УДК 517.929.4

И.А. Джалладова, Д.Я. Хусаинов

КВАДРАТИЧНЫЕ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

1. Системы без запаздывания

Один из эффективных подходов при разработке динамических моделей в экономике, экологии и динамике популяций состоит в разработке моделей, в которых скорость динамики пропорциональна количеству популяции [1, 2]. Значительная часть математических моделей описывается системами обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}(t) = K[x(t)]\,x(t). \tag{1}$$

Здесь $K[x(t)]$ — квадратная матрица, указывающая на зависимость скорости роста от фазовых координат. Если матрица $K[x(t)]$ линейная, то модель представляет собой систему с квадратичной правой частью. В частности, если модель скалярная, то

$$\dot{x}(t) = [a - bx(t)]\,x(t), \tag{2}$$

где $x(t) \in R^1$, a, b — некоторые положительные постоянные, $t \ge 0$.

1.1. Модель Ферхюльста. Одно из наиболее известных уравнений, которое описывает динамику народонаселения с учетом ограниченности роста популяции в ограниченном регионе, — логистическое уравнение, предложенное Ферхюльстом в 1838 г. [2, 3]:

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t)\left(1 - \frac{x(t)}{k}\right). \tag{3}$$

Уравнение имеет две особенности. При малых значениях параметра k численность популяции $x(t)$ растет, а при больших величинах приближается к значению k. Решение задачи Коши, дифференциального уравнения (1), удовлетворяющей начальному условию $x(0) = x_0$, можно записать в виде

$$x(x_0, t) = \frac{kx_0 e^{at}}{k + x_0(e^{at} - 1)}. \tag{4}$$

Если начальное значение $x_0 < \frac{1}{2}k$, кривая имеет точку перегиба. Если начальные условия таковы, что $x_0 > k$, то численность популяции со временем падает.

Динамическая система имеет два положения равновесия: $x(t) \equiv k$ и $x(t) \equiv 0$, причем первое положение равновесия устойчиво, а второе неустойчиво. Таким образом, количество популяции стремится к некоторому установившемуся количеству, зависящему от параметров модели.

1.2. Общая квадратичная модель. В общем случае систему (1) с линейной частью $K[x(t)]$ можно записать в виде [4]

$$\dot{x}_i(t) = \left[a_i - \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j(t) \right] x_i(t), \quad i = \overline{1, n}, \tag{5}$$

или в векторно-матричном виде систему (5) можно записать следующим образом:

$$\dot{x}(t) = [A - X^{\mathrm{T}}(t) B] x(t). \tag{6}$$

Здесь A — квадратная диагональная матрица с постоянными коэффициентами $A = \{a_{ii}\}$, $i = \overline{1, n}$, $B = \{B_1, B_2, ..., B_n\}^{\mathrm{T}}$ — прямоугольная $n^2 \times n$-матрица, состоящая из симметричных квадратных $n \times n$-матриц B_i, $i = \overline{1, n}$, у которых на месте i-го столбца стоит вектор $b_i^{\mathrm{T}} = (b_{i1}, b_{i2}, ..., b_{in})$:

$$B_i = \begin{bmatrix} 0 & \dots & b_{i1} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & b_{i2} & \dots & 0 \\ . & \dots & . & \dots & . \\ 0 & \dots & b_{in} & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad i = \overline{1, n},$$

$X^{\mathrm{T}}(t) = \{X_1(t), X_2(t), ..., X_n(t)\}$ — прямоугольная $n \times n^2$-матрица, состоящая из квадратных $n \times n$-матриц $X_i(t)$, у которых на i-х строках стоят векторы $x(t)$, остальные элементы нулевые, т.е.

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & ... & x_n(t) \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}, \quad X_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ x_1(t) & x_2(t) & ... & x_n(t) \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}, \ \dots$$

$$\dots, \ X_n(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ x_1(t) & x_2(t) & ... & x_n(t) \end{bmatrix}.$$

Здесь и в дальнейшем под векторными и матричными нормами будем понимать

$$|x(t)| = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i^2(t) \right\}^{1/2}, \quad |B| = \{\lambda_{\max}(B^{\mathrm{T}} B)\}^{1/2},$$

$\lambda_{\max}(\cdot)$, $\lambda_{\min}(\cdot)$ — наибольшее и наименьшее собственные числа соответствующих симметричных, положительно-определенных матриц. Предположим, что

$$\det B_0 \neq 0, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & ... & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & ... & b_{n2} \\ . & . & ... & . \\ b_{1n} & b_{2n} & ... & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тогда, как правило, интерес для исследования представляет особая точка $x_0^{\mathrm{T}} =$ $= (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, которая является решением системы алгебраических уравнений

$$B_0 x = a, \quad a^{\mathrm{T}} = (a_1, a_2, ..., a_n)^{\mathrm{T}}$$

и находится в первом квадранте, т.е. $x_1^0 > 0$, $x_2^0 > 0$, $x_n^0 > 0$. После замены $x(t) = y(t) + x_0$ получаем систему уравнений возмущений

$$\dot{y}(t) = [A - (Y(t) + X_0)^{\mathrm{T}} B](y(t) + x_0),$$

 ISSN 0572-2691

которая после преобразований принимает вид

$$\dot{y}(t) = \overline{A}\,y(t) - Y^{\mathrm{T}}(t)By(t), \tag{7}$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} b_{11}x_1^0 & b_{21}x_1^0 & \dots & b_{n1}x_1^0 \\ b_{12}x_2^0 & b_{22}x_2^0 & \dots & b_{n2}x_2^0 \\ . & . & \dots & . \\ b_{1n}x_n^0 & b_{2n}x_n^0 & \dots & b_{nn}x_n^0 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Предположим, что матрица $\overline{A}$, определенная в (8), асимптотически устойчивая, т.е. $\mathrm{Re}\lambda_i(\overline{A}) < 0$, $i = \overline{1, n}$. Тогда особая точка $x_0^{\mathrm{T}} = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ будет асимптотически устойчивой и область ее устойчивости можно оценить с помощью квадратичной функции Ляпунова $V(y) = y^{\mathrm{T}}Hy$, где симметричная, положительно-определенная матрица H является решением уравнения Ляпунова [5]

$$\overline{A}^{\mathrm{T}}H + H\overline{A} - C. \tag{9}$$

Здесь C — произвольная, симметричная, положительно-определенная матрица.

Взяв полную производную функции $V(x)$ в силу системы (7), получим

$$\frac{d}{dt}V(y(t)) = y^{\mathrm{T}}(t)Hy(t) + y^{\mathrm{T}}(t)H\dot{y}(t) =$$

$$= [\overline{A}y(t) - Y^{\mathrm{T}}(t)By(t)]^{\mathrm{T}}Hy(t) + y^{\mathrm{T}}(t)H[\overline{A}y(t) - Y^{\mathrm{T}}(t)By(t)] =$$

$$= y^{\mathrm{T}}(t)[\overline{A}H + H\overline{A}]y(t) - y^{\mathrm{T}}(t)[B^{\mathrm{T}}Y(t)H + HY^{\mathrm{T}}(t)B]y(t).$$

Учитывая, что матрица H является решением уравнения Ляпунова, получаем

$$\frac{d}{dt}V(y(t)) = -y^{\mathrm{T}}(t)Cy(t) - y^{\mathrm{T}}(t)[B^{\mathrm{T}}Y(t)H + HY^{\mathrm{T}}(t)B]y(t).$$

Таким образом, для полной производной функции Ляпунова имеет место неравенство

$$\frac{d}{dt}V(y(\mathrm{t})) \le -\lambda_{\min}(C)\left|y(t)\right|^2 + 2\left|H\right|\left|B\right|\left|y(t)\right|^3 =$$

$$= -[\lambda_{\min}(C) - 2\left|H\right|\left|B\right|\left|y(t)\right|]\left|y(t)\right|^2.$$

В случае асимптотической устойчивости матрицы $\overline{A}$ гарантированной областью устойчивости положения равновесия особой точки x_0 будет внутренность эллипса $y^{\mathrm{T}}Hy = r^2$, находящаяся внутри сферы $\left|y\right| = R$. Обозначив

$$G_0 = \{x \in R^n : \left|y\right| < R\},\quad R = \frac{\lambda_{\min}(C)}{2\left|H\right|\left|B\right|}, \tag{10}$$

получим, что область «гарантированной» устойчивости имеет вид [4]

$$G_{r_0} = \max_{r>0}\{G_r : G_r \subset G_0\},\quad G_r = \{y \in R^n : y^{\mathrm{T}}Hy < r^2\}. \tag{11}$$

Как следует из зависимости (11), нужно поместить эллипс $y^{\mathrm{T}}Hy = r^2$ внутрь сферы радиуса $R = \dfrac{\lambda_{\min}(C)}{2\left|H\right|\left|B\right|}$ и «растягивать» $r \to \infty$ до тех пор, пока эллипс не коснется сферы.

2. Системы с запаздыванием

Как правило, моделям экономики и экологии присущ фактор запаздывания, определяемый «временем полового созревания» или «временем принятия решения». Поэтому более адекватными являются математические модели, описываемые системами функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием [6–9]. Одними из первых математических моделей, описываемых дифференциальными уравнениями с постоянным запаздыванием, были уравнения Хатчисона и Вольтерра [1–3].

2.1. Уравнение Ферхюльста с запаздыванием. Уравнение Ферхюльста отображает динамику роста популяции $x(t)$ с насыщением. Ограниченность роста обусловлена «внутренней конкуренцией». Отметим следующий фактор, уточняющий модель Ферхюльста. Конкуренция, вообще говоря, возникает между новой популяцией $x(t)$ и популяцией $x(t-\tau)$, родившейся с запаздыванием τ. В этом случае динамика популяции определяется уравнением Хатчисона (1948 г.), имеющего вид дифференциального уравнения с запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t)\left(1 - \frac{x(t-\tau)}{k}\right). \tag{12}$$

Запаздывание возникает из-за конечного времени, необходимого для достижения «времени половой зрелости».

Динамическая система, описываемая уравнением (12), также имеет два положения равновесия: $x(t) \equiv 0$ и $x(t) \equiv k$. Нетрудно видеть, что линейное приближение в точке $x(t) \equiv 0$ дает уравнение $\dot{x}(t) = ax(t)$ и указывает на неустойчивость нулевого положения равновесия. Рассмотрим вторую точку покоя $x(t) \equiv k$.

Проведем линеаризацию уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), x(t-\tau))$$

в окрестности точки $x(t) \equiv k$. Запишем

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left.\frac{\partial f(x(t), x(t-\tau))}{\partial x(t)}\right|_{x(t)=x(t-\tau)=k} [x(t) - k] +$$

$$+ \left.\frac{\partial f(x(t), x(t-\tau))}{\partial x(t-\tau)}\right|_{x(t)=x(t-\tau)=k} [x(t-\tau) - k].$$

После подстановки соответствующих значений получим

$$\frac{dx(t)}{dt} = -a[x(t-\tau) - k]$$

и в окрестности особой точки $x(t) \equiv k$ уравнение линейного приближения имеет вид

$$\frac{dy(t)}{dt} = -ay(t-\tau), \quad y(t) = x(t) - k. \tag{13}$$

Характеристическое уравнение запишем $\lambda + ae^{\lambda\tau} = 0$ и, как следует из [6, 7], при $0 < a\tau < \pi/2$ положение равновесия $x(t) \equiv k$ будет локально асимптотически устойчивым.

Проведем оценку области устойчивости в фазовом пространстве положения равновесия $x(t) \equiv k$ исходной нелинейной системы (12). Перенесем преобразованием $y(t) + k = x(t)$ точку $x(t) \equiv k$ в начало координат. В результате получим уравнение

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\frac{a}{k}[y(t) + k]y(t-\tau). \tag{14}$$

Исследование устойчивости и оценку области устойчивости в фазовом пространстве будем проводить с использованием квадратичной функции Ляпунова $V(y) = 0{,}5y^2$. Геометрически второй метод Ляпунова состоит в нахождении поло-

 ISSN 0572-2691

жительно-определенной функции, полная производная которой в силу уравнения является отрицательно-определенной функцией. Поскольку рассматривается уравнение с запаздыванием, то полная производная представляет собой функционал, содержащий фазовую переменную в предшествующий момент времени. При ее вычислении будет использоваться условие Разумихина [4]. Геометрически оно означает, что полная производная вычисляется при условии подхода решения изнутри поверхности уровня функции Ляпунова. Применительно к функции $V(y) = 0{,}5y^2$ оно имеет вид

$$\frac{1}{2}y^2(t-\tau) = V(y(t-\tau)) < V(y(t)) = \frac{1}{2}y^2(t)$$

и производная вычисляется при условии

$$|\,y(t-\tau)\,| < |\,y(t)\,|. \tag{15}$$

Вычислим полную производную функции Ляпунова в силу уравнения (14):

$$\frac{d}{dt}V(y(t)) = -\frac{a}{k}y(t)[y(t)+k]y(t-\tau) =$$

$$-\frac{a}{k}y(t)[y(t)+k]y(t) - \frac{a}{k}y(t)[y(t)+k][y(t-\tau)-y(t)].$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d}{dt}V(y(t)) \le -a\left[1-\frac{1}{k}|\,y(t)\,|\right]|y(t)|^2 + \frac{a}{k}|y(t)|\,[\,|y(t)|+k]\,|y(t)-y(t-\tau)|.$$

Оценим разность фазовых координат с запаздыванием и без него. Перепишем уравнение (14) в виде

$$y(t) = y(t-\tau) - \frac{a}{k}\int_{t-\tau}^{t}[y(s)+k]y(s-\tau)\,ds.$$

Используя условие (15), получаем

$$|\,y(t)-y(t-\tau)\,| < \frac{a}{k}\int_{t-\tau}^{t}[\,|y(s)|+k]\,|y(s-\tau)\,|\,ds \le \frac{a}{k}[\,|y(t)|+k]\,|\,y(t)|\tau,$$

и для полной производной функции Ляпунова имеет место выражение

$$\frac{d}{dt}V(y(t)) < -a\left[1-\frac{1}{k}|\,y(t)\,|\right]|\,y(t)\,|^2 + \left(\frac{a}{k}\right)^2[\,|y(t)|+k]^2\,|y(t)\,|^2\,\tau. \tag{16}$$

Рассмотрим шар $U_\delta(0)$ радиуса $\Delta = k\xi,\ \ 0<\xi<1.$ Для полной производной (16) с решениями $y(t),$ находящимися в этом шаре, будет иметь место следующее:

$$\frac{d}{dt}V(y(t)) < -a(1-\xi)|\,y(t)\,|^2 + \left(\frac{a}{k}\right)^2 k^2(1+\xi)^2|\,y(t)\,|^2\,\tau \tag{17}$$

и при $\tau < \tau_0$, где

$$\tau_0 = \frac{1-\xi}{a(1+\xi)^2}, \tag{18}$$

полная производная функции Ляпунова будет иметь вид

$$\frac{d}{dt}V(y(t)) < -\frac{\tau_0-\tau}{a^2(1+\xi)^2}|\,y(t)\,|^2 \tag{19}$$

и будет отрицательно-определенной функцией. Следовательно, нулевое решение будет асимптотически устойчивым.

Заметим, что в подынтегральное выражение входит функция $y(s-\tau)$, а интеграл берется в границах $s \in [t-\tau, t]$. Поэтому функция $y(s-\tau)$ определена на промежутке $t-2\tau \le s-\tau \le t-\tau$, и полную производную функции Ляпунова следует брать для момента времени $t > \tau$. Оценим максимальную величину $y(t)$, $-\tau \le t \le \tau$, и выберем начальные условия таким образом, чтобы при $-\tau \le t \le \tau$ решение не выходило за переделы шара $U_\delta(0)$ радиуса $\Delta = k\xi$, $0 < \xi < 1$. Представим (14) в виде

$$y(t) = y(0) - \int_0^t \frac{a}{k}[y(s)+k]y(s-\tau)\,ds.$$

Пусть $|y(t)| < \delta$, $-\tau \le t \le 0$. Тогда

$$|y(t)| \le (1+a)\delta + \frac{a\delta}{k}\int_0^t |y(s)|\,ds$$

и на основании леммы Беллмана получаем $|y(t)| \le (1+a)\delta \exp\left(\frac{a\delta}{k}t\right)$. Таким образом, если $|y(t)| < \delta$ при $-\tau \le t \le 0$, то при $-\tau \le t \le \tau$ будет выполняться $|y(t)| \le$ $\le (1+a)\delta \exp\left(\frac{a\delta}{k}\tau\right)$, и чтобы при $-\tau \le t \le \tau$ решение $y(t)$ не выходило из шара радиуса *k*, достаточно положить $(1+a)\delta \exp\left(\frac{a\delta}{k}t\right) \le k$, т.е $\delta \exp\left(\frac{a\delta}{k}t\right) \le \frac{k}{1+a}$.

Таким образом, «гарантированной» областью асимптотической устойчивости нулевого решения является шар

$$U_\delta(0) = \{y : |y| < \delta\},\ \ \delta \exp\left(\frac{a\delta}{k}t\right) \le \frac{k}{1+a}. \qquad (20)$$

2.2. Общая квадратичная модель с запаздыванием. В универсальном векторно-матричном виде квадратичная модель с запаздыванием записывается следующим образом:

$$\dot{x}(t) = [A - X^{\mathrm{T}}(t-\tau)B]x(t). \qquad (21)$$

Пусть, как и в случае без запаздывания, $x_0^{\mathrm{T}} = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ — решение системы алгебраических уравнений

$$B_0 x = a,\ \ a^{\mathrm{T}} = (a_1, a_2, ..., a_n)^{\mathrm{T}}.$$

Произведя замену $x(t) = y(t) + x_0$, получаем систему уравнений возмущений

$$\dot{y}(t) = [A - (x(t-\tau) + X_0)^{\mathrm{T}} B](y(t) + x_0),$$

которая после преобразований принимает вид

$$\dot{y}(t) = \overline{A}y(t) - Y^{\mathrm{T}}(t-\tau)By(t), \qquad (22)$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} b_{11}x_1^0 & b_{21}x_1^0 & \dots & b_{n1}x_1^0 \\ b_{12}x_2^0 & b_{22}x_2^0 & \dots & b_{n2}x_2^0 \\ . & . & \dots & . \\ b_{1n}x_n^0 & b_{2n}x_n^0 & \dots & b_{nn}x_n^0 \end{bmatrix}.$$

Исследуем устойчивость нулевого положения равновесия системы (22) с использованием метода функций Ляпунова квадратичного вида $V(y) = y^{\mathrm{T}}Hy$. При оценке полной производной будет использоваться условие Разумихина [8]. Применительно к функции $V(y)=y^{\mathrm{T}}Hy$ оно имеет вид

$$\lambda_{\min}(H)\,|\,y(t-\tau)\,|^2 \le V(y(t-\tau)) < V(y(t)) \le \lambda_{\max}(H)\,|\,y(t)\,|^2,$$

т.е.

$$|\,y(t-\tau)\,| \le \sqrt{\varphi(H)}\,|\,y(t)\,|,\ \ \varphi(H)=\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}. \tag{23}$$

Обозначим множество точек $y\in R^n$, находящихся внутри поверхности уровня $V(y)=\alpha$ функции Ляпунова $V(y)=y^{\mathrm{T}}Hy$ через V^{α}, а его границу — через ∂V^{α}, т.е.

$$V^{\alpha}=\{y\in R^n : V(y)<\alpha\},\ \ \partial V^{\alpha}=\{y\in R^n : V(y)=\alpha\}.$$

Лемма 1. Пусть для решения $y(t)$ системы (22) в момент $t=T>\tau$ выполняется $y(T)\in\partial V^{\alpha}$, а при $-\tau\le t<T$ — $y(t)\in V^{\alpha}$. Тогда справедливо неравенство

$$|\,y(T)-y(T-\tau)\,| \le [\,|\,\overline{A}\,|+|B|\sqrt{\varphi(H)}\,|y(T)|\,]\sqrt{\varphi(H)}\,|\,y(T)\,|\tau. \tag{24}$$

Доказательство. Перепишем систему (22) в виде

$$y(T)=y(T-\tau)+\int\limits_{T-\tau}^{T}[\overline{A}y(s)-Y^{\mathrm{T}}(s-\tau)By(s)]\,ds.$$

Будет иметь место соотношение

$$|\,y(T)-y(T-\tau)\,| \le \int\limits_{T-\tau}^{T}[\,|\,\overline{A}\,|\,|y(s)\,|+|\,Y(s-\tau)\,|\,|B|\,|\,y(s)\,|]\,ds \le$$

$$\le [\,|\,\overline{A}\,|+|\,B\,|\sqrt{\varphi(H)}\,|y(T)\,|\,]\sqrt{\varphi(H)}\,|\,y(T)\,|\,\tau,$$

т.е. утверждение леммы 1.

Лемма 2. Пусть при $-\tau\le t\le 0$ для начального условия $\varphi(t)$ решения $y(t)$ выполняется $|\,\varphi(t)\,|<\delta$. Тогда для этого решения на промежутке $0\le t\le\tau$ будет выполняться

$$|\,y(t)\,| \le \delta\exp\{[\,|\,\overline{A}\,|+|\,B\,|\delta]\tau\}. \tag{25}$$

Доказательство. Перепишем систему дифференциальных уравнений (22) в виде

$$y(t)=y(0)+\int\limits_{0}^{t}[\overline{A}y(s)-Y^{\mathrm{T}}(s-\tau)By(s)]\,ds.$$

Отсюда получаем соотношение $|\,y(t)\,|\le\delta+\int\limits_{0}^{t}[\,|\,A\,|+|\,B\,|\delta]\,|y(s)\,|\,ds$ и, как следует из неравенства Беллмана, $|\,y(t)\,|\le\delta\exp\{[\,|\,\overline{A}\,|\delta\,]t\}$ и для промежутка $0\le t\le\tau$ будет выполняться утверждение леммы 2.

Теорема. Пусть матрица $\overline{A}$ асимптотически устойчивая, т.е. $\mathrm{Re}\,\lambda_i(\overline{A})<0$, $i=\overline{1,n}$. Тогда при $\tau<\tau_0$, где

$$\tau_0=\frac{2(1-\xi)\lambda_{\max}(H)}{\xi[2\,|\,\overline{A}\,|\,\lambda_{\max}(H)+\xi\lambda_{\min}(C)\sqrt{\varphi(H)}]\sqrt{\varphi(H)}}, \tag{26}$$

будет асимптотически устойчивым и положение равновесия $y(t)\equiv 0$. Причем «гарантированной» областью асимптотической устойчивости будет шар

$$U_{\delta}(0)=\{y\in R^n : |\,y\,|<\delta\},\ \ \delta\exp(\,|\,B\,|\delta\tau) < \frac{\xi\lambda_{\min}(C)}{2|H|\,|\,B\,|\sqrt{\varphi(H)}}\exp(-|\,\overline{A}\,|\tau). \tag{27}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное решение $y(t)$ системы (22), находящееся при $-\tau \le t \le 0$ в δ-окрестности нуля, т.е. $y(t) \in U_\delta(0)$, $-\tau \le t \le 0$. Тогда, как следует из неравенства (25) леммы 2, при $0 \le t \le \tau$ решение не выйдет из ε-окрестности нуля $U_\varepsilon(0)$, где $\varepsilon = \delta \exp\{[|\overline{A}| + |B|\delta]\tau\}$, и тем более будет находиться внутри области V^α, содержащейся внутри поверхности уровня функции Ляпунова ∂V^α, $\alpha = \varepsilon\lambda_{\max}(H)$, а область V^α будет содержаться внутри шара $U_\Delta(0)$,

$$\Delta = \delta \exp\{[|\overline{A}| + |B|\delta]\tau\}\sqrt{\varphi(H)}, \quad \varphi(H) = \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}.$$

Выберем величину $\delta > 0$ таким образом, чтобы

$$\Delta \le \frac{\xi\lambda_{\min}(C)}{2|H||B|}, \quad 0 < \xi < 1. \tag{28}$$

Для этого надо положить

$$\delta \exp(|B|\delta\tau) < \frac{\xi\lambda_{\min}(C)}{2|H||B|\sqrt{\varphi(H)}} \exp(-|\overline{A}|\tau).$$

Вычислим полную производную функции Ляпунова $V(y) = y^{\mathrm{T}} H y$ вдоль решений $y(t)$ системы (22), начинающихся в δ-окрестности $U_\delta(0)$ начала координат. Она имеет вид

$$\frac{d}{dt}V(y(t)) = \dot{y}^{\mathrm{T}}(t)Hy(t) + y^{\mathrm{T}}(t)Hy(t) = [\overline{A}y(t) - Y^{\mathrm{T}}(t-\tau)By(t)]^{\mathrm{T}} Hy(t) +$$
$$+ y^{\mathrm{T}}(t)H[\overline{A}y(t) - Y^{\mathrm{T}}(t-\tau)By(t)] =$$
$$= y^{\mathrm{T}}(t)[\overline{A}^{\mathrm{T}}H + H\overline{A}]y(t) - y^{\mathrm{T}}(t)[B^{\mathrm{T}}Y(t-\tau)H + HY^{\mathrm{T}}(t-\tau)B]y(t).$$

В результате операций сложения и вычитания получим следующее:

$$\frac{d}{dt}V(y(t)) = -y^{\mathrm{T}}(t)Cy^{\mathrm{T}}(t) - y^{\mathrm{T}}(t)[B^{\mathrm{T}}Y(t)H + HY^{\mathrm{T}}(t)B]y(t) +$$
$$- y^{\mathrm{T}}(t)[B^{\mathrm{T}}(Y(t-\tau) - Y(t))H + H(Y(t-\tau) - Y(t))^{\mathrm{T}}B]y(t).$$

Отсюда имеем

$$\frac{d}{dt}V(y(t)) < -\lambda_{\min}(C)|y(t)|^2 + 2|H||B||y(t)|^3 + 2|H||B||y(t)|^2|y(t) - y(t-\tau)|$$

или

$$\frac{d}{dt}V(y(t)) < -\{\lambda_{\min}(C) - 2|H||B|\,||y(t)| - 2|H||B||y(t) - y(t-\tau)|\,|\}|y(t)|^2. \tag{29}$$

Получим условия, при которых полная производная является отрицательно-определенной. Для этого достаточно, чтобы

$$\lambda_{\min}(C) - 2|H||B||y(t)| + 2|H||B||y(t) - y(t-\tau)| > 0.$$

При этих условиях выполняется (26).

Из доказательства теоремы следует, что произвольное решение $y(t)$, начинающееся в $U_\delta(0)$ при $-\tau \le t \le \tau$, будет находиться в области V^α, $\alpha = \lambda_{\max}(H)$, $\alpha = \delta\lambda_{\max}(H)\exp\{[|\overline{A}| + |B|\delta]\tau\}$. Покажем, что это будет выполняться и при $t > \tau$. Пусть, от противного, это не так и при некотором $T > \tau$ происходит первый выход на границу ∂V^α, т.е. $y(T) \in \partial V^\alpha$, $y(s) \in V^\alpha$, $-\tau \le s < T$.

Тогда, используя неравенство (24) леммы 1, выражение (29) для полной производной функции Ляпунова можно переписать следующим образом:

 ISSN 0572-2691

$$\frac{d}{dt}V(y(T)) < -\{\lambda_{\min}(C) - 2|H||B|||y(T)| - 2|H||B||y(T) - y(T-\tau)||\}|y(T)|^2 \le$$

$$< -\{\lambda_{\min}(C)| - 2|H||B||y(T)| - 2|H||B|[|\overline{A}| + |B|\sqrt{\varphi(H)}|y(T)|]\sqrt{\varphi(H)}||y(T)|\tau\}|y(T)|^2.$$

Поскольку решение $y(t)$ находится в шаре $U_\Delta(0)$, то, используя (28), получаем

$$\frac{d}{dt}V(y(T)) < -\left\{(1-\xi)\lambda_{\min}(C) - \xi\lambda_{\min}(C)\left[|\overline{A}| + \frac{\xi\lambda_{\min}(C)\sqrt{\varphi(H)}}{2|H|}\right]\sqrt{\varphi(H)}\tau\right\}|y(T)|^2.$$

Таким образом, при $\tau < \tau_0$, где

$$\tau_0 = \frac{(1-\xi)}{\xi\left[|\overline{A}| + \frac{\xi\lambda_{\min}(C)\sqrt{\varphi(H)}}{2|H|}\right]\sqrt{\varphi(H)}},$$

полная производная функции Ляпунова в момент $t = T$ выхода на границу ∂V^α будет отрицательно-определенной, что противоречит предположению о выходе из области V^α. Таким образом, нулевое решение $y(t) \equiv 0$ асимптотически устойчиво, а «гарантированной» областью устойчивости является шар $U_\delta(0)$.

І.А. Джалладова, Д.Я. Хусаінов

КВАДРАТИЧНІ СИСТЕМИ З ЗАПІЗНЮВАННЯМ

Розглянуто системи нелінійних диференціальних рівнянь зі сталим запізнюванням. Досліджено нелінійність квадратичного виду. Системи рівнянь записано у спеціальному уніфікованому векторно-матричному вигляді. Досліджується стійкість стаціонарного положення рівноважного стану, який знаходиться в першому квадранті координатної системи. Апаратом дослідження обрано другий метод Ляпунова виду квадратичних функцій з умовою Разуміхіна.

I.A. Dzhalladova, D.Ya. Khusainov

QUADRATIC SYSTEMS WITH DELAY

The systems of the nonlinear differential equations with constant delay are considered. Nonlinearity of a square-law type is studied. Systems are recorded in the special unified vector-matrix type. The stability of stationary position of equilibrium state which is in the first coordinate quarter is investigated. Lyapunov's second method of a type of square-law functions with B.S. Razumikhin's condition has been chosen as techniques of research.

1. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. — М. : Наука, 1976. — 287 с.
2. *Смит Дж.* Модели в экологии. — М. : Мир, 1976. — 286 с.
3. *Колмановский В.Б.* Уравнения с последействием и математическое моделирование // Соросовский образовательный журнал. — 1996. — № 4. — С. 122–127.
4. *Хусаінов Д.Я., Джалладова І.А., Шатирко О.А.* Оцінка області стійкості диференціальної системи з квадратичною правою частиною // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. — 2011. — №. 3. — С. 227–230.
5. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М. : Наука, 1967. — 472 с.
6. *Эльсгольц Л.Э.* Введение в дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. — М. : Наука, 1970. — 240 с.
7. *Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. — М. : Наука, 1981. — 448 с.
8. *Хусаинов Д.Я., Шатырко А.В.* Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. — Киев : Изд-во Киев. ун-та, 1997. — 236 с.
9. *Чикрий А.А.* Конфликтно-управляемые процессы. — Киев : Наук. думка, 1992. — 384 с.

Получено 26.04.2012

Статья представлена к публикации членом редколлегии чл.-корр. НАН Украины А.А. Чикрием.