpha) \operatorname{sh}(\sigma h \beta) + 2 \operatorname{sh}(\sigma h \alpha) \operatorname{sh}(\sigma z \beta); \\ D_2^{(1)}(\sigma, \eta, z) &= g \operatorname{ch}(\sigma h \alpha) \operatorname{sh}(\sigma z \beta) - 2 \alpha \beta \operatorname{sh}(\sigma z \alpha) \operatorname{ch}(\sigma h \beta); \\ D_1^{(2)}(\sigma, \eta, z) &= g \operatorname{ch}(\sigma z \alpha) \operatorname{ch}(\sigma h \beta) - 2 \operatorname{ch}(\sigma h \alpha) \operatorname{ch}(\sigma z \beta); \\ D_2^{(2)}(\sigma, \eta, z) &= -g \operatorname{sh}(\sigma h \alpha) \operatorname{ch}(\sigma z \beta) + 2 \alpha \beta \operatorname{ch}(\sigma z \alpha) \operatorname{sh}(\sigma h \beta); \\ \Delta^{(1)}(\sigma, \eta) &= g^2 \operatorname{th}(\sigma h \beta) - 4 \alpha \beta \operatorname{th}(\sigma z \alpha); \\ \Delta^{(2)}(\sigma, \eta) &= g^2 \operatorname{th}(\sigma h \alpha) - 4 \alpha \beta \operatorname{th}(\sigma h \beta), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{c_2}, \quad \gamma = \frac{c_2}{c_1}, \\ \alpha &= \sqrt{1 + \gamma^2 \eta^2}, \quad \beta = \sqrt{1 + \eta^2}, \quad g = 2 + \eta^2. \end{aligned}$$

Последнее позволяет соотношения (12), (14) привести к виду (6), (7). При этом для составляющих  $w_k^{(l)}(r, z, t)$  смещения  $w(r, z, t)$  получим

$$w_k^{(l)}(r, z, t) = \frac{(-1)^{k+l}}{\mu} \int_0^\infty \sigma J_0(\sigma r) U_k^{(l)}(\sigma, z, t) d\sigma, \quad (15)$$

где

$$U_k^{(l)}(\sigma, z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} F_k^{(l)}\left(\sigma, \frac{\sigma \eta}{b}\right) \frac{\alpha^{2-k} b^{(k-l)(2-l)} D_k^{(l)}(\sigma, z, \eta)}{b \Omega^{(l)}(\sigma, \eta)} e^{\frac{\sigma \eta}{b} t} d\eta \quad (l, k = \overline{1, 2})$$

при

$$\Omega^{(l)}(\sigma, \eta) = \operatorname{ch}(\sigma h \alpha) \operatorname{ch}(\sigma h \beta) \Delta^{(l)}(\sigma, \eta) \quad (l = \overline{1, 2})$$

и  $F_k^{(l)}\left(\sigma, \frac{\sigma \eta}{b}\right)$ , которые с функциями  $q_k^{(l)}(r, t)$  связаны такими интегральными соотношениями:

$$\begin{aligned} F_k^{(l)}\left(\sigma, \frac{\sigma \eta}{b}\right) &= \int_0^\infty r' J_{k-1}(\sigma r') \int_{-\infty}^{+\infty} q_k^{(l)}(r', t') e^{-\frac{\sigma \eta}{b} t'} dt' dr', \\ q_k^{(l)}(r, t) &= \int_0^\infty \frac{\sigma^2 J_{k-1}(\sigma r)}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{1}{b} F_k^{(l)}\left(\sigma, \frac{\sigma \eta}{b}\right) e^{\frac{\sigma \eta}{b} t} d\eta d\sigma. \end{aligned} \quad (16)$$

Для случая  $k=1$ , что соответствует действию нормальных составляющих  $q_1^+(r, t)$ ,  $q_1^-(r, t)$  поверхностных динамических сил, это представление совпадает с представлением сил Г.И. Петрашеня [9]. При этом функция  $A_k^{(l)}(\cdot)$ , рассмотренная в работе [9], связана с нашей функцией  $F_k^{(l)}(\cdot)$  соотношением

$$A_k^{(l)}\left(\frac{\sigma \eta}{b}\right) = \frac{1}{b} F_k^{(l)}\left(\sigma, \frac{\sigma \eta}{b}\right).$$

При

$$q_k^+(r, t) = 0, \quad q_k^-(r, t) = -F \quad (17)$$

выражения для динамических смещений  $w_1^{(l)}(r, z, t)$  ( $l = \overline{1, 2}$ ) будут совпадать с выражениями для аналогичных компонент, которые имеются в работе [9].

Представление (16) составляющих внешнединамических сил, лежащих в плоскости слоя, несколько отличается от представления этих сил, данного в работе [9]. Представление (16) требует равенства нулю сдвиговых усилий в центре симметрии  $r = 0$ , что согласуется с физической постановкой задачи. Несколько отличным от [9] получились и выражения для компонент  $w_2^{(l)}(r, z, t)$  ( $l = \overline{1, 2}$ ), которые отвечают действию указанных сил. Выражения для этих компонент, приведенные в работе [9], в наших обозначениях и с учетом (16) запишем так:

$$w_k^{(l)}(r, z, t) = \frac{(-1)^{k+l}}{\mu} \int_0^\infty \partial_r J_0(\sigma r) U_k^{(l)}(\sigma, r, t) d\sigma, \quad (18)$$

где  $U_k^{(l)}(\sigma, z, t)$  определяется формулами, приведенными выше.

Нетрудно видеть, что отличие выражений (18) от (15) проявляется только в зависимости от радиальной координаты  $r$ . Поскольку она дается через функции Бесселя нулевого и первого рода, то легко видеть, что в любом случае радиальные динамические смещения  $w_1^{(l)}(\cdot)$ , полученные нами и представленные формулами (15), равны нулю на оси симметрии  $r = 0$ ; составляющие  $w_2^{(l)}(\cdot)$  — на оси  $r = 0$ , в общем случае отличны от нуля. Смещения (15) точек слоя, вызванные действием составляющих, касательных к поверхностям  $z = \pm h$  слоя, в отличие от смещений (18) полностью удовлетворяют условиям симметрии задачи. Кроме того, они удовлетворяют и другим физическим условиям задачи: затухают со временем и убывают на бесконечности.

Таким образом, решение задачи динамики упругого слоя, представленное нами соотношениями (4), (5) или (что эквивалентно) — (6), (7), хорошо согласуется с физикой задачи, а для случая осевой симметрии позволяет получить решение задачи, которое дано Г.И. Петрашением и Л.А. Молотковым [8, 9] на основе контурного интегрирования трехмерных уравнений теории упругости. Отличие нашего решения задачи от решения, которое находим в [9], оправдано физикой процесса.

#### Алгоритмические особенности построения ядра интегральной математической модели динамики толстого упругого слоя

Рассмотрим особенности программно-алгоритмической реализации соотношений (5) и (14), которыми определяются ядра-функции  $G_k^{(l)}(\cdot)$  ( $k, l = \overline{1, 2}$ ) интегральных моделей (4) и (12), составляющих  $w_k^{(l)}(\cdot)$  ( $k, l = \overline{1, 2}$ ) функции  $w(\cdot)$  поперечных динамических смещений толстого упругого слоя, нагруженного усилиями  $q_k^{(l)}(\cdot)$  на его граничных поверхностях  $z = \pm h$ . При этом (для упрощения выкладок) в представлении дифференциальных операторов  $Q^{(l)}(\cdot)$ ,  $d_k^{(l)}(\cdot)$  математической модели (2) ограничимся удержанием членов порядка  $h^3$ -малости.

Иначе говоря, вместо дифференциальной модели (2) будем рассматривать уравнения

$$\overline{Q}^{(l)}(\partial_x, \partial_y, \partial_t) w_k^{(l)}(x, y, z, t) = \overline{d}_k^{(l)}(\partial_x, \partial_y, z, \partial_t) q_k^{(l)}(x, y, t) \quad (l, k = \overline{1, 2}),$$

в которых

$$\begin{aligned}
& \bar{Q}^{(1)}(\partial_x, \partial_y, \partial_t) = h\{(\lambda(\Delta + \Delta_2)(\Delta_1 - \Delta) + 2\mu\Delta_1(\Delta_2 - \Delta))\} + \\
& + h \left\{ \frac{\lambda^2 + \lambda\mu + 2\mu^2}{\lambda + 2\mu} \Delta - (\lambda + 2\mu)\Delta_1 - \mu \left( \Delta_2 - \frac{\rho}{\mu} \partial_t^2 \right) \right\} \frac{\rho}{\mu} \partial_t^2 + \frac{h^3}{3!} \{ \lambda\Delta\Delta(3\Delta_1 + \Delta_2) - \\
& - (2\mu(\Delta + 3\Delta_2) + 3\lambda(\Delta + \Delta_2))\Delta_1\Delta_1 + (\lambda(2\Delta - \Delta_2) + 2\mu(5\Delta - \Delta_2))\Delta_1\Delta_2 + \lambda\Delta\Delta_2\Delta_2 \} + \\
& + \frac{h^3}{3!} \left\{ \mu(\Delta_2\Delta_2 + 2(3\Delta_1 + 5\Delta_2)\Delta_1) + \lambda(3\Delta_1 + 2\Delta_2)\Delta_1 + \frac{\mu(\lambda + 5\mu)}{\lambda + 2\mu} \left( \frac{\rho}{\mu} \partial_t^2 \right)^2 \right\} \frac{\rho}{\mu} \partial_t^2 - \\
& - \frac{h^3}{3!} \left\{ \left( \frac{\lambda(\lambda + 5\mu)}{\lambda + 2\mu} \Delta + \frac{2(\lambda^2 + 8\mu^2 + 4\lambda\mu)}{\lambda + 2\mu} \Delta_1 + \frac{2(\lambda^2 + 3\lambda\mu + 5\mu^2)}{\lambda + 2\mu} \Delta_2 \right) \Delta - \right. \\
& \left. - \left[ \frac{\lambda^2(\lambda + 6\mu) + 3\mu^2(5\lambda + 6\mu)}{(\lambda + 2\mu)^2} \Delta - (\lambda + 8\mu)\Delta_1 - \frac{\mu(2\lambda + 7\mu)}{\lambda + 2\mu} \Delta_2 \right] \frac{\rho}{\mu} \partial_t^2 \right\} \frac{\rho}{\mu} \partial_t^2, \\
& \bar{Q}^{(2)}(\partial_x, \partial_y, \partial_t) = -h\{((\lambda + 2\mu)\Delta_1 - \lambda\Delta)(\Delta + \Delta_2) - 4\mu\Delta\Delta\} - \\
& - h \left\{ (\lambda + 3\mu)\Delta - (\lambda + 2\mu)\Delta_1 - \mu \left( \Delta_2 - \frac{\rho}{\mu} \partial_t^2 \right) \right\} \frac{\rho}{\mu} \partial_t^2 - \frac{h^3}{3!} \{ \lambda(\Delta_1 + 3\Delta_2)\Delta\Delta - (\lambda + 2\mu) \times \\
& \times (\Delta + \Delta_2)\Delta_1\Delta_1 + (3\lambda(\Delta - \Delta_1) + 2\mu(2\Delta - 3\Delta_1))\Delta_2\Delta_2 - (2\lambda - 6\mu)\Delta\Delta_1\Delta_2 \} - \\
& - \frac{h^3}{3!} \{ (\lambda(2\Delta + \Delta_1 + 6\Delta_2) - 2\mu(2\Delta - \Delta_1 - 7\Delta_2))\Delta_1 + 3\mu\Delta_2\Delta_2 \} \frac{\rho}{\mu} \partial_t^2 + \\
& + \frac{h^3}{3!} \left\{ \left( \frac{3\lambda^2 + 7\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \Delta + \frac{6\lambda^2 + 18\lambda\mu + 22\mu^2}{\lambda + 2\mu} \Delta_2 \right) \Delta - \frac{\mu(3\lambda + 7\mu)}{\lambda + 2\mu} \left( \frac{\rho}{\mu} \partial_t^2 \right)^2 - \right. \\
& \left. - \left[ \frac{3\lambda^2 + 8\lambda\mu + 13\mu^2}{\lambda + 2\mu} \Delta - (3\lambda + 8\mu)\Delta_1 - \frac{6\lambda\mu + 13\mu^2}{\lambda + 2\mu} \Delta_2 \right] \frac{\rho}{\mu} \partial_t^2 \right\} \frac{\rho}{\mu} \partial_t^2, \\
& \bar{d}_1^{(1)}(\partial_x, \partial_y, z, \partial_t) = -zh \left( \Delta - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \partial_t^2 \right) \left\{ \Delta - \Delta_2 + \frac{\rho}{\mu} \partial_t^2 \right\}, \\
& \bar{d}_2^{(1)}(\partial_x, \partial_y, z, \partial_t) = \\
& = -zd \left\{ \frac{\lambda}{\mu} (\Delta - \Delta_1) + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\rho}{\mu} \partial_t^2 \right\} - \frac{zh^2}{2} d \left\{ \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \Delta_1\Delta_1 - \frac{\lambda}{\mu} \Delta\Delta_1 - \frac{1}{2} \Delta_1\Delta_2 \right\} - \\
& - \frac{zh^2}{2} d \left\{ \frac{1}{2} (\Delta + \Delta_2) - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \partial_t^2 \right\} \frac{\rho}{\mu} \partial_t^2 + \frac{z^3}{3!} d \left\{ 2\Delta_1(\Delta_1 - \Delta_2) + \frac{\lambda}{\mu} \Delta_2(\Delta - \Delta_1) \right\} + \\
& + \frac{z^3}{3!} d \left\{ \frac{\lambda}{\mu} \left( \frac{\lambda + 4\mu}{\lambda + 2\mu} \Delta_1 - \Delta \right) + \Delta_2 - \frac{\lambda^2 + 4\lambda\mu + 2\mu^2}{(\lambda + 2\mu)^2} \frac{\rho}{\mu} \partial_t^2 \right\} \frac{\rho}{\mu} \partial_t^2, \\
& \bar{d}_1^{(2)}(\partial_x, \partial_y, z, \partial_t) = \Delta_2 - \Delta - \frac{\rho}{\mu} \partial_t^2 - \frac{h^2}{2} \{ \Delta\Delta_2 + \Delta_2\Delta_2 - 2\Delta\Delta_1 \} - \\
& - \frac{h^2}{2} \left\{ \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \Delta + 2\Delta_2 - \frac{\rho}{\mu} \partial_t^2 \right\} \frac{\rho}{\mu} \partial_t^2 - \frac{z^2}{2} \{ \Delta\Delta_1 - 2\Delta\Delta_2 + \Delta_1\Delta_2 \} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{z^2}{2} \left\{ \frac{2\lambda+3\mu}{\lambda+2\mu} \Delta - \frac{1}{2} \Delta_1 - \frac{\mu}{\lambda+2\mu} \Delta_2 + \frac{\rho}{\lambda+2\mu} \partial_t^2 \right\} \frac{\rho}{\mu} \partial_t^2, \\
& \bar{d}_2^{(2)}(\partial_x, \partial_y, z, \partial_t) = hd \left\{ \left[ \frac{\lambda}{\mu} (\Delta - \Delta_1) - 2(\Delta_1 - \Delta_2) \right] - \frac{\rho}{\mu} \partial_t^2 \right\} - \\
& -\frac{hz^2}{2} d \left\{ \frac{\lambda}{\mu} (\Delta \Delta_2 - \Delta_1 \Delta_2) - \left[ \frac{\lambda}{\mu} (\Delta - \Delta_1) - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \left( \Delta_2 - \frac{\rho}{\mu} \partial_t^2 \right) \right] \frac{\rho}{\mu} \partial_t^2 \right\} + \\
& + \frac{h^3}{3!} d \left\{ 2(\Delta_1 \Delta_1 - \Delta_2 \Delta_2) - \frac{\lambda}{\mu} (\Delta \Delta_1 - \Delta_1 \Delta_1) \right\} + \\
& + \frac{h^3}{3!} d \left[ \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \Delta - 2\Delta_1 + 4\Delta_2 - \frac{2\lambda+3\mu}{\lambda+2\mu} \frac{\rho}{\mu} \partial_t^2 \right] \frac{\rho}{\mu} \partial_t^2.
\end{aligned}$$

В этом случае представление (5) ядра функции  $G_k^{(l)}(\cdot)$  заменим на

$$G_k^{(l)}(x-x', y-y', z, t-t') = \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\Phi_k^{(l)}(p_1, p_2, z, q)}{\bar{Q}_k^{(l)}(p_1, p_2, q)} dp_1 dp_2 dq, \quad (19)$$

где

$$\Phi_k^{(l)}(p_1, p_2, z, q) = \bar{d}_k^{(l)}(p_1, p_2, z, q) e^{p_1(x-x') + p_2(y-y') + q(t-t')}.$$

Для вычисления интеграла в (19), т.е. для построения функции  $G_k^{(l)}(\cdot)$  ( $k, l = \overline{1, 2}$ ) воспользуемся методикой, предложенной в [7]. Пусть  $\text{Res}[f(p), p_i]$  — интегральный вычет функции  $f(p)$  в точке  $p_i$ . Будем считать, что функция  $\bar{Q}_k^{(l)}(p_1, p_2, q)$  обращается в нуль на поверхностях

$$q_k^{(l)} = q_{ki}^{(l)}(p_1, p_2) \quad (i = \overline{1, I}),$$

а функции  $\Psi_{1ki}^{(l)}(p_1, p_2, z)$  такие, что

$$\text{Res} \left[ \frac{\Phi_k^{(l)}(p_1, p_2, z, q)}{\bar{Q}_k^{(l)}(p_1, p_2, q)}, q_k^{(l)} = q_{ki}^{(l)}(p_1, p_2) \right] = \frac{\Phi_{1ki}^{(l)}(p_1, p_2, z)}{\Psi_{1ki}^{(l)}(p_1, p_2, z)}$$

на линиях  $p_{1k}^{(l)} = p_{1kii_1}^{(l)}(p_2, z)$ , ( $i = \overline{1, I}, i_1 = \overline{1, I_i}$ ). Пусть  $p_{2ki_2}^{(l)(ii_1)}(z)$  —  $i_2$ -й ( $i_2 = \overline{1, I_{ii_1}}$ ) корень уравнения  $\Psi_{2kii_1}^{(l)}(p_2, z) = \Psi_{1ki}^{(l)}(p_{1kii_1}^{(l)}(p_2, z), p_2(z)) = 0$ , где

$$\frac{\Phi_{2kii_1}^{(l)}(p_2, z)}{\Psi_{2kii_1}^{(l)}(p_2, z)} = \text{Res} \left[ \frac{\Phi_{1ki}^{(l)}(p_1, p_2, z)}{\Psi_{1ki}^{(l)}(p_1, p_2, z)}, p_{1k}^{(l)} = p_{1kii_1}^{(l)}(p_2, z) \right].$$

Определим

$$R_{kii_1i_2}^{(l)}(x-x', y-y', z, t-t') = \text{Res} \left[ \frac{\Phi_{2kii_1}^{(l)}(p_2, z)}{\Psi_{2kii_1}^{(l)}(p_2, z)}, p_{2ki_2}^{(l)(ii_1)} \right],$$

а следовательно, и

$$G_k^{(l)}(x-x', y-y', z, t-t') = \sum_{i=1}^I \sum_{i_1=1}^{I_k} \sum_{i_2=1}^{I_{kii_1}} R_{kii_1i_2}^{(l)}(x-x', y-y', z, t-t').$$

Учитывая специфику функций  $Q^{(l)}(\cdot)$  и  $d_k^{(l)}(\cdot)$  ( $k, l = \overline{1, 2}$ ) (они зависят только от четных степеней аргумента  $\partial_t$ ), соотношение (19) можно представить

$$G_k^{(l)}(x-x', y-y', z, t-t') = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{p_1(x-x') + p_2(y-y')} \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon \rightarrow +0}^{+\infty} \frac{\bar{d}_k^{(l)}(p_1, p_2, z, q) \cos(q(t-t'))}{\bar{Q}_k^{(l)}(p_1, p_2, q)} dq dp_1 dp_2, \quad (20)$$

что упрощает алгоритм численной реализации интеграла по  $q$ .

Заметим, что алгоритм решения задачи построения функций  $G_k^{(l)}(\cdot)$  ( $l, k = \overline{1, 2}$ ) упростится при осесимметрической динамике упругого слоя. Ограничиваясь, как и выше,  $h^3$ -точностью, представим дифференциальную модель (10) следующими уравнениями:

$$\tilde{Q}^{(l)}(\partial_r, \partial_t) w_k^{(l)}(r, z, t) = \tilde{d}_k^{(l)}(\partial_r, z, \partial_t) q_k^{(l)}(r, t) \quad (l, k = \overline{1, 2}), \quad (21)$$

или, что эквивалентно,

$$w_k^{(l)}(r, z, t) = \int_0^{+\infty} r' \int_{-\infty}^{+\infty} q_k^{(l)}(r', t') \tilde{G}_k^{(l)}(r, r', z, t-t') dt' dr'$$

при

$$\tilde{G}_k^{(l)}(r, r', z, t-t') = \frac{(-1)^{k-1}}{2\pi\mu i} \int_0^{+\infty} \sigma^{2-k} J_0(\sigma r) J_{k-1}(\sigma r') \int_{-i\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{d}_k^{(l)}(-\sigma^2, z, p^2)}{\tilde{Q}^{(l)}(-\sigma^2, p^2)} e^{p(t-t')} dp d\sigma, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{Q}^{(1)}(-\sigma^2, p^2) &= h \left\{ \frac{4(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \sigma^2 + \frac{\rho}{\mu} p^2 \right\} + \\ &+ \frac{h^3}{3!} \left\{ \frac{8(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \sigma^4 + \frac{4(2\lambda^2 + 8\lambda\mu + 7\mu^2)}{(\lambda + 2\mu)^2} \sigma^2 \frac{\rho}{\mu} p^2 + \frac{\lambda + 5\mu}{\lambda + 2\mu} \left( \frac{\rho}{\mu} p^2 \right)^2 \right\}, \\ \tilde{Q}^{(2)}(-\sigma^2, p^2) &= h \frac{\rho}{\mu} p^2 + \frac{h^3}{3!} \left\{ \frac{8(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \sigma^4 + \frac{4(3\lambda + 4\mu)}{\lambda + 2\mu} \sigma^2 \frac{\rho}{\mu} p^2 + \frac{3\lambda + 7\mu}{\lambda + 2\mu} \left( \frac{\rho}{\mu} p^2 \right)^2 \right\}, \\ \tilde{d}_1^{(1)}(p_1, p_2, z, q) &= zh \left( \sigma^2 + \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} p^2 \right), \\ \tilde{d}_2^{(1)}(-\sigma^2, z, p^2) &= z\sigma^2 \left\{ \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} - \frac{1}{2} h^2 \left[ \sigma^2 + \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} p^2 \right] \right\} + \\ &+ \frac{1}{3!} z^3 \sigma^2 \left\{ \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \sigma^2 + \frac{\lambda^2 + 4\lambda\mu + 2\mu^2}{(\lambda + 2\mu)^2} \frac{\rho}{\mu} p^2 \right\}, \\ \tilde{d}_1^{(2)}(-\sigma^2, z, p^2) &= 1 + \frac{1}{2} h^2 \left[ \frac{3\lambda + 4\mu}{\lambda + 2\mu} \sigma^2 + \frac{\rho}{\mu} p^2 \right] - \frac{1}{2} z^2 \left[ \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sigma^2 - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} p^2 \right], \\ \tilde{d}_2^{(2)}(-\sigma^2, z, p^2) &= h\sigma^2 \left\{ 1 - \frac{1}{3!} h^2 \left[ \frac{3\lambda + 4\mu}{\lambda + 2\mu} \sigma^2 + \frac{2\lambda + 3\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\rho}{\mu} p^2 \right] \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} z^2 h\sigma^2 \left\{ \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left( \sigma^2 + \frac{\rho}{\mu} p^2 \right) \right\}. \end{aligned}$$

При этом вычисление внутреннего интеграла по  $p$  упрощается и

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\tilde{d}_k^{(l)}(-\sigma^2, z, p^2)}{\tilde{Q}_k^{(l)}(-\sigma^2, p^2)} e^{p(t-t')} dp = \sum_{i=1}^I \operatorname{Res} \left[ \frac{\tilde{\Phi}_k^{(l)}(-\sigma^2, z, p^2)}{\tilde{Q}_k^{(l)}(-\sigma^2, p^2)}, p_{ki}^{(l)} \right],$$

где  $p_{ki}^{(l)}$  ( $i = \overline{1, I}$ ) — корни подынтегральной функции  $\tilde{Q}_k^{(l)}(-\sigma^2, p^2)$ , а  $\tilde{\Phi}_k^{(l)}(-\sigma^2, z, p^2) = \tilde{d}_k^{(l)}(-\sigma^2, z, p^2) e^{p(t-t')}$ .

Если учесть, что дифференциальные операторы  $\tilde{Q}^{(l)}(\partial_r, \partial_t)$ ,  $\tilde{d}_k^{(l)}(\partial_r, z, \partial_t)$  в (21) четные по аргументу  $\partial_t$ , то представление (22) ядра  $\tilde{G}_k^{(l)}(\cdot)$  ( $l, k = \overline{1, 2}$ ) заменится на

$$\begin{aligned} \tilde{G}_k^{(l)}(r, r', z, t-t') = \\ = \frac{(-1)^{k-1}}{\pi\mu} \int_0^{+\infty} \sigma^{2-k} J_0(\sigma r) J_{k-1}(\sigma r') \int_{\varepsilon \rightarrow +0}^{+\infty} \frac{\tilde{d}_k^{(l)}(-\sigma^2, z, p^2)}{\tilde{Q}_k^{(l)}(-\sigma^2, p^2)} \cos(p(t-t')) dp d\sigma. \end{aligned} \quad (23)$$

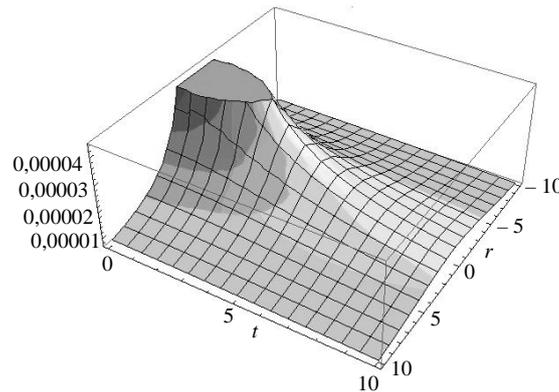
Это означает, что функцию  $\tilde{G}_k^{(l)}(\cdot)$  ( $l, k = \overline{1, 2}$ ), записанную согласно (23), можно построить путем численного интегрирования.

**Пример.** Рассмотрим частный случай математической модели (21), который описывает поперечные динамические прогибы толстого упругого слоя, нагруженного нормальными к поверхностям  $z = \pm 1$  динамическими нагрузками  $q_1^\pm(r, t)$ . Для конкретизации вычислений положим  $\lambda = 11782$ ,  $\mu = 8100$ ,  $\rho = 7800$  и  $z = 1$ ; заметим, что при этом  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа (модуль Юнга). В результате получим

$$\begin{aligned} \tilde{G}_1^{(2)}(r, r', 1, t-t') = \\ = \frac{1}{8100\pi} \int_0^{+\infty} \sigma J_0(\sigma r) J_0(\sigma r') \int_{\varepsilon \rightarrow +0}^{+\infty} \frac{(1+1,25p^2 + \sigma^2) \cos(p(t-t')) dp d\sigma}{p^2 + 0,5p^4 + 1,55p^2\sigma^2 + 0,95\sigma^4}. \end{aligned} \quad (24)$$

Реализация соотношения (24) средствами Wolfram Mathematica 8.0 дает следующий результат (рисунок):

$$\tilde{G}_1^{(2)}(r, 0, 1, t) = \frac{0,92 \cdot 10^{-4}}{\sqrt{r^2 + 0,45t^2}}. \quad (25)$$



Представление (25) — гриновская функция, описывающая упругие смещения точек слоя, удаленных на расстояние  $r$  от оси симметрии, которые в момент времени  $t$  возникают от действия поверхностных динамических усилий единичной интенсивности, которые имеют место при  $t' = 0$  в точке  $r' = 0$ .

*В.А. Стоян, К.В. Двірничук*

## ПРО ІНТЕГРАЛЬНУ МОДЕЛЬ ПОПЕРЕЧНИХ ДИНАМІЧНИХ ЗМІЩЕНЬ ТОВСТОГО ПРУЖНОГО ШАРУ

Розв'язано задачу побудови інтегральної залежності функції просторово розподілених поперечних динамічних зміщень точок товстого пружного шару від зовнішньодинамічних навантажень на його граничні поверхні. Отримані результати порівнюються з розв'язком задачі осесиметричної динаміки розглянутого шару, побудованого контурним інтегруванням тривимірних рівнянь Ляме.

*V.A. Stoyan, K.V. Dvirnychuk*

## ON INTEGRAL MODEL OF TRANSVERSE DYNAMIC DISPLACEMENT OBTAINED THICK ELASTIC LAYER

The problem of constructing an integral dependence of the function of spatially distributed dynamic transverse displacements of points on a thick elastic layer of external dynamic loads on its boundary surfaces. We compare the obtained results with the solution of the axisymmetric dynamics of the considered layer, which was built by the contour integration of three-dimensional Lamé equations.

1. *Скопецький В.В., Стоян В.А., Кривонос Ю.Г.* Математичне моделювання прямих та обернених задач динаміки систем з розподіленими параметрами. — Київ : Наук. думка, 2002. — 361 с.
2. *Скопецький В.В., Стоян В.А., Зваридчук В.Б.* Математичне моделювання динаміки розподілених просторово-часових процесів. — Київ : Вид-во «Сталь», 2008. — 316 с.
3. *Стоян В.А.* Математичне моделювання лінійних, квазілінійних і нелінійних динамічних систем. — К. : ВПЦ «Київський університет», 2011. — 310 с.
4. *Тимошенко С.П.* Курс теорії пружності. — Київ : Наук. думка, 1972. — 508 с.
5. *Григолюк Э.И., Селезов И.Т.* Механика твердых деформируемых тел. Том 5: Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. — М. : ВИНТИ, 1973. — 271 с.
6. *Стоян В.А., Двірничук К.В.* К построению дифференциальной модели поперечных динамических смещений толстого упругого слоя // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2012. — № 4. — С. 74–83.
7. *Стоян В.А., Двірничук К.В.* До побудови інтегрального еквівалента лінійних диференціальних моделей // Доп. НАН України. — 2012. — № 9. — С. 36–43.
8. *Петрашень Г.И.* К теории колебаний тонких пластин // Уч. записки ЛГУ. — Сер. физ.-мат. наук. — 1951. — № 149, вып. 24. — С. 121–167.
9. *Петрашень Г.И., Молотков Л.А.* О некоторых проблемах динамической теории в случае сред, содержащих тонкие слои // Вест. ЛГУ. — Сер. физ. и хим. — 1958. — № 22, вып. 4. — С. 137–156.

*Получено 24.05.2012*

Стаття представлена к публикации членом редколлегии доктором техн. наук Ф.Г. Гаращенко.