УДК 517.9;523.2

А.В. Кунцевич

ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА (ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ) СЕМЕЙСТВ АВТОНОМНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Введение

В последнее время проблема определения инвариантных множеств линейных и нелинейных непрерывных и дискретных динамических систем и их семейств как автономных, так и подверженных воздействию ограниченных возмущений, привлекает все большее внимание исследователей (см., например, [1–4], а также [5] — обзор, содержащий около ста публикаций, посвященных этой проблеме).

При определенных свойствах автономных нелинейных дискретных систем в них существуют специальные виды инвариантных множеств — предельные циклы (автоколебания). Актуальной остается проблема определения параметров этих автоколебаний, в том числе наибольшее отклонение от положения равновесия при движении системы по предельному циклу.

В статье на основе данных, полученных в работах, посвященных исследованию робастной устойчивости семейств нелинейных дискретных систем [6] и обобщению результатов из [7], предлагается конструктивный метод определения оценок сверху радиусов устойчивых предельных циклов семейств достаточно широкого класса автономных нелинейных дискретных систем.

1. Постановка задачи

Рассмотрим семейство систем

$$X_{n+1} = \Phi(X_n, L), \;\; n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где $X \in \mathbf{R}^m$, $\Phi(\cdot)$ — нелинейная однозначная вектор-функция, такая что $\Phi(0, L) = 0$, линейно зависящая от вектора параметров L, для которого задана его оценка

$$L \in \mathbf{L} = \underset{j=\overline{1;\, M}}{\mathrm{conv}} \{L_j\}. \tag{2}$$

Здесь L_j, $j = \overline{1; M}$, — j-я вершина многогранника $\mathbf{L}$, M — число его вершин.

Возможны две различные постановки задачи анализа предельных циклов семейства систем (1), (2).

В первой из них принимается, что по крайней мере для некоторых $L \in \mathbf{L}$ и при выполнении определенных условий в системах из семейства (1), (2) существуют устойчивые предельные циклы (автоколебания) и требуется определить оценки сверху радиусов всех возможных предельных циклов семейства систем (1), (2). Иными словами, необходимо определить оценку радиуса «огибающей» всех возможных предельных циклов.

В другой постановке задачи принимается, что соотношения (1), (2) таковы, что для всех $L \in \mathbf{L}$ во всех системах семейства (1), (2) существуют устойчивые предельные циклы и требуется найти оценку сверху радиуса, наибольшего из них.

Ниже рассмотрена задача анализа в ее первой постановке. Пусть свойства нелинейной функции $\Phi(X_n, L)$ таковы, что по крайней мере для некоторых $L \in \mathbf{L}$ и при определенных начальных условиях в некотором подмножестве семейства систем (1), (2) возникают устойчивые предельные циклы (автоколебания).

Условием существования предельного цикла при фиксированном значении $L \in \mathbf{L}$ является выполнение равенства

$$X_{n+N(L)} = \Phi(\underbrace{\Phi(\ldots, \Phi(X_n, L), L), L}_{N(L)-1}) = X_n. \tag{3}$$

Обозначим векторы $X_i(L)$, $i = \overline{1; N(L)}$, удовлетворяющие равенству (3), через $\overset{*}{X}_i(L)$. Тогда предельный цикл $\overset{*}{\mathbf{X}}(L)$ при фиксированном $L \in \mathbf{L}$ в системе (1) определяется как

$$\overset{*}{\mathbf{X}}(L) = \bigcup_{i=\overline{1; N(L)-1}} \overset{*}{X}_i(L). \tag{4}$$

Если задача нахождения векторов $\overset{*}{X}_i(L)$ и чисел $N(L)$, удовлетворяющих равенству (3), при фиксированном векторе $L \in \mathbf{L}$ решена, то по уравнению (1) определяются все $N-2$ вектора $\overset{*}{X}_i(L)$, $i = \overline{1; N-2}$, $\overset{*}{X}_{i+1}(L) = \Phi[\overset{*}{X}_i(L)]$, $i = \overline{1; N(L)-1}$, которые полностью определяют предельный цикл $\overset{*}{\mathbf{X}}(L)$ рассматриваемой системы в виде

$$\overset{*}{\mathbf{X}}(\mathbf{L}) = \bigcup_{L \in \mathbf{L}} \overset{*}{\mathbf{X}}(L). \tag{5}$$

Как отмечалось выше, в общем случае при некоторых значениях $L \in \mathbf{L}$ предельные циклы в соответствующих системах могут не существовать. В этих случаях множества $\overset{*}{\mathbf{X}}(\mathbf{L}) = \varnothing$.

В общем случае определение параметров предельного цикла — вектора $\overset{*}{X}_n$ и числа N, удовлетворяющих условию (3), — задача трудноразрешимая. Практический интерес представляет нахождение радиуса $\rho(\overset{*}{\mathbf{X}})$ множества $\overset{*}{\mathbf{X}}$, определяемого как

$$\rho(\overset{*}{\mathbf{X}}) = \max_{i=\overline{1; N}} \| \overset{*}{X}_i \|, \tag{6}$$

поскольку именно эта величина определяет наибольшее отклонение от положения равновесия — начала координат — при движении семейства систем (1), (2) по предельному циклу.

Так же, как и в [8], в дальнейшем будем рассматривать лишь выпуклую оболочку $\tilde{\mathbf{X}}(L)$ множества $\overset{*}{\mathbf{X}}(L)$

$$\tilde{\mathbf{X}}(L) = \operatorname*{conv}_{i=\overline{1; N(L)-1}} \{ \overset{*}{X}_i(L) \}. \tag{7}$$

Из (6), (7) следует, что $\rho[\tilde{\mathbf{X}}(L)] = \rho[\overset{*}{\mathbf{X}}(L)]$. Говоря в дальнейшем о предельных циклах, будем иметь в виду их выпуклые оболочки (7).

В общем случае даже при фиксированном значении вектора $L \in \mathbf{L}$ задача определения вектора $\overset{*}{X}_n(L)$ и числа $N(L)$, удовлетворяющих условию (3), не имеет точного решения. Поэтому ниже ограничимся определением лишь оценок сверху предельного цикла $\overset{*}{\mathbf{X}}$. Но прежде чем приступить к их определению, рассмотрим условия их существования.

Поведение семейства систем (1) будем анализировать лишь в некоторой интересующей нас ограниченной области $X \in \mathbf{X}^{\circ} = \{X : \| X \| \le \sigma\}$, что всегда имеет место в приложениях.

Пусть для вектора X_n задана его оценка

$$X_n \in \mathbf{X}_n, \tag{8}$$

где $\mathbf{X}_n$ — центрально-симметрическое ограниченное выпуклое множество.

Из (1), (2), (8) получаем

$$X_{n+1} \in \mathbf{X}_{n+1} = \bigcup_{L \in \mathbf{L}} \Phi(\mathbf{X}_n, L) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{X}_n, \mathbf{L}). \tag{9}$$

Введем скалярную характеристику множества $\mathbf{X}$ — его радиус $\rho(\mathbf{X})$, и эту величину примем в качестве функции Ляпунова. Норму вектора в определении (6) используем в виде

$$\| X \|_1 = \sum_{i=1}^{m} | x_i |. \tag{10}$$

Для удобства читателей приведем теорему работы [6] (см. также [7]), которая будет нужна нам в дальнейшем.

Теорема [6]. Если первая разность функции Ляпунова

$$\Delta v_n = v_{n+1} - v_n = \rho(\mathbf{\Phi}(\mathbf{X}_n, \mathbf{L})) - \rho(\mathbf{X}_n) < 0 \quad \forall n, \tag{11}$$

отрицательно-определенная, то тривиальное решение разностного включения (9) асимптотически устойчиво при $n \to \infty$.

Следствие. Из (11) следует, что преобразование $\Phi(\mathbf{X}_n, \mathbf{L})$ осуществляет сжатое отображение множества $\mathbf{X}_n$ во множество $\mathbf{X}_{n+1}$, т.е. имеет место включение

$$\mathbf{X}_{n+1} \subset \mathbf{X}_n. \tag{12}$$

Нетрудно показать, что для центрально-симметрических интервальных множеств $\mathbf{X}_n$ и $\mathbf{X}_{n+1}$ строгое включение (12) имеет место тогда и только тогда, когда по крайней мере одно из системы нестрогих неравенств

$$\overline{x}_{i,n+1} \le \overline{x}_{i,n}, \ i = \overline{1; m}, \ \underline{x}_{i,n+1} \ge \underline{x}_{i,n}, \ i = \overline{1; m}, \tag{13}$$

является строгим. При этом справедливо неравенство

$$\rho(\mathbf{X}_{n+1}) < \rho(\mathbf{X}_n). \tag{14}$$

Пусть свойства вектор-функции $\Phi(X, L)$ таковы, что в области

$$\tilde{\mathbf{X}} = \{X : \| X \| \le r\} \tag{15}$$

достаточные условия устойчивости тривиальных решений системы (9), т.е. неравенства (14), не выполняются. В общем случае из этого еще не следует, что семейство систем (1), (2) робастно неустойчиво, так как условия (14) лишь достаточные. Поэтому осуществим линеаризацию семейства систем (1), (2) в сколь угодно малой окрестности начала координат и проверим выполнение необходимых условий ее робастной устойчивости в каждой из вершин L_j, $j = \overline{1; M}$, множества $\mathbf{L}$. Если эти условия хотя бы в одной из вершин L_j не выполняются, то семейство систем (1), (2) робастно неустойчиво.

Условия существования в семействе нелинейных систем (1), (2) устойчивых предельных циклов устанавливает следующее утверждение.

Утверждение. Если свойства нелинейной вектор-функции $\Phi(X, L)$ таковы, что:

• $\Phi(X, L)$ при всех $L \in \mathbf{L}$ осуществляет сжатое отображение границы множества $\mathbf{X}^{\circ}$;

• начало координат для всех систем из семейства (1), (2) либо неустойчиво, либо асимптотически устойчиво, но лишь в некоторой окрестности начала координат;

• начальные условия X_0 задаются вне области устойчивости всех систем из семейства (1), (2)

тогда в этом семействе существуют устойчивые предельные циклы.

2. Определение интервальных оценок предельного цикла

Убедившись в том, что свойства нелинейной вектор-функции $\Phi(X, L)$ таковы, что в семействе систем (1), (2) в области $\mathbf{X}^{\circ}$ существуют устойчивые предельные циклы, перейдем к определению их оценок сверху.

Приняв, что $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n = \overset{*}{\mathbf{X}}$, из (1), (2) получим соотношение

$$\Phi(\overset{*}{\mathbf{X}}, L) = \overset{*}{\mathbf{X}}, \tag{16}$$

определяющее инвариантное множество (предельный цикл) семейства систем (1), (2).

При столь общих предположениях о свойствах функции $\Phi(\mathbf{X}, L)$, которые были сделаны выше, определение множества $\overset{*}{\mathbf{X}}$ из равенства (16) является неразрешимой задачей.

Ограничимся определением интервальной оценки множества $\Phi(\mathbf{X}, L)$ и рассмотрим сначала часто встречающийся в задачах анализа и приложениях класс нелинейных вектор-функций $\Phi(X, L)$ в уравнении (1), когда эта функция имеет линейную часть и нелинейную со скалярной нелинейной функцией

$$X_{n+1} = \Phi(X_n, L) = \mathrm{A}(L)X_n + f(X_n)\mathrm{B}, \tag{17}$$

где $\mathrm{A}(L)$ — матрица $(m \times m)$, $\mathrm{B}^{\mathrm{T}} = (0, 0, \ldots, 1)$, $f(X_n)$ — однозначная непрерывная функция, такая что $f(0) = 0$. Для строк $A_i^{\mathrm{T}}(L)$, $i = \overline{1; m}$, матрицы $\mathrm{A}(L)$ заданы их оценки

$$A_i(L) \in \mathbf{A}_i = \underset{k=\overline{1;\, K_i}}{\mathrm{conv}} \{A_{i,k}\}, \; i = \overline{1; m}. \tag{18}$$

Здесь A_{ik} — k-я вершина множества $\mathbf{A}_i$.

Пусть для вектора X_n задана его центрально-симметрическая интервальная оценка $X_n \in \mathbf{X}_n$. Определение точных границ $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{X}_n, \mathbf{L})$ требует больших вычислительных затрат. Поэтому целесообразно ограничиться лишь определением оценки сверху множества $\mathbf{X}_{n+1}$ с помощью покоординатного вычисления интервальной оценки $\overline{\mathbf{X}}_{n+1}$ минимального объема [8]. Так как при этом произвольное множество $\mathbf{\Phi}(\mathbf{X}_n, \mathbf{L})$ аппроксимируется интервальным, то естественным является выбор оценки $\mathbf{X}_n$ в виде центрально-симметрического интервального множества

$$X_n \in \overline{\mathbf{X}}_n = \{X_n : \underline{x}_{i,n} \le x_{i,n} \le \overline{x}_{i,n};\, i = \overline{1; m}\}, \;\; \underline{x}_{i,n} = -\overline{x}_{i,n}, \;\; i = \overline{1; m}. \tag{19}$$

Выполнив проверку условий существования в семействе систем (17), (18) устойчивого предельного цикла, перейдем к определению его интервальной оценки.

Аппроксимируем множество $\mathbf{\Phi}(\mathbf{X}_n, \mathbf{L})$ интервальным множеством минимального объема

$$\overline{\mathbf{X}}_{n+1} = \overline{\mathbf{\Phi}}(\overline{\mathbf{X}}_n, \mathbf{L}), \tag{20}$$

где

$$\overline{\mathbf{X}}_{n+1} = \overline{\mathbf{x}}_{1,n+1} \times \overline{\mathbf{x}}_{2,n+1} \times \ldots \times \overline{\mathbf{x}}_{m,n+1}, \tag{21}$$

ISSN 0572-2691

$$\overline{\mathbf{x}}_{i,n+1} = \{x_i : \underline{x}_{i,n+1} \le x_{i,n+1} \le \overline{x}_{i,n+1}\}, \ i = \overline{1; m-1}, \tag{22}$$

$$\overline{\mathbf{x}}_{m,n+1} = \{x_m : \underline{x}_{m,n+1} \le x_{m,n+1} \le \overline{x}_{m,n+1}\}, \tag{23}$$

$$\underline{x}_{i,n+1} = \min_{\substack{X_n \in \mathbf{X}_n \\ A_i^{\mathrm{T}}(L) \in \mathbf{A}_i}} \{A_i^{\mathrm{T}}(L) X_n\}; \ \overline{x}_{i,n+1} = \max_{\substack{X_n \in \mathbf{X}_n \\ A_i^{\mathrm{T}}(L) \in \mathbf{A}_i}} \{A_i^{\mathrm{T}}(L) X_n\}, \ i = \overline{1; m-1}, \tag{24}$$

$$\underline{x}_{m,n+1} = \min_{\substack{X_n \in \mathbf{X}_n \\ A_m^{\mathrm{T}}(L) \in \mathbf{A}_m}} \{A_m^{\mathrm{T}}(L) X_n + f(X_n)\}; \ \overline{x}_{m,n+1} = \max_{\substack{X_n \in \mathbf{X}_n \\ A_m^{\mathrm{T}}(L) \in \mathbf{A}_m}} \{A_m^{\mathrm{T}}(L) X_n + f(X_n)\}. \tag{25}$$

Замечание. Из (22)–(25) следует, что $\overline{\mathbf{X}}$ является интервальной оценкой сверху всех возможных предельных циклов семейства систем (1), (2), т.е. своего рода их интервальной «огибающей».

В общем случае определение решения $\underline{x}_{i,n+1}$ и $\overline{x}_{i,n+1}$, $i = \overline{1; m}$, задач (24) нетривиально и связано с отысканием глобальных экстремумов на заданных множествах, если только не определены заранее свойства нелинейных функций, обеспечивающих совпадение глобального и локального экстремумов. Поэтому рассмотрим случай, когда функции $\phi_i(X)$, $i = \overline{1; m}$, одноэкстремальные.

Так как функции $\phi_i(X, L_i)$, $i = \overline{1; m-1}$, билинейные, то их экстремумы принадлежат вершинам многогранников $\mathbf{X}_n$ и $\mathbf{L}_i$. Поэтому задачи (24) сводятся к комбинаторным задачам, решения которых, принимая во внимание их невысокую размерность, найдем прямым перебором всех вариантов.

Поскольку функция $\phi_m(X, L)$ линейна по параметру L, то ее экстремумы при значениях параметров, соответствующих вершинам многогранника $\mathbf{A}_m$, найдем с помощью стандартных пакетов оптимизации.

Определив решения задач (24), (25), из выражений (21)–(23) найдем множество $\overline{\mathbf{X}}_{n+1}$.

Примем, что $\overline{\mathbf{X}}_{n+1} = \overline{\mathbf{X}}_n = \overline{\mathbf{X}}$, тогда из (20) получим равенство

$$\overline{\mathbf{\Phi}}(\overline{\mathbf{X}}, \mathbf{L}) = \overline{\mathbf{X}}, \tag{26}$$

определяющее оценку сверху предельного цикла семейства систем (17), (18).

Из равенства множеств следует равенство их радиусов: $\rho(\overline{\mathbf{\Phi}}(\overline{\mathbf{X}}, \mathbf{L})) = \rho(\overline{\mathbf{X}})$.

Для определения радиуса $\rho(\overline{\mathbf{X}})$, как и в [8], воспользуемся итерационной процедурой. На первом шаге итерации примем $\overline{\mathbf{X}}_1$ в виде m-мерного куба с центром в начале координат со сторонами равными единице, т.е. $\rho_i(\overline{\mathbf{x}}_{i,1}) = 1$, $i = \overline{1; m}$. Далее определим $\overline{\mathbf{\Phi}}(\overline{\mathbf{X}}_1)$ и найдем величины $\rho_i(\overline{\mathbf{\Phi}}(\overline{\mathbf{x}}_1, \mathbf{L}))$, $i = \overline{1; m}$, и $\Delta\rho_i = \rho_i(\overline{\mathbf{\Phi}}(\overline{\mathbf{x}}_1, \mathbf{L})) - \rho_i(\overline{\mathbf{x}}_1)$, $i = \overline{1; m}$. Затем действуем по правилу деления отрезков $\Delta\rho_i$ пополам и величины $\rho_{i,k}(\overline{\mathbf{x}}_k) = 1$, $i = \overline{1; m}$, изменяем по алгоритму

$$\rho_{i,k+1}(\overline{\mathbf{x}}_{k+1}) = \rho_{i,k}(\overline{\mathbf{x}}_k) + 0{,}5\Delta\rho_i, \ \ i = \overline{1; m}. \tag{27}$$

Этот итерационный процесс, сходящийся со скоростью геометрической прогрессии, продолжаем до тех пор, пока не будут выполнены неравенства $\Delta\rho_{i,k} / \rho_{i,k+1} \le \gamma$, где γ — заданная относительная допустимая погрешность.

В Приложении приведен пример, иллюстрирующий метод определения оценки сверху предельного цикла семейства систем (17), (18).

Выше на функцию $f(X)$ было наложено ограничение, что она непрерывна. Но в системах с релейным управлением, в частности, приходится иметь дело с разрывными функциями вида $f(\sigma) = c\operatorname{sign}\sigma$, где $\sigma = K^{\mathrm{T}}X$, K — числовой вектор. При этом значение $f(0)$ не определено. Следуя Филиппову, доопределим $f(0)$ в виде $f(0) \in \mathbf{f} = [-c; c]$. Тогда при решении задач (25) не возникает особенностей и изложенный выше способ определения интервальной оценки сверху $\overline{\mathbf{X}}_{n+1}$ множества $\mathbf{X}_{n+1}$ остается без изменений.

В [8] на примере нелинейной функции $f(x_m) = k\sin\beta x_m$ показано, что отказ от введенного выше ограничения об одноэкстремальности функции $f(x_m)$ приводит к тому, что при определенных свойствах семейства систем (17), (18) и соответствующих начальных условиях в этом семействе систем могут существовать несколько вложенных один в другой устойчивых предельных циклов, разделенных между собой неустойчивыми предельными циклами, определяющими области притяжения двух соседних устойчивых циклов.

Нетрудно показать, что этот вывод справедлив и для семейства систем (1), (2). Таким образом, отказ от требования одноэкстремальности функции $f(x_m)$ приводит к существенному изменению структуры фазового пространства семейства систем (17), (18), а именно, к возникновению одного из семейства вложенных один в другой устойчивых и неустойчивых предельных циклов.

Рассмотрим семейство систем с линейной частью и с нелинейной векторной функцией

$$X_{n+1} = \Phi(X_n, L) = \mathrm{A}(L)X_n + F(X_n), \tag{28}$$

где $F(X)$ — нелинейная функция, такая что $F(0) = 0$, а ее элементы $f_i(X)$, $i = \overline{1; m}$, удовлетворяют ограничениям, наложенным выше на скалярную функцию $f(X)$, а для строк $A_i^{\mathrm{T}}(L)$ матрицы $\mathrm{A}(L)$ заданы их оценки (18).

Проверив описанный выше способ выполнения условий существования устойчивого предельного цикла в семействе систем (28), (18) и убедившись в их выполнении, определим его оценки сверху.

Прежде всего аппроксимируем множество

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{X}_n, \mathbf{L}) = \bigcup_{\substack{X_n \in \mathbf{X}_n \\ L \in \mathbf{L}}} \Phi(X_n, L), \tag{29}$$

интервальным множеством минимального объема $\overline{\mathbf{X}}_{n+1}$ (21), в котором множества $\overline{\mathbf{x}}_{i,n+1} = 1$, $i = \overline{1; m}$, задаются выражениями (22)–(25), а величины $\underline{\mathbf{x}}_{i,n+1}$ и $\overline{\mathbf{x}}_{i,n+1}$, $i = \overline{1; m}$, имеют вид

$$\underline{x}_{i,n+1} = \min_{\substack{X_n \in \mathbf{X}_n \\ A_i^{\mathrm{T}}(L) \in \mathbf{A}_i}} \phi_i(X_n, L), \quad \overline{x}_{i,n+1} = \max_{\substack{X_n \in \mathbf{X}_n \\ A_i^{\mathrm{T}}(L) \in \mathbf{A}_i}} \phi_i(X_n, L), \quad i = \overline{1; m}. \tag{30}$$

Определив решения задач (30) по выражениям (25) и величинам $\underline{x}_{i,n+1}$, $\overline{x}_{i,n+1}$, найдем множество $\overline{\mathbf{X}}_{n+1}$.

Для описания искомой оценки $\overline{\mathbf{X}}$ предельного цикла воспользуемся изложенной выше итерационной процедурой.

На основании утверждения изложенный выше метод определения оценок сверху устойчивых предельных циклов нелинейных дискретных систем без существенных изменений применим и для семейства систем с иной структурой фазового пространства. Речь идет о системах, устойчивых лишь в некоторой окрестности начала координат, ограниченной неустойчивым предельным циклом, отделяющим область притяжения ближайшего к нему устойчивого предельного цикла.

Заключение

Для достаточно широкого класса автономных нелинейных дискретных систем определены условия существования инвариантных множеств (устойчивых предельных циклов). Предложено определение интервальных оценок сверху предельных циклов.

Существование нескольких экстремумов у нелинейных функций анализируемого семейства систем приводит к существенному изменению структуры его фазового пространства. При этом в фазовом пространстве семейства систем существует семейство вложенных один в другой устойчивых «в области» предельных циклов, разделенных между собой неустойчивыми предельными циклами, определяющими области притяжения двух соседних устойчивых «в области» предельных циклов. Возникновение того или иного устойчивого «в области» предельного цикла определяется начальными условиями.

Приложение

Приведем иллюстративный пример определения интервальной оценки сверху $\overline{\mathbf{X}}$ устойчивого предельного цикла в семействе систем (1), (2) при $m=2$ следующего вида:

$$X_{n+1} = AX_n + F(X_n), \ \ A = \| a_{ij} \|_{i,j=1}^{2}, \tag{31}$$

где

$$\begin{gathered} f_1(x) = l_1 \left| \sqrt{4|x_1| + |x_2|} \right| \operatorname{sign} x_1, \\ f_2(x) = l_2 \left| \sqrt{4|x_1| + |x_2|} \right| \operatorname{sign} x_2, \ \ l_1 = 0{,}93, \ \ l_2 = 0{,}69. \end{gathered} \tag{32}$$

Для матрицы A задана ее интервальная оценка

$$\mathrm{A} \in \mathbf{A} = \alpha_{11} \times \alpha_{12} \times \alpha_{21} \times \alpha_{22}, \tag{33}$$

где

$$\begin{gathered} \alpha_{11} = \{a_{11} : 0{,}2 \le a_{11} \le 0{,}4\}, \ \ \alpha_{12} = \{0{,}1 \le a_{12} \le 0{,}3\}, \\ \alpha_{21} = \{a_{21} : 0 \le a_{21} \le 0{,}2\}, \ \ \alpha_{22} = \{a_{22} : 0{,}05 \le a_{22} \le 0{,}15\}. \end{gathered} \tag{34}$$

Поведение системы (31)–(34) будем анализировать в области $\mathbf{X}^{\circ}$ — квадрате с центром в начале координат и со сторонами, равными 50.

Введем в рассмотрение множество

$$\overset{*}{\mathbf{X}} = \{X : |x_1| \le 1; |x_2| \le 1\}, \tag{35}$$

радиус $\rho(\overset{*}{\mathbf{X}})$ которого равен 1,42, и найдем отображение его границы семейством систем (31)–(34), точнее, его интервальную аппроксимацию минимального объема $\mathbf{\Phi}(\overset{*}{\mathbf{X}}, \mathbf{L})$, радиус которого $\rho(\mathbf{\Phi}(\overset{*}{\mathbf{X}}, \mathbf{L}))$ равен 3,65.

Поскольку неравенство $\rho(\mathbf{X}_{n+1}) < \rho(\mathbf{X}_n)$ является лишь достаточным условием робастной устойчивости семейства систем (31), (32), то из невыполнения этого неравенства еще не следует, что это семейство систем в области $\overset{*}{\mathbf{X}}$ робастно неустойчиво. Но невыполнение неравенства $\rho(\mathbf{\Phi}(\overset{*}{\mathbf{X}}, \mathbf{L})) < \rho(\overset{*}{\mathbf{X}})$ дает основание предположить, что рассматриваемое семейство систем в области $\overset{*}{\mathbf{X}}$ робастно неустойчиво.

Нетрудно убедится, что семейство систем (31)–(34) осуществляет сжатое отображение границы области $\overset{*}{\mathbf{X}}$. Таким образом, есть основание предположить, что требования утверждения соблюдены и в рассматриваемом семействе систем существует устойчивый предельный цикл.

Для определения оценки радиуса этого предельного цикла воспользуемся описанной выше процедурой. В качестве начального приближения $\overline{\mathbf{X}}_0$ примем квадрат со сторонами, равными 20, и, воспользовавшись описанной выше итерационной процедурой и приняв точность определения оценки сверху $\overline{\mathbf{X}}$ предельного цикла $\mathbf{X}$, равную $\pm 0{,}05$, получим

$$\overline{\mathbf{X}} = \operatorname{conv}\left\{\begin{Vmatrix}25\\15\end{Vmatrix};\begin{Vmatrix}25\\-15\end{Vmatrix};\begin{Vmatrix}-25\\15\end{Vmatrix};\begin{Vmatrix}-25\\-15\end{Vmatrix}\right\}.$$

О.В. Кунцевич

ІНВАРІАНТНІ МНОЖИНИ (ГРАНИЧНІ ЦИКЛИ) СІМЕЙСТВ АВТОНОМНИХ НЕЛІНІЙНИХ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ

Для достатньо широкого сімейства автономних нелінійних дискретних систем визначено умови існування інваріантних множин (стійких граничних циклів). Запропоновано алгоритм визначення інтервальних оцінок зверху для граничних циклів. Алгоритм ілюстровано прикладом.

A.V. Kuntsevich

INVARIANT SETS (LIMIT CYCLES) OF FAMILIES OF AUTONOMOUS NONLINEAR DISCRETE SYSTEMS

For a rather large family of autonomous nonlinear discrete systems the conditions for the existence of invariant sets (stable limit cycles) are determined. The algorithm for calculation of upper-bound interval estimates for the limit cycles is presented. The algorithm is illustrated with an example.

1. *Кунцевич В.М., Пшеничный Б.Н.* Минимальные инвариантные множества динамических систем с ограниченными возмущениями // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 1. — С. 74–80.
2. *Кунцевич В.М., Поляк Б.Т.* Инвариантные множества нелинейных дискретных систем с ограниченными возмущениями и задачи управления // Проблемы управления и информатики. — 2009. — № 6. — С. 6–21.
3. *Кунцевич А.В., Кунцевич В.М.* Синтез управления инвариантными множествами семейств линейных и нелинейных дискретных систем с ограниченными возмущениями // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — № 4. — С. 65–78.
4. *Кунцевич А.В., Кунцевич В.М.* Инвариантные множества семейств линейных и нелинейных дискретных систем с ограниченными возмущениями // Автоматика и телемеханика. — 2012. — № 1. — С. 92–106.
5. *Хлебников М.В., Поляк Б.Т., Кунцевич В.М.* Оптимизация линейных систем при ограниченных внешних возмущениях (техника инвариантных эллипсоидов) // Там же. — 2011. — № 11. — С. 9–59.
6. *Кунцевич А.В., Кунцевич В.М.* Устойчивость в области нелинейных разностных включений // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 5. — С. 11–17.
7. *Кунцевич А.В., Кунцевич В.М.* Оценки устойчивых предельных циклов нелинейных дискретных систем // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2012. — № 5. — С. 5–14.
8. *Кунцевич В.М., Куржанский А.Б.* Области достижимости линейных и некоторых классов нелинейных дискретных систем и управление ими // Там же. — 2010. — № 1. — С. 5–21.

Получено 05.11.2012