

УДК 517.954:532.546

*В.М. Булавацкий*

**ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ  
ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ  
ГЕОИНФОРМАЦИОННОЙ МОДЕЛИ  
ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЛОКАЛЬНО-  
НЕРАВНОВЕСНЫХ ПРОЦЕССОВ ГЕОМИГРАЦИИ**

**Введение**

Настоящая работа посвящена обобщению дробно-дифференциальной геоинформационной модели [1] для исследования локально-неравновесных во времени миграционно-консолидационных процессов в геопористых средах со сложной пространственно-временной структурой. Необходимость учета свойств существенной временной нелокальности процессов переноса способствовала пересмотру ряда общепринятых математических моделей и созданию новых [2–6] для повышения степени адекватности известных количественных моделей описания процессов переноса в геосредах со сложной пространственно-временной структурой для которых характерны эффекты памяти, пространственной нелокальности и самоорганизации. Следует отметить, что заметный прогресс в области математического моделирования процессов переноса в неравновесных условиях функционирования связан с использованием формализма интегро-дифференцирования дробного порядка [7–9]. Поскольку во многих случаях систем со сложной пространственно-временной структурой используемые математические модели переноса базируются на дифференциальных уравнениях дробного порядка, то они описывают процессы, являющиеся нелокальными во времени и (или) пространстве.

Как правило, математическое моделирование геомиграционных процессов выполняется в предположении насыщенности массивов геопористой среды чистой водой [10, 11]. Однако в настоящее время особую актуальность приобретают исследования в области математического моделирования динамики указанных процессов в пористых средах, насыщенных солевыми растворами [6, 12, 13]. Это в значительной мере обусловлено рядом проблем экологии, в частности задачами охраны грунтов и грунтовых вод от загрязнений токсичным содержимым поверхностных накопителей промышленных и бытовых стоков.

Проявляющиеся в сложных горно-геологических условиях эффекты неравновесности обусловлены рядом причин объективного характера, в частности, сложностью структуры среды, ее микронеоднородностью, кавернозностью и др. [14]. Попытки учесть указанные эффекты при описании динамики процессов переноса в геопористой среде стимулируют разработку методов математического моделирования геомиграционных процессов в локально-неравновесных условиях.

В связи с этим в работе [1] построена математическая модель для исследования динамики миграционных (фильтрационно-консолидационных) процессов в насыщенной солевыми растворами геопористой среде в условиях сильной вре-

© В.М. БУЛАВАЦКИЙ, 2013

*Международный научно-технический журнал  
«Проблемы управления и информатики», 2013, № 1*

менной нелокальности (учет влияния свойств памяти среды). Ниже указанная модель обобщается с учетом формулировки, базирующейся на системе дробно-дифференциальных уравнений с обобщенными производными Капуто, что позволяет, в частности, описывать (в определенном смысле управляя процессом моделирования) в рамках одной математической модели как известные стандартные, так и нестандартные режимы динамики локально-неравновесного во времени фильтрационно-консолидационного процесса в насыщенных солевыми растворами деформируемых геопористых средах (в частности, фрактальной структуры).

### 1. Диффузионное уравнение с обобщенной производной Капуто дробного порядка: разностный метод решения первой краевой задачи

Данный раздел носит вспомогательный характер, в нем приведено краткое изложение методики численного решения первой краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка с обобщенной производной Капуто.

Рассмотрим в области  $(0, l) \times (0, +\infty)$  следующую краевую задачу для обобщенного диффузионного уравнения:

$$D_{t,g}^{(\beta)} u = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varphi(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0, \quad (3)$$

где  $D_{t,g}^{(\beta)} y$  — обобщенная производная Капуто порядка  $\beta$  ( $0 < \beta < 1$ ), определяемая аналогично [7] соотношением

$$D_{t,g}^{(\beta)} y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{y'(\tau) g'(\tau)}{(g(t) - g(\tau))^\beta} d\tau. \quad (4)$$

Здесь  $g(t)$  — положительная, непрерывно дифференцируемая на  $[0, T]$  функция, удовлетворяющая  $\forall t \in [0, T]$  условию  $g'(t) > 0$ ,  $\Gamma(z)$  — гамма-функция Эйлера [15].

Заметим, что в частном случае  $g(t) \equiv t$  обобщенная производная (4) превращается в обычную регуляризованную производную по Капуто дробного порядка  $\beta$  [7–9]. Не нарушая общности, положим в дальнейшем  $a, u_0 = \text{const}$  и введем в рассмотрение безразмерные переменные и параметры соотношениями

$$x' = \frac{x}{l}, \quad t' = \left(\frac{a}{l^2}\right)^{1/\beta} t, \quad u' = \frac{u}{u_0}, \quad \varphi' = \frac{l^2}{au_0} \varphi. \quad (5)$$

Тогда, переходя в (1)–(3) к безразмерным переменным согласно соотношениям (5) и опуская в дальнейшем знак штрих над безразмерными величинами, получаем задачу

$$D_{t,g}^{(\beta)} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varphi(x, t), \quad (6)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad (7)$$

$$u(x, 0) = 1. \quad (8)$$

Введем в рассмотрение сеточную область  $\Omega_{h\tau} = \{(x_i, t_j) : x_i = ih (i = \overline{0, m}), t_j = j\tau (j = \overline{0, n})\}$ , где  $h, \tau$  — шаги сетки по геометрической переменной и времени соответственно и обозначим  $y_i^j = y(x_i, t_j)$ . Аппроксимируя на сетке  $\Omega_{h\tau}$  производную дробного порядка в левой части (6), имеем

$$D_{t,g}^{(\beta)} u(x_i, t_{j+1}) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \sum_{s=0}^j \int_{t_s}^{t_{s+1}} \frac{u_\xi(x_i, \xi) g'(\xi)}{(g(t_{j+1}) - g(\xi))^\beta} d\xi \approx$$

$$\approx \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \sum_{s=0}^j \frac{u(x_i, t_{s+1}) - u(x_i, t_s)}{\tau} \int_{t_s}^{t_{s+1}} \frac{g'(\xi) d\xi}{(g(t_{j+1}) - g(\xi))^\beta} = \sum_{s=0}^j \omega_s^{(j)}(g) u_t^s \equiv \Delta_{t,g}^{(\beta)} u, \quad (9)$$

$$\text{где } \omega_s^{(j)}(g) = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} ((g(t_{j+1}) - g(t_s))^{1-\beta} - (g(t_{j+1}) - g(t_{s+1}))^{1-\beta}), \quad u_t^s = \frac{u_i^{s+1} - u_i^s}{\tau}.$$

Отметим, что в классе достаточно гладких функций справедливо соотношение  $D_{t,g}^{(\beta)} u = \Delta_{t,g}^{(\beta)} u + O(\tau)$ . Задаче (6)–(8) поставим в соответствие разностную схему, записываемую в обозначениях работы [16] в виде

$$\Delta_{t,g}^{(\beta)} y = \frac{1}{2} (\hat{y}_{\bar{x}x} + y_{\bar{x}x}) + \varphi, \quad (10)$$

$$y_0 = y_n = 0, \quad y(x, 0) = 1. \quad (11)$$

При этом для оценки порядка аппроксимации рассматриваемой разностной схемы имеет место соотношение

$$\phi = \frac{1}{2} (\hat{y}_{\bar{x}x} + y_{\bar{x}x}) + \varphi - \Delta_{t,g}^{(\beta)} y = O(h^2 + \tau). \quad (12)$$

Расписывая в (10) соответствующие разностные операторы и приводя подобные члены, получаем систему

$$Ay_{i-1}^{j+1} - C^j y_i^{j+1} + Ay_{i+1}^{j+1} = -F_i^j \quad (i = \overline{1, m-1}; j = \overline{0, n}), \quad (13)$$

где

$$A = \frac{\tau}{2h^2}, \quad C^j = \frac{\tau}{h^2} + \omega_j^{(j)}(g) = \frac{\tau}{h^2} + \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} (g(t_{j+1}) - g(t_j))^{1-\beta}, \quad (14)$$

$$F_i^j = \frac{\tau}{2h^2} (y_{i-1}^j + y_{i+1}^j) + \left( \omega_j^{(j)}(g) - \omega_{j-1}^{(j)}(g) - \frac{\tau}{h^2} \right) y_i^j + \\ + \omega_{j-1}^{(j)} y_i^{j-1} - \sum_{s=0}^{j-2} \omega_s^{(j)}(g) (y_i^{s+1} - y_i^s) + \tau \varphi_i^j. \quad (15)$$

Система (13) эффективно решается методом прогонки [16]. Неравенство

$$D = |C^j| - 2|A| = \omega_j^{(j)}(g) > 0 \quad (16)$$

определяет устойчивость прогонки.

На основании принципа максимума имеем [16]

$$\|y^{j+1}\|_C \leq \left\| \frac{F}{D} \right\|_C, \quad (17)$$

где  $\|y\|_C = \max_{0 \leq i \leq m} |y_i|$ .

Пусть множество  $g(t)$  допустимых функций таково, что справедливы неравенства

$$\omega_k^{(j)}(g) - \omega_{k-1}^{(j)}(g) > 0 \quad (k = \overline{1, j-1}; j = \overline{2, n}). \quad (18)$$

Указанное множество не пусто, поскольку, как показано в [17], ему принадлежат, например, функции вида  $g(t) \equiv t$ . Можно показать, что неравенства вида (18) имеют место и в других случаях, в частности, при  $g(t) \equiv t^2$ . С учетом (18) полу-

чаем оценку выражения  $R = \omega_{j-1}^{(j)} y_i^{j-1} - \sum_{s=0}^{j-2} \omega_s^{(j)}(g) (y_i^{s+1} - y_i^s)$  в виде

$$|R| < \omega_{j-1}^{(j)}(g) \max_{0 \leq s \leq j-1} \|y^s\|_C. \quad (19)$$

Далее, предполагая выполненным условие

$$\frac{\tau}{h^2} \leq \min_{\substack{0 \leq k \leq j \\ 2 \leq j \leq n}} (\omega_k^{(j)}(g) - \omega_{k-1}^{(j)}(g)), \quad (20)$$

с учетом (19) получаем оценку

$$\|F^j\|_C \leq \omega_j^{(j)}(g) \max_{0 \leq s \leq j} \|y^s\|_C + \|\varphi^s\|_C \tau. \quad (21)$$

Тогда из (17) с учетом соотношений (16), (21) имеем

$$\|y^{j+1}\|_C \leq \|y^0\|_C + \Gamma(2-\beta) \sum_{k=0}^j \delta_k^{(g)}(\tau) \|\varphi^k\|_C \tau, \quad (22)$$

где  $\delta_k^{(g)}(\tau) = (g(t_{k+1}) - g(t_k))^{\beta-1}$ .

Следует отметить, что в частном случае  $g(t) \equiv t$  имеем  $\delta_k^{(t)}(\tau) = \tau^{\beta-1}$  и подстановка данного выражения в соотношение (22) дает оценку

$$\|y^{j+1}\|_C \leq \|y^0\|_C + \Gamma(2-\beta) \sum_{k=0}^j \|\varphi^k\|_C \tau^\beta, \quad (23)$$

совпадающую с полученной в [17].

В случае, например,  $g(t) = t^\gamma$  ( $\gamma \geq 1$ ) из (22) получаем оценку

$$\|y^{j+1}\|_C \leq \|y^0\|_C + \Gamma(2-\beta) \sum_{k=0}^j \frac{\|\varphi^k\|_C}{((k+1)^\gamma - k^\gamma)^{1-\beta}} \tau^\mu, \quad (24)$$

где  $\mu = 1 - \gamma(1 - \beta)$ .

Таким образом, при выполнении (20) из (24) следует сходимость разностной схемы (10), (11) в случае  $g(t) = t^\gamma$  ( $\gamma \geq 1$ ) в равномерной метрике.

Далее построим соответствующую разностную схему при наличии в (1) конвективной составляющей (уравнение конвективной диффузии с обобщенной производной Капуто).

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения

$$D_{t,g}^{(\beta)} u = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t) \quad (v \neq 0) \quad (25)$$

с условиями (2), (3). Полагая для простоты  $a, u_0, v = \text{const} \neq 0$ , перейдем к безразмерным переменным и параметрам согласно соотношениям

$$x' = \frac{x}{l}, \quad t' = \left(\frac{a}{l^2}\right)^{1/\beta} t, \quad u' = \frac{u}{u_0}, \quad v' = \frac{vl}{a}, \quad f' = \frac{l^2}{au_0} f. \quad (26)$$

Опуская в дальнейшем знак штрих над безразмерными величинами, получаем

$$D_{t,g}^{(\beta)} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t), \quad (27)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad (28)$$

$$u(x, 0) = 1. \quad (29)$$

Задаче (27)–(29) поставим в соответствие на сетке  $\Omega_{h\tau}$  разностную схему, которая в обозначениях работы [16] записывается в виде

$$\Delta_{t,g}^{(\beta)} y = \frac{1}{2} (\hat{y}_{\bar{x}\bar{x}} + y_{\bar{x}\bar{x}}) - \frac{v}{2} (\hat{y}_0 + y_0) + f, \quad (30)$$

$$y_0 = y_n = 0, \quad y(x, 0) = 1, \quad (31)$$

где  $\Delta_{t,g}^{(\beta)} u$  — конечноразностный аналог производной дробного порядка  $D_{t,g}^{(\beta)} u$ , определяемый согласно (9). Порядок аппроксимации рассматриваемой схемы  $\phi = O(h^2 + \tau)$ .

Расписывая в (30) соответствующие разностные операторы и приводя подобные члены, получаем

$$A y_{i-1}^{j+1} - S^j y_i^{j+1} + B y_{i+1}^{j+1} = -\tilde{F}_i^j \quad (i = \overline{1, m-1}; j = \overline{0, n}), \quad (32)$$

где

$$A = \frac{1}{2h} \left( \frac{1}{h} + \frac{\nu}{2} \right), \quad B = \frac{1}{2h} \left( \frac{1}{h} - \frac{\nu}{2} \right), \quad S^j = A + B + \frac{\omega_j^{(j)}(g)}{\tau},$$

$$\tilde{F}_i^j = \frac{1}{\tau} \omega_j^{(j)}(g) y_i^j - \frac{\nu}{4h} (y_{i+1}^j - y_{i-1}^j) - \sum_{s=0}^{j-1} \omega_s^{(j)}(g) \frac{y_i^{s+1} - y_i^s}{\tau} +$$

$$+ \frac{1}{2h^2} (y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j) + f_i^j,$$

$$\omega_j^{(j)}(g) = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} (g(t_{j+1}) - g(t_j))^{1-\beta}. \quad (33)$$

Система (32) эффективно решается методом прогонки [16]. При этом прогоночные соотношения имеют вид

$$y_i^{j+1} = \alpha_{i+1}^j y_{i+1}^{j+1} + \beta_{i+1}^j \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{0, n}), \quad (34)$$

а прогоночные коэффициенты вычисляются по формулам

$$\alpha_{i+1}^j = \frac{B}{S^j - A\alpha_i^j}, \quad \beta_{i+1}^j = \frac{\alpha_{i+1}^j}{B} (\tilde{F}_i^j + A\beta_i^j) \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{0, n}). \quad (35)$$

Стартовые значения прогоночных коэффициентов равны  $\alpha_1^j = 0, \beta_1^j = 0 \quad (j = \overline{0, n})$ .

Устойчивость метода прогонки для данной системы уравнений вытекает из факта диагонального преобладания в матрице коэффициентов этой системы.

Разностная схема (30), (31) тестировалась на задаче

$$D_{t,\sqrt{t}}^{(1/2)} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t), \quad (36)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad (37)$$

$$u(x, 0) = x^2(1-x)^2, \quad (38)$$

$$f(x, t) = \frac{2x^2(1-x)^2}{\Gamma(1/2)} t^{3/4} - 2(1+t^{3/2})(1-6x+6x^2 - \nu(1-3x+2x^2)),$$

имеющей точное решение:  $u_e(x, t) = (1+t^{3/2})x^2(1-x)^2$ . Результаты расчетов тестовой задачи на разностной сетке, содержащей 400 узлов по геометрической переменной, для значения безразмерного времени  $t = 0,12$  графически показаны на рис. 1 (кривая 1 соответствует точному решению задачи, кривая 1' — приближенному). При этом для данного примера имеем величину отклонения точного от приближенного решения, не превосходящую 0,5 %.

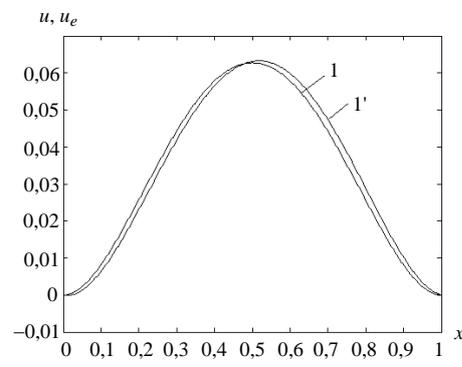


Рис. 1

Отметим, что тестирование схемы на нескольких других примерах задач с однородными граничными условиями типа Дирихле дает величину отклонения точного от приближенного решения меньше 1–2 % (с увеличением числа узлов сетки указанное отклонение уменьшается). Это указывает на возможность эффективного использования рассматриваемого подхода при численном моделировании эволюционных процессов, описываемых уравнениями с обобщенными дробными производными Капуто.

## 2. Численное моделирование локально-неравновесного во времени фильтрационно-консолидационного процесса в геопористой среде на основе дробно-дифференциальной модели с обобщенными производными Капуто

Математическая модель для описания динамики фильтрационно-консолидационного процесса в геопористой среде, насыщенной соевыми растворами, в условиях существенной временной нелокальности базируется на системе уравнений дробного порядка вида [1]

$$D_t^{(\beta)} p(x, t) = C_v \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \eta \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (39)$$

$$\sigma D_t^{(\beta)} C(x, t) = d \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + u \frac{\partial C}{\partial x}, \quad (40)$$

где  $u = \frac{k}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} - v \frac{\partial C}{\partial x}$ ,  $p$  — поровое давление ( $p = \gamma H$ ,  $H$  — избыточный напор [10],  $\gamma$  — удельный вес жидкости),  $C$  — концентрация солей в жидкой фазе,  $k$  — коэффициент фильтрации среды,  $d$  — коэффициент диффузии,  $v$  — коэффициент осмоса,  $C_v$  — коэффициент консолидации [10, 11],  $\eta = v C_v \gamma / k$ ,  $D_t^{(\beta)}$  — оператор регуляризованной дробной производной порядка  $\beta$ ,  $\sigma$  — пористость среды.

Вводя в рассмотрение обобщенную производную по Капуто в виде (4), получаем следующую обобщенную математическую модель фильтрационно-консолидационного процесса в геопористой среде, насыщенной соевыми растворами:

$$D_{t,g}^{(\beta)} p(x, t) = C_v \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \eta \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (41)$$

$$\sigma D_{t,g}^{(\beta)} C(x, t) = d \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + u \frac{\partial C}{\partial x}. \quad (42)$$

При  $g(t) \equiv t$  модели, описываемые уравнениями (41), (42) и (39), (40), очевидно совпадают.

Обобщенная математическая модель, базирующаяся на системе уравнений (41), (42), обладает (по сравнению с моделью, основанной на системе уравнений дробного порядка (39), (40)) тем преимуществом, что позволяет путем выбора функции  $g(t)$  (из некоторого допустимого множества) управлять процессом моделирования, описывая различные желаемые режимы функционирования процесса, например субдиффузионный, супердиффузионный и др. [7].

Убедимся в этом путем численного моделирования в рамках обобщенной математической модели динамики локально-неравновесного во времени фильтрационно-консолидационного процесса для насыщенного соевым раствором геопористого массива конечной мощности.

Рассмотрим задачу о фильтрационной консолидации массива мощности  $l$ , насыщенного соевым раствором, имеющего проницаемую верхнюю грань и расположенного на проницаемом основании. В рамках обобщенной математической

модели, учитывающей временную неравновесность процесса, задача сводится к решению в области  $(0, l) \times (0, +\infty)$  системы уравнений (41), (42) при следующих краевых условиях:

$$p(0, t) = 0, \quad p(l, t) = 0, \quad p(x, 0) = p_0, \quad (43)$$

$$C(0, t) = C_0, \quad \frac{\partial C(l, t)}{\partial x} = 0, \quad C(x, 0) = 0, \quad (44)$$

где  $p_0$  — начальное значение избыточного давления в геопористой среде,  $C_0$  — заданное значение концентрации солей на входе фильтрационного потока.

Введем в рассмотрение безразмерные переменные и параметры соотношениями

$$\begin{aligned} x' = \frac{x}{l}, \quad t' = \left( \frac{C_v}{l^2} \right)^{1/\beta} t, \quad C' = \frac{C}{C_0}, \quad p' = \frac{p}{p_0}, \quad d' = \frac{d}{C_v}, \\ v' = \frac{vC_0}{C_v}, \quad k' = \frac{kp_0}{\gamma C_v}, \quad \eta' = \frac{\eta C_0}{C_v p_0}, \quad g' = \left( \frac{C_v}{l^2} \right)^{1/\beta} g. \end{aligned} \quad (45)$$

Переходя в (41)–(44) к безразмерным переменным согласно соотношениям (45) и опуская в дальнейшем знак «штрих» над безразмерными величинами, получаем следующую нелинейную краевую задачу:

$$D_{t,g}^{(\beta)} p(x, t) = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \eta \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (46)$$

$$\sigma D_{t,g}^{(\beta)} C(x, t) = d \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + u \frac{\partial C}{\partial x}, \quad (47)$$

$$p(0, t) = 0, \quad p(1, t) = 0, \quad p(x, 0) = 1, \quad (48)$$

$$C(0, t) = 1, \quad \frac{\partial C(1, t)}{\partial x} = 0, \quad C(x, 0) = 0, \quad (49)$$

где  $u = k \frac{\partial p}{\partial x} - v \frac{\partial C}{\partial x}$ ,  $D_{t,g}^{(\beta)} u$  определяется согласно (4).

Введем в рассмотрение сеточную область  $\Omega_{ht}$  и поставим в соответствие (46), (47) систему разностных уравнений, записываемую в стандартных обозначениях [16] в виде

$$\Delta_{t,g}^{(\beta)} p = \hat{p}_{\bar{x}\bar{x}} - \eta \hat{C}_{\bar{x}\bar{x}}, \quad (50)$$

$$\sigma \Delta_{t,g}^{(\beta)} C = \chi \hat{C}_{\bar{x}\bar{x}} + u^+ \hat{C}_x + u^- \hat{C}_{\bar{x}}, \quad (51)$$

где  $\chi = \frac{d}{R}$ ,  $R = 1 + \frac{h|u|}{2d}$ ,  $u^\pm = \frac{1}{2}(u \pm |u|)$ ,  $u = kp_x - vC_x$ .

Отметим, что для дискретизации уравнения (46) использована неявная разностная схема, а для уравнения (47) — монотонная разностная схема Самарского [16].

Расписывая в соотношениях (50), (51) соответствующие разностные операторы и приводя подобные члены, получаем следующие системы алгебраических уравнений:

$$\tilde{A} p_{i-1}^{j+1} - \tilde{S}^j p_i^{j+1} + \tilde{A} p_{i+1}^{j+1} = -\tilde{F}_i^{j+1} \quad (i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{0, n}), \quad (52)$$

$$A_i^j C_{i-1}^{j+1} - S_i^j C_i^{j+1} + B_i^j C_{i+1}^{j+1} = -F_i^{j+1} \quad (i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{0, n}), \quad (53)$$

где обозначено

$$\tilde{A} = \frac{1}{h^2}, \quad \tilde{S}^j = 2\tilde{A} + \frac{\omega_j^{(j)}(g)}{\tau}, \quad \tilde{F}_i^{j+1} = \frac{\omega_j^{(j)}(g)}{\tau} p_i^j - \sum_{s=0}^{j-1} \omega_s^{(j)}(g) \frac{p_i^{s+1} - p_i^s}{\tau} -$$

$$-\frac{\eta}{h^2}(C_{i-1}^{j+1} - 2C_i^{j+1} + C_{i+1}^{j+1}), \quad A_i^j = \frac{1}{h} \left( \frac{\chi_i^j}{h} - (u^-)_i^j \right), \quad B_i^j = \frac{1}{h} \left( \frac{\chi_i^j}{h} + (u^+)_i^j \right),$$

$$S_i^j = \sigma \omega_j^{(j)}(g) + A_i^j + B_i^j, \quad F_i^j = \frac{\sigma}{\tau} \omega_j^{(j)}(g) C_i^j - \sigma \sum_{s=0}^{j-1} \omega_s^{(j)}(g) \frac{C_i^{s+1} - C_i^s}{\tau}.$$

Разностные уравнения систем (52), (53), являясь трехточечными, эффективно решаются методом прогонки [16]. При этом устойчивость метода прогонки для указанных систем вытекает из факта диагонального преобладания в матрицах коэффициентов этих систем алгебраических уравнений.

Учитывая изложенное, вычислительный алгоритм для приближенного решения рассматриваемой задачи сформулируем следующим образом.

1. На данном временном слое вычисляем значение концентрации  $C$  в соответствии с (53), используя значение давления  $p$  из предыдущего временного слоя.

2. С учетом найденных на данном временном слое значений  $C$ , вычисляем значения давления  $p$  на этом слое согласно (52). Этим решение задачи на рассматриваемом временном слое завершается.

3. Переходим на следующий временной слой и повторяем вычисления начиная с шага 1.

### 3. Результаты численных экспериментов и выводы

Численное моделирование динамики полей фильтрационных давлений и полей концентраций в геофильтрационном потоке в рамках рассматриваемой локально-неравновесной математической модели геомиграции с обобщенными производными Капуто выполнено относительно безразмерных переменных и параметров, определяемых соотношениями (45).

Некоторые из полученных результатов расчетов изображены на рис. 2–5.

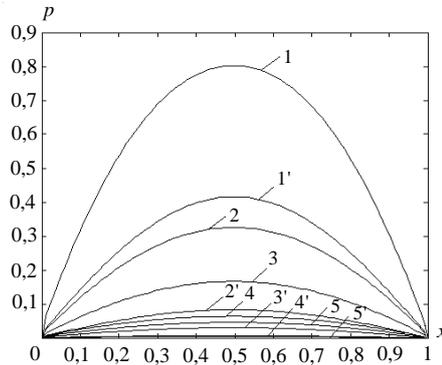


Рис. 2

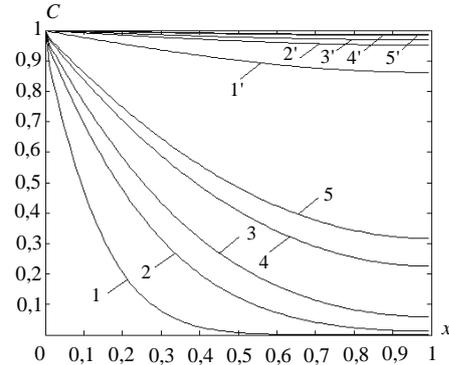


Рис. 3

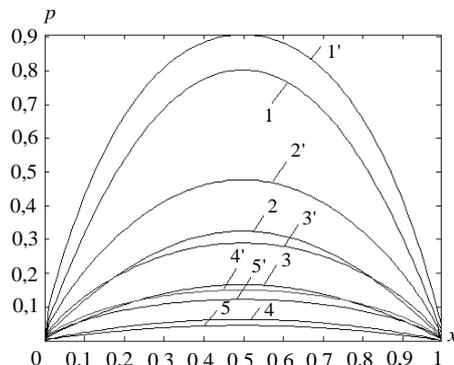


Рис. 4

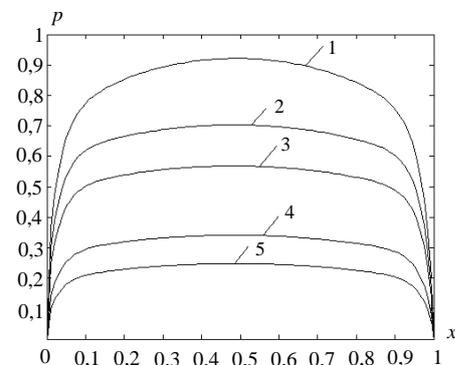


Рис. 5

На рис. 2 показана динамика кривых избыточных напоров в сверхбыстром режиме распространения возмущений в различные моменты времени: 1, 1' —  $t = 0,02$ ; 2, 2' —  $t = 0,1$ ; 3, 3' —  $t = 0,2$ ; 4, 4' —  $t = 0,5$ ; 5, 5' —  $t = 0,7$  (кривые 1–5 соответствуют  $g(t) = t$ , а кривые 1'–5' —  $g(t) = t^2$ ). Динамика полей концентраций в жидкой фазе в обычном (кривые 1–5,  $g(t) = t$ ) и сверхбыстром (кривые 1'–5',  $g(t) = t^5$ ) режимах для тех же моментов времени показана на рис. 3. На рис. 4 показана динамика кривых избыточных напоров в сверхмедленном режиме для указанных выше моментов безразмерного времени (кривые 1–5 соответствуют  $g(t) = t$ , а кривые 1'–5' —  $g(t) = \sqrt{t}$ ). Нестандартное распределение порового давления в геопористом массиве в рамках модели с обобщенными производными Капуто при  $g(t) = t^2 + t^{0,01}$  представлено на рис. 5 (1 —  $t = 0,021$ ; 2 —  $t = 0,102$ ; 3 —  $t = 0,202$ ; 4 —  $t = 0,504$ ; 5 —  $t = 0,705$ ).

Анализ результатов численных экспериментов, соответствующих варьированию вида функции  $g(t)$ , позволяет сделать вывод о том, что в рамках рассматриваемой обобщенной математической модели имеется возможность моделирования:

- сверхбыстрых режимов рассеивания полей избыточных напоров в насыщенных солевыми растворами деформируемых геопористых пластах (см. рис. 2);
- сверхбыстрых режимов динамики распространения полей концентраций в жидкой фазе (см. рис. 3);
- сверхмедленных режимов рассеивания полей избыточных напоров в насыщенных геопористых пластах (см. рис. 4);
- особенных, отличных от указанных выше, режимов динамики консолидационного процесса, например режимов, графически выраженных в виде картин распределения избыточного порового давления, для которых в каждый фиксированный момент времени характерно близкое к установившемуся распределение давлений во внутренних точках насыщенного солевым раствором геомассива с одновременным резким падением давлений в окрестностях кровли и подошвы (см. рис. 5).

### Заключение

Для теоретического описания локально-неравновесных во времени фильтрационно-консолидационных процессов в насыщенных солевыми растворами деформируемых геопористых средах предложена дробно-дифференциальная математическая модель на базе обобщенной производной Капуто. Результаты численного моделирования фильтрационной консолидации деформируемого насыщенного геомассива в рамках указанной модели свидетельствуют о возможности в определенном смысле управления процессом моделирования в локально-неравновесных условиях с помощью варьирования вида функции  $g(t)$ , определяющей тип заданного режима функционирования изучаемого процесса (сверхмедленный, сверхбыстрый и т.д.).

*В.М. Булавацький*

### ПРО ОДНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ ДРОБОВО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ГЕОІНФОРМАЦІЙНОЇ МОДЕЛІ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ЛОКАЛЬНО-НЕРІВНОВАЖНИХ ПРОЦЕСІВ ГЕОМІГРАЦІЇ

Розглянуто узагальнену дробово-диференціальну математичну модель для дослідження динаміки локально-нерівноважних у часі геоміграційних процесів. Поставлено відповідну цій моделі нелінійну крайову задачу, розвинуто методику її чисельного розв'язання та наведено результати чисельних експериментів.

ON ONE GENERALIZATION OF FRACTIONAL  
DIFFERENTIAL GEOINFORMATION MODEL  
FOR RESEARCH OF LOCALLY-NONEQUILIBRIUM  
PROCESSES OF GEOMIGRATION

The generalized fractional differential mathematical model for research of dynamics of local-nonequilibrium in time geomigrations processes is considered. The nonlinear boundary-value problem, appropriate to this model is put, the technique of its numerical solution is developed and the results of numerical experiments are given.

1. Булавацький В.М. Математическая модель геоинформатики для исследования динамики локально-неравновесных геофильтрационных процессов // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2011. — № 6. — С. 76–83.
2. Булавацький В.М., Скопецький В.В. Математическое моделирование процесса фильтрационной консолидации с учетом релаксационных явлений // Проблемы управления и информатики. — 2006. — № 3. — С. 48–56.
3. Булавацький В.М., Скопецький В.В. Системный подход к проблеме математического моделирования процесса фильтрационной консолидации // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 6. — С. 71–79.
4. Булавацький В.М., Скопецький В.В. Математическое моделирование динамики процесса консолидации на основе системного подхода // Проблемы управления и информатики. — 2007. — № 4. — С. 59–66.
5. Булавацький В.М. Математическое моделирование фильтрационной консолидации с учетом солепереноса в рамках системы с двойной релаксацией // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 1. — С. 116–126.
6. Бомба А.Я., Булавацький В.М., Скопецький В.В. Нелінійні математичні моделі процесів геодинаміки. — Київ : Наук. думка, 2007. — 292 с.
7. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. — Amsterdam : Elsevier, 2006. — 523 p.
8. Podlubny I. Fractional differential equations. — New York : Academ. Press, 1999. — 341 p.
9. Miller K.S., Ross B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. — New York : John Wiley & Sons, 1993. — 366 p.
10. Иванов П.Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений. — М. : Высш. шк., 1991. — 447 с.
11. Ширинкулов Т.Ш., Зарецкий Ю.К. Ползучесть и консолидация грунтов. — Ташкент : Фан, 1986. — 390 с.
12. Булавацький В.М., Кривонос Ю.Г., Скопецький В.В. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу. — Київ : Наук. думка, 2005. — 283 с.
13. Власюк А.П., Мартинюк П.М. Математичне моделювання консолідації ґрунтів в процесі фільтрації сольових розчинів. — Рівне : Вид-во УДУВГП, 2004. — 211 с.
14. Хасанов М.М., Булгакова Г.Т. Нелинейные и неравновесные эффекты в реологически сложных средах. — Москва; Ижевск : Ин-т компьютерных исследований, 2003. — 288 с.
15. Abramovitz M., Stegun I.A. Handbook of mathematical functions. — New York : Dover, 1965. — 831 p.
16. Самарский А.А. Теория разностных схем. — М. : Наука, 1977. — 656 с.
17. Таукенова Ф.И., Шхануков-Лафшиев М.Х. Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2006. — 46, № 10. — С. 1871–1881.

Получено 02.02.2012

Статья представлена к публикации членом редколлегии чл.-корр. НАН Украины А.А. Чикрием.