УДК 62-501.5

С.М. Онищенко

О СТАБИЛИЗИРУЕМОСТИ НЕУПРАВЛЯЕМЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Введение. Следует отметить существенное различие между такими двумя свойствами динамических систем, как управляемость и стабилизируемость.

Система называется вполне управляемой, если ее можно перевести из некоторого начального состояния в желаемое (например, нулевое) за конечное время [1]. Система стабилизируема, если она переводится в это же состояние асимптотически за бесконечное время [2].

Подобный подход с точки зрения теории управления позволяет неформально объяснить, почему неуправляемая система может быть стабилизируемой: то, чего нельзя добиться на конечном интервале времени, иногда удается обеспечить на сколь угодно большом его промежутке.

Гораздо сложнее оказывается аналитический анализ этой проблемы [3]. Конечно, если представляет интерес только характер поведения траекторий системы, то никакой разницы между асимптотически устойчивой и стабилизированной системой не будет: и в том, и в другом случае траектории системы, выходя из некоторой начальной области, будут асимптотически стремиться, в частности, к нулю. Различия будут лишь в способах обеспечения такого их поведения. Для устойчивых систем это достигается наложением условий (обычно в виде неравенств) на их свободные параметры (как правило, немногочисленные) и на компоненты функций Ляпунова. Этот путь можно назвать пассивным. Для стабилизируемых систем устойчивость обеспечивается активным вмешательством в их структуру и динамику с помощью принудительного изменения их свободных параметров (компонент их матриц управления) по синтезируемым законам. При этом пассивно устойчивые системы собственно и называют устойчивыми, а активно устойчивые — стабилизируемыми. Поэтому понятию стабилизируемости можно дать еще и такое определение: стабилизируемость системы — это возможность активного обеспечения ее свойства устойчивости с помощью синтезируемого тем или иным методом управления.

Подобная интерпретация позволяет объединить устойчивость, стабилизируемость и управляемость в единую группу специфических свойств системы. Но если взаимоотношение устойчивости и стабилизируемости как пассивного, так и активного проявления собственно устойчивости системы достаточно очевидно, то их связь с управляемостью все же нуждается в специальном анализе.

Так, в частности, априори неустойчивую систему можно попытаться тем или иным управлением превратить в устойчивую через ее стабилизируемость.

Утверждение 1. Стабилизируемость систем никак не влияет на их управляемость, поскольку управлять можно как устойчивыми, так и неустойчивыми системами, поэтому для управления стабилизируемость не нужна.

Иное дело — влияние управляемости и особенно неуправляемости системы на ее стабилизируемость. Эта проблема еще далека от завершения и требует отдельного рассмотрения.

Анализ линейных систем. Он конструктивен по сравнению с анализом их нелинейных вариантов [4], во-первых, в силу следующего утверждения.

Утверждение 2. Для стабилизации линейных систем любого порядка (стационарных и нестационарных) достаточно их управляемости [5].

Во-вторых, потому что на основе анализа линейных систем удается выявить некоторые общие закономерности возможной стабилизации неуправляемых систем.

ISSN 0572-2691

Не оказывая существенного влияния на общность рассматриваемой проблемы, ограничимся линейной стационарной системой

$$\dot{x} = Ax + Bu, \; x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

с вектором состояния $x \in \mathbf{\Omega} \subset \mathbf{R}_n$ в области определения $\mathbf{\Omega}$ и заданными матрицами коэффициентов $A \in \mathbf{R}_{n\times n}, B \in \mathbf{R}_{n\times m}, m \le n, x \in \mathbf{\Omega} \subset \mathbf{R}_n$.

Система (1) замкнута аддитивным управлением по обратной связи

$$u = -C_x \in \mathbf{U} \subset \mathbf{R}_m \tag{2}$$

из некоторого выпуклого множества **U**, принадлежащего пространству $\mathbf{R}_m$, с искомой матрицей усиления $C \in \mathbf{R}_{m\times n}$; точкой в (1) обозначена операция дифференцирования по времени $t \in \mathbf{T} = [0, \infty) \subset \mathbf{R}_1^+$.

Кроме системы (1) в дальнейшем понадобится соответствующая ей разомкнутая система

$$\dot{x} = Ax, \; x(t_0) = x_0. \tag{3}$$

Как уже отмечалось, для стабилизируемости систем типа (1) достаточно их управляемости, которая согласно известной теореме Калмана [6] выражается через ранг матрицы управляемости $M \in \mathbf{R}_{n\times nm}$ в виде

$$\operatorname{rank} M = \operatorname{rank}\,[B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B] = n \tag{4}$$

и определяется структурами двух матриц из (1): A и B. При этом необходимое и достаточное условие управляемости (4) выступает в качестве только достаточного условия стабилизируемости системы (1). Но стабилизируемость линейных систем можно определять не только по их управляемости, но и, воспользовавшись вторым методом Ляпунова, через две положительно-определенные квадратичные формы:

$$V(x,t) = x^{\mathrm{T}} D(t) x, \; 0 < \alpha_1 x^{\mathrm{T}} x \le V(x,t) \le \alpha_2 x^{\mathrm{T}} x, \tag{5}$$

$$W(x,t) = x^{\mathrm{T}} Q(t) x, \; 0 < \alpha_3 x^{\mathrm{T}} x \le W(x,t) \tag{5$'$}$$

в виде дифференциального уравнения

$$\dot{V} = -W < 0, \; \dot{V} + W = 0 \tag{6}$$

или (в случае усиленной устойчивости [7] системы (1)) дифференциального неравенства

$$\dot{V} + W < 0. \tag{7}$$

Здесь V согласно (5) допускает бесконечно малый высший предел, а ее полная производная $\dot{V}$ по времени t, вычисляемая на любых траекториях $x = x(t_0, x_0, t)$ системы (1), удовлетворяет условиям (6) или (7), причем в соотношениях (5), (5$'$) $D, Q : \{D(t), Q(t) \mid D^{\mathrm{T}} = D, Q^{\mathrm{T}} = Q : \mathbf{T} \to \mathbf{R}_{n\times n}; D > 0, Q > 0 \; \forall t \in \mathbf{T}\}, \exists\alpha : \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \mid \alpha_s = \mathrm{const} > 0 : \alpha_s \in \mathbf{R}_1^+, s = \overline{1,3}\}$.

При таком подходе условия стабилизируемости (6), (7) системы (1), как основанные на втором методе Ляпунова, оказываются тоже только достаточными (как и условия стабилизируемости (4)) и сводятся к отрицательной определенности матрицы [8]

$$-F^{\mathrm{T}} Q F = F^{\mathrm{T}} (\dot{D} + DA + A^{\mathrm{T}} D) F < 0 \tag{8}$$

в случае (6) или соответственно

$$F^{\mathrm{T}}(\dot{D} + DA + A^{\mathrm{T}} D + Q)F < 0 \tag{9}$$

для условия (7), где матрица F определяется как решение матричного уравнения

$$B^{\mathrm{T}} DF = 0 \tag{10}$$

и тем самым неявно зависит от матрицы B из (1).

Критерии стабилизируемости (8)–(10) в отличие от условия (4) зависят от трех матриц (A, B и D согласно (8), (10)) или от четырех матриц (A, B, D, Q в (9), (10)) и обусловливаются не только структурой самой системы (1) (ее собственными матрицами A, B), но и структурами матриц коэффициентов D, Q применяемых дополнительно квадратичных форм V и W из (5), (5').

Поэтому если, исходя из критерия (4), можно говорить о стабилизируемости собственно системы (1), то выполнение критериев (8), (10) или (9), (10) может свидетельствовать о стабилизируемости этой системы лишь относительно определенной квадратичной формы V в (8), (10) или соответственно двух квадратичных форм V и W в (9), (10). При этом нестабилизируемость системы (1) с какими-то одними квадратичными формами еще не означает, что с другими квадратичными формами она не окажется стабилизируемой (причем одним и тем же управлением (2)).

Пример 1. Рассмотрим систему второго порядка

$$\dot{x}_1 = x_1 + 5x_2 + u, \ \ \dot{x}_2 = 2x_1 + 4x_2 + u \tag{11}$$

вида (1) со скалярным управлением

$$u = -c^{\mathrm{T}} x, \ \ c^{\mathrm{T}} = [c_1, c_2], \tag{12}$$

из (2) и матрицами коэффициентов

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \ \ b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Система (11) неуправляема, поскольку ранг ее матрицы управляемости M согласно (4), (13)

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = 1 \tag{14}$$

меньше ее размерности $n = 2$.

Матрица A в (13) имеет одно отрицательное и одно положительное собственное число

$$\lambda_1 = -1 < 0, \ \ \lambda_2 = 6 > 0, \tag{15}$$

но характеристическое уравнение матрицы коэффициентов $A - bc^{\mathrm{T}}$ системы (11), замкнутой управлением (12), будет иметь вид

$$\det\,(A - bc^{\mathrm{T}} - I_2\lambda) = \lambda^2 - (5 - c_1 - c_2)\lambda - (6 - c_1 - c_2) = 0$$

(здесь I_2 — единичная матрица второго порядка), а его корни определятся выражениями

$$\lambda_1 = -1 < 0, \ \ \lambda_2 = 6 - c_1 - c_2 > 0. \tag{16}$$

В рассматриваемом случае отрицательный корень λ_1 не затрагивается управлением, а чтобы положительный корень λ_2 из (15) сделать отрицательным,

ISSN 0572-2691

достаточно в выражении (16) сохранить одну ненулевую компоненту $c_i, i = 1,2$, из (12). Тогда любое из управлений

$$u = u_1 = -c_* x_1, \; u = u_2 = -c_* x_2 \tag{17}$$

превратит положительный корень $\lambda_2 = 6$ в отрицательный $\lambda_2 = -(c_* - 6) < 0$ при

$$c_* > 6, \tag{18}$$

а условия модальной стабилизируемости [9, 10] системы (11), имеющие согласно (16), (17) вид

$$\lambda_1 = -1 < 0, \; \lambda_2 = -(c_* - 6) < 0, \tag{19}$$

будут заключаться в следующем:

- собственное число λ_1 матрицы коэффициентов A системы (11), на которое в случае неуправляемости системы нельзя воздействовать управлением, должно быть априори отрицательным;
- чтобы стабилизировать систему (11) (превратить ее из неустойчивой в асимптотически устойчивую), можно воздействовать на нее простейшим управлением (17) по одной (любой) из координат с коэффициентом усиления c_*, удовлетворяющим неравенству (18).

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = 3x_1 - 5x_2 + u, \; \dot{x}_2 = 2x_1 - 4x_2 + u \tag{20}$$

с матрицами коэффициентов

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{21}$$

и рангом матрицы управляемости

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = 1$$

подобно (14), меньшим ее размерности.

Матрица A как и в случае (14), имеет одно отрицательное и одно положительное собственное значение

$$\lambda_1 = -2 < 0, \; \lambda_2 = 1 > 0, \tag{22}$$

а ее характеристическое уравнение в замкнутом состоянии с учетом (12) приобретает вид

$$\lambda^2 + (1 + c_1 + c_2)\lambda - (2 + c_1 + c_2) = 0,$$

и его корни определяются выражениями

$$\lambda_1 = -2 - (c_1 + c_2) < 0, \; \lambda_2 = 1 > 0. \tag{23}$$

Здесь, разумеется, никаким управлением не удастся стабилизировать систему (20), поскольку положительное собственное число ее матрицы коэффициентов недоступно управлению и остается положительным и в замкнутом варианте системы. Воздействовать же управлением на отрицательное собственное значение λ_1 матрицы A в этой ситуации бессмысленно.

Пример 3. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = 5x_1 + x_2 + u, \; \dot{x}_2 = 2x_1 + 4x_2 + u, \tag{24}$$

аналогичную (11), но с переставленными элементами первой строки матрицы A в (13), а именно

$$A=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}. \tag{25}$$

Нетрудно заметить, что матрица управляемости системы (24) будет полностью повторять ситуацию (14), так что система (24) тоже оказывается неуправляемой. Но в отличие от (13) ее матрица коэффициентов A из (25) имеет два положительных собственных значения:

$$\lambda_1 = 3 > 0,\ \lambda_2 = 6 > 0. \tag{26}$$

Замкнув систему (24) управлением (12), для ее матрицы коэффициентов $A - bc^{\mathrm{T}}$ получим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - (9 - c_1 - c_2)\lambda + 3(6 - c_1 - c_2) = 0,$$

корни которого будут иметь вид

$$\lambda_1 = 3 > 0,\ \lambda_2 = 3 - c_1 - c_2 > 0. \tag{27}$$

По аналогии с (16) выражения (27) можно рассматривать как условия стабилизируемости системы (24). Но если корень λ_2 в (27) с помощью любого из двух управлений (17) можно сделать отрицательным при условии $c_* > 3$, то корень λ_1 недоступен управлению и остается положительным, поэтому система (24) нестабилизируема.

Пример 4. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = 5x_1 + x_2 + u,\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 4x_2 + u \tag{28}$$

с матрицами коэффициентов

$$A=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}. \tag{29}$$

Она отличается от системы (24) лишь вектором b, но благодаря этому ранг ее матрицы управляемости определяется выражением

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix} = 2 = n.$$

и равен ее размерности, так что система (28) в отличие от (24) оказывается управляемой.

Разумеется, собственные числа ее матрицы коэффициентов A в разомкнутом состоянии по-прежнему задаются значениями (26), но корни характеристического уравнения

$$\det\,(A - bc^{\mathrm{T}} - I_2\lambda) = \lambda^2 - (9 - c_2)\lambda + (18 + c_1 - 5c_2) = 0$$

ее замкнутой матрицы коэффициентов определяются выражением

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(c_2 - 9) \pm i\sqrt{4c_1 - (c_2 + 1)^2 - 8}}{2} \tag{30}$$

и при условии

$$c_1 > 2 + \left(\frac{c_2 + 1}{2}\right)^2,\ c_2 > 9, \tag{31}$$

ISSN 0572-2691

накладываемом на коэффициенты усиления c_1, c_2 в управлении (12), могут быть сделаны комплексно-сопряженными с отрицательными вещественными частями.

В этом случае система (28), (12) при выполнении условий стабилизируемости (31) превращается из неустойчивой в асимптотически устойчивую, но для этого, во-первых, в отличие от системы (11) приходится задействовать полное управление (12) по обеим координатам x_1, x_2 и, во-вторых, в отличие от системы (24) система (28) должна быть управляемой.

Таким образом, можно утверждать, что управляемость позволяет управлению влиять на все собственные числа матрицы коэффициентов замкнутой линейной системы (пример 4), тогда как в неуправляемой системе часть этих собственных чисел оказывается недоступной управлению (примеры 1–3). Именно поэтому управляемость линейных систем гарантирует их стабилизируемость. Неуправляемые же системы можно стабилизировать, когда недоступные управлению собственные числа их замкнутых матриц коэффициентов будут априори иметь отрицательные вещественные части или сами будут отрицательными (пример 1). Если же это условие не выполняется (примеры 2, 3), то неуправляемая система не может быть стабилизирована никаким управлением. К сожалению, по внешнему виду (по явным признакам) неуправляемой системы нельзя сделать вывод о ее стабилизируемости без дополнительных исследований (как правило, это выясняется лишь в процессе решения задачи стабилизации). Возможно, одним из приемлемых путей разрешения этой проблемы может оказаться применение процедуры декомпозиции исходной системы [11] — выделение в ней управляемой и неуправляемой подсистем с дальнейшим исследованием устойчивости ее неуправляемой части. Разумеется, этот подход может оказаться тем конструктивнее, чем полнее будет декомпозиция системы (в идеале управляемая и неуправляемая подсистемы должны бытьавтономными, иначе необходимо дополнительное исследование степени их остаточной зависимости, если декомпозиция неполная).

Применительно ко второму методу Ляпунова спектральный анализ заменяется соответствующими утверждениями относительно структур (и их взаимосвязи) матриц коэффициентов разомкнутой системы и ее квадратичной формы (разумеется, этот подход справедлив также для линейных нестационарных и нелинейных систем).

Альтернативный анализ управляемости линейных систем. Известна следующая теорема из [8].

Теорема. Чтобы система (3) могла быть α-стабилизированой относительно квадратичной формы (5), необходимо, чтобы число управлений m в системе (1) и число μ_α неположительных квадратов [12] в разложении квадратичной формы

$$R_\alpha(x) = -\dot{V}(x) - 2\alpha V(x), \tag{32}$$

вычисляемой на траекториях разомкнутой системы (3), были связаны неравенством

$$m \geq \mu_\alpha. \tag{33}$$

Эта теорема, доказанная в [8] для частного случая $W(x) = 2\alpha V(x)$, без труда обобщается [4] как для квадратичной формы W из (5′), так и, разумеется, на случай $W = 0$, когда квадратичная форма R_α в (32) принимает вид

$$R_0(x, t) = -\dot{V}(x, t), \tag{34}$$

а условие (33) — соответственно

$$m \geq \mu_0. \tag{35}$$

Пример 5. Рассмотрим систему (28) с матрицами коэффициентов (29), замкнутую управлением (12) с параметрами усиления

$$c_1 = 40, \ \ c_2 = 11, \tag{36}$$

подчиняющимися условиям (31).

В этом случае матрица коэффициентов замкнутой системы

$$A - bc^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -38 & -7 \end{bmatrix} \tag{37}$$

согласно (30) и с учетом (36) будет иметь пару комплексно-сопряженных собственных чисел

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{2} \tag{38}$$

с отрицательными вещественными частями, так что по первому методу Ляпунова рассматриваемая система будет стабилизируемой.

Чтобы убедиться в этом с помощью второго метода Ляпунова, воспользуемся обратимостью теоремы об асимптотической устойчивости линейных стационарных систем [13] и по заданной матрице

$$Q = \begin{bmatrix} 56 & 10 \\ 10 & 2 \end{bmatrix} > 0 \tag{39}$$

получим из уравнения Ляпунова

$$D(A - bc^{\mathrm{T}}) + (A - bc^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} D = -Q \tag{40}$$

матрицу D. Будем иметь

$$D = \begin{bmatrix} 40 & 6 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} > 0. \tag{41}$$

В разомкнутом варианте (3) системы (28), (29) квадратичная форма

$$R_0(x) = -424x_1^2 - 192x_1x_2 - 20x_2^2,$$

построенная согласно (34) с использованием матрицы D из (41), приводится, например, методом Лагранжа [12] к алгебраической сумме двух квадратов:

$$R_0(x) = -\frac{1}{424}(53x_1 + 12x_2)^2 + \frac{92}{53}x_2^2, \tag{42}$$

из которых один положительный и один отрицательный. При этом количество отрицательных квадратов совпадает с размерностью управления $m = 1$ в системе (28), и поэтому она согласно указанной теореме [4, 8] действительно стабилизируется управлением (12)

$$u = -40x_1 - 11x_2 \tag{43}$$

при условии (36).

Для других положительно-определенных матриц $D > 0$, например, вида

$$I_2, \ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \tag{44}$$

квадратичные формы $R_0(x)$ приводятся к сумме двух отрицательных квадратов, когда их количество превышает размерность управления $m = 1$ и согласно этой же теореме рассматриваемая система не может быть стабилизирована никаким управлением (в том числе и (43), что вступает в явное противоречие с (38) и (42)).

ISSN 0572-2691

К аналогичному заключению приводит и использование матриц (44) в уравнении Ляпунова (40), когда в результате получаются знакопеременные матрицы Q соответственно в виде

$$\begin{bmatrix}-10 & 37\\ 37 & 14\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}66 & 77\\ 77 & 26\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}102 & 37\\ 37 & 10\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}104 & 26\\ 26 & 6\end{bmatrix},$$

с которыми не выполняется условие стабилизируемости (7), хотя исходная система согласно (38) стабилизируется управлением (43).

Разумеется, практически никакого противоречия здесь нет, поскольку все известные критерии стабилизируемости, так или иначе связанные с функциями Ляпунова, являются лишь достаточными и существенно зависят от удачного выбора этих функций.

Пример 6. Рассмотрим управляемый вариант системы (11)

$$\dot{x}_1 = x_1 + 5x_2,\ \ \dot{x}_2 = 2x_1 + 4x_2 + u \tag{45}$$

со скалярным управлением (12) и матрицами коэффициентов

$$A = \begin{bmatrix}1 & 5\\ 2 & 4\end{bmatrix},\ \ b = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}, \tag{46}$$

отличающимися от (13) лишь вектором b.

В отличие от (14) ранг матрицы управляемости системы (45) совпадает с ее размерностью, а собственные числа матрицы коэффициентов в разомкнутом состоянии по-прежнему равны величинам (15).

Применим к системе (45), (12) метод прямого жесткого синтеза (ПЖС) [14], для этого зададим матрицы D, Q квадратичных форм (5), (5′) в виде

$$D = \begin{bmatrix}1 & d\\ d & 2d\end{bmatrix} = \text{const} > 0,\ \ Q = 2\begin{bmatrix}q_1^2 & dq_1^2\\ dq_1^2 & d^2(q_1^2 + q_2^2)\end{bmatrix} > 0. \tag{47}$$

Будем строить управление (12), используя уравнение Ляпунова (40), которое предварительно подвергнем E-преобразованию матрицей [14]

$$E_2 = \begin{bmatrix}1 & -d\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \ E_2^{-1} = \begin{bmatrix}1 & d\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

В результате получим условия устойчивости замкнутой системы (45), (12):

$$\begin{gathered}2(1 + 5d - dc_1) = -2q_1^2,\\ 2d^2(4 - c_2) = -2d^2 q_2^2,\\ 5 + 3d + dc_2 = 0.\end{gathered}$$

Из первых двух соотношений определяются искомые параметры управления c_1, c_2 в виде

$$c_1 = d^{-1}(1 + 5d + q_1^2),\ \ c_2 = 4 + q_2^2,\ \ d \neq 0, \tag{48}$$

а третье (после исключения величины c_2 из (48)) превращается в условие стабилизируемости

$$5 + 7d + dq_2^2 = 0 \tag{49}$$

и позволяет идентифицировать параметр q_2^2, разумеется, лишь в случае

$$d = -d_* < 0,\ \ d_* > 0, \tag{50}$$

следующим образом:

$$q_2^2 = 5d_*^{-1} - 7 > 0 \tag{51}$$

$\forall d_*$ из диапазона

$$0 < d_* < \frac{5}{7}. \tag{52}$$

В результате компоненты управления (48) определятся выражениями

$$c_1 = 5 - d_*^{-1}(1 + q_1^2), \ c_2 = -3 + 5d_*^{-1} \tag{53}$$

и обеспечат исходной системе асимптотическую устойчивость в полном соответствии с уравнением Ляпунова (40), матрицами (47) вида

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -d_* \\ -d_* & 2d_*^2 \end{bmatrix} > 0, \ Q = 2\begin{bmatrix} q_1^2 & -d_* q_1^2 \\ -d_* q_1^2 & d_*^2(q_1^2 + 5d_*^{-1} - 7) \end{bmatrix} > 0 \tag{54}$$

и комплексно-сопряженными собственными числами с отрицательными вещественными частями

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(5 - 8d_*) \pm i\sqrt{20d_*(2 - q_1^2) - (5 - 2d_*)^2}}{2d_*} \tag{55}$$

замкнутой матрицы коэффициентов системы (45) при ограничениях на параметры управления в (53)

$$0 < d_* < \frac{5}{8}, \ q_1^2 < 2 - 1{,}25d_*(d_*^{-1} - 0{,}4)^2. \tag{56}$$

Далее откажемся от уравнения Ляпунова (40) и проигнорируем условие стабилизируемости (49).

Будем рассматривать управление (12), (48), построенное методом ПЖС, как трехпараметрическое семейство законов стабилизации, зависящее от трех произвольных параметров d, q_1^2, q_2^2. Для упрощения выражений (48) положим в них

$$d = 1. \tag{57}$$

В результате вместо (53) будем иметь

$$c_1 = 6 + q_1^2, \ c_2 = 4 + q_2^2 \ \ \forall q_1^2, q_2^2. \tag{58}$$

Конечно же, условие (57) противоречит (50), (52) и нарушает условие стабилизируемости (49), однако система (45), замкнутая управлением (12) с параметрами усиления (58), имеет матрицу коэффициентов

$$A - bc^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -4 - q_1^2 & -q_2^2 \end{bmatrix}, \tag{59}$$

собственные числа которой в отличие от (15) определяются соотношениями

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(q_2^2 - 1) \pm i\sqrt{80 + 20q_1^2 - (q_2^2 + 1)^2}}{2} \tag{60}$$

и оказываются подобно (55) тоже комплексно-сопряженными с отрицательными вещественными частями при условии

$$q_1^2 > \frac{(q_2^2 + 1)^2}{20} - 4 > 0, \ q_2^2 > 4\sqrt{5} - 1 > 1. \tag{61}$$

ISSN 0572-2691

Следовательно, управление (12), (58), построенное методом ПЖС, может обеспечить стабилизацию системы (45) и при явном нарушении условия стабилизируемости (49), которое в случае (57) принимает вид

$$12 + q_2^2 = 0$$

и не может быть реализовано никакими вещественными значениями q_2.

Уравнение Ляпунова (40) с матрицами

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} > 0, \ Q = 2\begin{bmatrix} q_1^2 & q_1^2 \\ q_1^2 & q_1^2 + q_2^2 \end{bmatrix} > 0$$

и $\forall q_1^2, q_2^2$ из (61), записанное для системы (45) с матрицей коэффициентов (59), при этом также не удовлетворяется, но по первому методу Ляпунова эта система согласно (60), (61) оказывается асимптотически устойчивой (стабилизированной).

Рассмотренный пример показывает, с одной стороны, обременительность условий стабилизируемости, которые существенно сужают множество законов управления (их однопараметрическое семейство (53), значительно уже двухпараметрического (58)), накладывают более жесткие условия (50)–(52), (56) на параметры системы по сравнению с (60). С другой стороны, убеждаемся в их необязательности (они ведь имеют лишь достаточный характер), когда управление (58) и без них обеспечивает стабилизацию системы (45).

Заключение. В результате проведенного анализа можно сделать следующие выводы.

- Стабилизируемость не влияет на управляемость системы, ибо она может трактоваться как активно обеспечиваемая устойчивость [4], а управлять можно как устойчивыми, так и неустойчивыми объектами.
- Управляемость в линейных системах является достаточным условием их стабилизируемости. В стационарном случае в замкнутом состоянии она позволяет управлять всеми модами матриц коэффициентов линейных систем (пример 4).
- В неуправляемых системах часть собственных чисел их матриц коэффициентов в замкнутом состоянии оказывается недоступной управлению (примеры 1–3), и для стабилизируемости систем эти собственные числа должны априори иметь отрицательные вещественные части или быть отрицательными (пример 1). Иначе неуправляемая система будет нестабилизируемой (примеры 2, 3). При этом следует заметить, что хотя для наглядности в работе приведены примеры не выше второго порядка, сформулированные выводы можно проиллюстрировать примерами любого порядка. Но, к сожалению, пока не существует критериев, позволяющих без решения задачи стабилизации первым методом Ляпунова с анализом аналитических выражений корней характеристического уравнения системы в замкнутом состоянии определять, доступны ли все эти ее неотрицательные корни (или в общем случае, корни с неотрицательными вещественными частями) воздействиям управления. Для систем достаточно большого порядка подобная проблема остается далекой от конструктивной реализации.
- В нестационарном случае управляемость линейных систем при удачном выборе функций Ляпунова, по-видимому, обеспечивает нужную для удовлетворения условиям стабилизируемости вида (8)–(10) структуру матриц коэффициентов этих систем в замкнутом состоянии. Но это утверждение нуждается в дополнительном исследовании [4].
- Для стабилизации систем необходимо, чтобы размерность управления m была не меньше количества неотрицательных квадратов в разложении полной производной по времени удачно выбранной функции Ляпунова на любых траекториях разомкнутой системы.

• Реализация условий стабилизируемости для линейных систем в методах их синтеза, основанных на прямом методе Ляпунова, приводит к неизбежному уменьшению множества синтезируемых управлений. Однако, поскольку второй метод Ляпунова является практически единственным конструктивным инструментом анализа стабилизируемости (устойчивости) систем (в частности, высокого порядка и, конечно же, нестационарных), с этим неудобством приходится мириться.

С.М. Онищенко

ПРО СТАБІЛІЗОВАНІСТЬ НЕКЕРОВАНИХ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

Аналізується зв'язок між некерованістю та стабілізованістю лінійних систем довільного порядку. Численні приклади ілюструють основні положення статті.

S.M. Onyshchenko

ON STABILIZABILITY OF NONCONTROLLED LINEAR SYSTEMS

Connection between noncontrollability and stabilizability of random order linear systems is analyzed. Basic concepts of the article are illustrated with many examples.

1. *Д'Анжело Г.* Линейные системы с переменными параметрами. Анализ и синтез. — М. : Машиностроение, 1974. — 288 с.
2. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. — М. : Высш. шк., 1989. — 447 с.
3. *Яковлев О.С.* Эргатические системы стабилизации // Технические эргатические системы / Под общ. ред. В.В. Павлова. — К. : Вища шк., 1977. — С. 178–259.
4. *Онищенко С.М.* Анализ условий управляемости и стабилизируемости нелинейных динамических систем // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2011. — № 3. — С. 13–24.
5. *Красовский Н.Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений // Дополнение VI к кн. Малкина А.Г. Теория устойчивости движения. — М. : Наука, 1966. — С. 475–514.
6. *Kalman R.E., Ho Y.C., Narenda K.S.* Controllability of linear dynamical systems // Contributions to Differential Equations. — 1962. — **1**, N 2. — P. 189–213.
7. *Онищенко С.М.* Прямой подход к синтезу нелинейных систем стабилизации: методы жесткого синтеза // Проблемы управления и информатики. — 2000. — № 2. — С. 5–12.
8. *Якубович Е.Д.* Экспоненциальная стабилизация линейных систем // Докл. АН СССР. — 1969. — **186**, № 1. — С. 47–49.
9. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. — М. : Наука, 1967. — 424 с.
10. *Онищенко С.М.* Модальный подход к синтезу нелинейных систем стабилизации // Проблемы управления и информатики. — 1996. — № 6. — С. 5–19.
11. *Мороз А.И.* Курс теории систем. — М. : Высш. шк., 1987. — 304 с.
12. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М. : Наука, 1967. — 576 с.
13. *Малкин А.Г.* Теория устойчивости движения. — М. : Наука, 1966. — 532 с.
14. *Онищенко С.М.* Прямой подход к синтезу нелинейных систем стабилизации: метод прямого жесткого синтеза // Проблемы управления и информатики. — 2000. — № 3. — С. 17–25.

Получено 27. 07. 2012