УДК 517.977

И.М. Исканаджиев

О НИЖНЕМ АЛЬТЕРНИРОВАННОМ ИНТЕГРАЛЕ ПОНТРЯГИНА

Для решения задачи преследования в линейных дифференциальных играх Л.С. Понтрягин предложил два прямых метода [1, 2]. Второй прямой метод, основывающийся на понятии альтернированного интеграла, сыграл большую роль в развитии теории дифференциальных игр. Исследованию этого метода посвящено много работ [3–l7]. В частности, введен его нижний аналог, названный нижним альтернированным интегралом [3, 4]. В связи с этим новым понятием сам альтернированный интеграл был назван верхним. Нижний альтернированный интеграл оказался полезным при решении задачи преследования при определенной информационной дискриминации преследователя по сравнению с убегающим. В работе [3] также установлена связь между этими понятиями, которая и применена к проблеме информированности [5].

Понятие альтернированного интеграла (верхнего и нижнего) имеет ряд существенных отличий от классического интеграла. Одно из отличий — использование в его определении интеграла многозначного отображения. В связи с этим возникают некоторые трудности при вычислении альтернированного интеграла. В работе [6] предложена первая упрощенная схема построения верхнего альтернированного интеграла без участия интеграла многозначного отображения. Метод, применяемый в этой работе, назван «методом надевания шапок» (на терминальное множество *M*). Оказалось, что этот метод позволяет строить и другие упрошенные схемы [5].

В настоящей работе построены упрощенные схемы для нижнего альтернированного интеграла и, основываясь на этих схемах, доказано, что в линейной дифференциальной игре для начальных состояний, к которым применим нижний альтернированный интеграл, существует стратегия преследователя, гарантирующая точное завершение преследования и имеющая кусочно-постоянную реализацию.

Используем следующие обозначения: $I=[0,\tau]$ — фиксированный отрезок времени; Δ — подотрезок I; $|\Delta|$ — длина отрезка Δ; $\mathrm{cl}(R^d)$ (соответственно $\mathrm{Ccl}(R^d))$) — семейство всех непустых замкнутых (выпуклых замкнутых) подмножеств R^d; $\mathrm{cm}(R^d)$ (соответственно $\mathrm{Ccm}(R^d)$) — семейство всех непустых компактных (выпуклых компактных) подмножеств R^d; $H=\{z\in R^d \mid |z|\le 1\}$ — единичный замкнутый шар в R^d; $h(A,B)=\min\{r\ge 0 \mid A\subset B+rH,\, B\subset A+rH\}$ — метрика Хаусдорфа; $\omega=\{\tau_0,\tau_1,\tau_2,...,\tau_n\}$ — разбиение отрезка I ($0=\tau_0<\tau_1<<\tau_2<...<\tau_n=\tau$, n может зависеть от ω); Ω — совокупность всех разбиений отрезка I; $\Delta_i=[\tau_{i-1},\tau_i]$; $\delta_i=|\Delta_i|$; $|\omega|=\max|\delta_i|$ — диаметр разбиения ω; $\int_i$ — интеграл по отрезку Δ_i. Если X — подмножество евклидового пространства, то $X[\Delta]$ — совокупность всех измеримых функций $a(\cdot):\Delta\to X$. В случае $\Delta=[\alpha,\beta]$ пишем $X[\alpha,\beta]$.

Упрощенные схемы построения нижнего альтернированного интеграла. Пусть *X*, *Y* — произвольные подмножества R^d. Их алгебраической суммой $X+Y$ называется множество $Z=\{z\in R^d \mid z=x+y,\, x\in X,\, y\in Y\}$. Геометрической разностью $X \underline{*} Y$ называется множество $Z = \{z \in R^d \mid z + Y \subset X\}$. Отметим некоторые свойства введенных операций, непосредственно вытекающие из определений:

$$X \underline{*} Y + Z \subset (X + Z) \underline{*} Y, \tag{1}$$

$$X \underline{*} Y \underline{*} Z = X \underline{*} (Y + Z), \tag{2}$$

$$X \underline{*} Y + Y \subset X. \tag{3}$$

Если $Y \subset Z,$ то

$$X + Y \subset X + Z, \;\; X \underline{*} Z \subset X \underline{*} Y. \tag{4}$$

В соотношениях (1)–(4) *X*, *Y*, *Z* — произвольные подмножества R^d.

Отметим также, что имеет место включение

$$(A + B)X \subset AX + BX, \tag{5}$$

где *A* и *B* — $(d \times d)$-матрицы, *X* — произвольное подмножество R^d.

Лемма 1 [3]. Пусть последовательность открытых множеств $X_k \in R^d$ монотонно возрастает по включению и $Y \in \mathrm{cm}(R^d)$. Тогда имеет место равенство

$$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k\right) \underline{*}\, Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} (X_k \,\underline{*}\, Y). \tag{6}$$

Пусть $C(t)$ — непрерывная на I матричная функция со значениями в пространстве $d \times d$-матриц, $P \in \mathrm{Ccm}(R^d)$, $Q \in \mathrm{Ccm}(R^d)$ и M — непустое подмножество R^d. Положим $U_i = \int_i C(t) P\, dt,$ $V_i = \int_i C(t) Q\, dt$ (об интеграле многозначного отображения см. [1, 7]).

Каждому разбиению $\omega \in \Omega$ ставим в соответствие множество $S(\omega)$, называемое нижней альтернированной суммой. Она является последним членом последовательности S_i, вводимой следующим образом:

$$S_0 = M, \;\; S_i = S_{i-1} \underline{*} V_i + U_i, \;\; S(\omega) = S_n. \tag{7}$$

Множество $W_\tau(M) = \bigcup_{\omega \in \Omega} S(\omega)$ называется нижним альтернированным интегралом Понтрягина [3, 4].

В дальнейшем по мере необходимости в обозначениях указывается зависимость сумм и интегралов не только от ω или τ, но и от других исходных данных.

Пусть $\gamma(\delta) = \max\{\|C(t_1) - C(t_2)\|, |t_1 - t_2| \le \delta\}$, где $\|\cdot\|$ — норма матрицы. Очевидно, что $\gamma(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$; $\gamma(0) = 0.$

Пусть $\overline{U_i} = \int_i C(t)\, dt\, P,$ $\overline{V_i} = \int_i C(t)\, dt\, Q.$

Лемма 2. Если $P \in \mathrm{Cm}(R^d)$, $Q \in \mathrm{Ccm}(R^d)$ и $P \bigcup Q \subset lH,$ то имеют место неравенства

$$h(U_i, \overline{U_i}) \le 2\delta_i \gamma(\delta_i) l, \;\; h(V_i, \overline{V}) \le 2\delta_i \gamma(\delta_i) l. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть ξ_i — произвольная точка из Δ_i. Тогда

$$h(U_i, \overline{U_i}) \le h(U_i, \delta_i C(\xi_i) P) + h(\delta_i C(\xi_i) P, \overline{U_i}). \tag{9}$$

Очевидно, $U_i \subset \delta_i C(\xi_i) P + l\delta_i \gamma(\delta_i)$ и $\delta_i C(\xi_i) P \subset U_i + l\delta_i \gamma(\delta_i)$. Из этих включений следует

$$h(U_i, \delta_i C(\xi_i) P) \le l\delta_i \gamma(\delta_i). \tag{10}$$

Теперь оценим второе слагаемое соотношения (9):

$$\int_i C(\xi_i)\,dt = \int_i C(t)\,dt + \int_i (C(\xi_i) - C(t))\,dt.$$

Отсюда

$$\int_i C(\xi_i)\,dtP \subset \int_i C(t)\,dtP + \left\| \int_i (C(\xi_i) - C(t))\,dt \right\| \left| P \right| H.$$

Тем более,

$$\delta_i C(\xi_i) P \subset \overline{U}_i + l\delta_i \gamma(\delta_i) H. \tag{11}$$

Пользуясь включением (5), оценим $\overline{U}_i$ сверху:

$$\overline{U}_i = \int_i C(t)\,dtP \subset \int_i C(\xi_i)\,dtP + \int_i (C(t) - C(\xi_i))\,dtP \subset \delta_i C(\xi_i) P + l\delta_i \gamma(\delta_i) H. \tag{12}$$

Из (11) и (12) следует

$$h(\delta_i C(\xi_i) P, \overline{U}_i) \le l\delta_i \gamma(\delta_i) H. \tag{13}$$

Складывая (10) и (13), получаем первое неравенство (8). Аналогично доказывается второе неравенство (8).

Лемма 2 доказана.

Примечание. В дальнейшем для удобства записи в формулах будем считать $l = 1$, т.е $P \bigcup Q \subset H$.

Пусть $\omega \in \Omega$. Положим $B_0 = M$, $B_i = B_{i-1} \underline{*}\, \overline{V}_i + \overline{U}_i$, $B_n = B(\omega)$.

Лемма 3. Имеют место включения

$$S(M, \omega) \supset B(M \underline{*}\, 2\tau\gamma(\left|\omega\right|) H, \omega) \supset S(M \underline{*}\, 6\tau\gamma(\left|\omega\right|) H). \tag{14}$$

Доказательство. Сначала докажем $S(M, \omega) \supset B(M \underline{*}\, 2\tau\gamma(\left|\omega\right|) H, \omega)$. Пусть $\Gamma(\delta_k) = 2\delta_k \gamma(\delta_k)$. В силу (8) и $\overline{U}_i \subset U_i$ имеем

$$S_1 = M \underline{*}\, V_1 + U_1 \supset M \underline{*}\, (\overline{V}_1 + \Gamma(\delta_1) H) + \overline{U}_i = B_1(M \underline{*}\, \Gamma(\delta_1) H).$$

Предположим, что $S_k(M) \supset B_k\left(M \underline{*} \sum_{i=1}^{k} \Gamma(\delta_i) H \right)$. Покажем, что $S_{k+1}(M) \supset$ $\supset B_{k+1}\left(M \underline{*} \sum_{i=1}^{k+1} \Gamma(\delta_i) H \right)$. По определению $S_{k+1}(M) = S_k(M) \underline{*}\, V_{k+1} + U_{k+1}$. В силу предположения $S_{k+1}(M) \supset B_k\left(M \underline{*} \sum_{i=1}^{k} \Gamma(\delta_i) H \right) \underline{*}\, V_{k+1} + U_{k+1}$. Пользуясь неравенством (8) и учитывая $\overline{U}_{k+1} \subset U_{k+1}$, приходим к соотношению

$$S_{k+1}(M) \supset B_k\left(M \underline{*} \sum_{i=1}^{k} \Gamma(\delta_i) H \right) \underline{*}\, (\overline{V}_{k+1} + \Gamma(\delta_{k+1}) H) + \overline{U}_{k+1}.$$

Воспользовавшись включениями (1) и (2), операцию геометрической разности с членом $\Gamma(\delta_{k+1}) H$ применим для терминального множества, в результате получим

$$S_{k+1}(M) \supset B_{k+1}\left(M \underline{*} \sum_{i=1}^{k+1} \Gamma(\delta_i) H \right).$$

В силу этого $S_n(M) \supset B_n\left(M \underline{*} \sum_{i=1}^{n} \Gamma(\delta_i) H\right)$. Поскольку $\gamma(\delta_i) \le \gamma(|\omega|)$, то $\sum_{i=1}^{n} \Gamma(\delta_i) =$ $= 2\sum_{i=1}^{n} \delta_i \gamma(\delta_i) \le 2\tau\gamma(|\omega|)$. Поэтому $S(M, \omega) \supset B(M \underline{*} 2\tau\gamma(|\omega|))$.

Левая часть включений (14) доказана.

Теперь докажем правую часть включения (14). Для этого частичные суммы B_i оценим снизу частичными суммами S_i.

По определению

$$B_1(M \underline{*} 2\tau\gamma(|\omega|)H) = M \underline{*} 2\tau\gamma(|\omega|)H \underline{*} \overline{V}_1 + \overline{U}_1.$$

В силу соотношений (8) и (4)

$$B_1(M \underline{*} 2\tau\gamma(|\omega|)H) \supset M \underline{*} 2\tau\gamma(|\omega|)H \underline{*} (V_1 + \Gamma(\delta_1)H) + \overline{U}_1.$$

Применив включение (3) к правой части этого соотношения, получим

$$B_1(M \underline{*} 2\tau\gamma(|\omega|)H) \supset M \underline{*} 2\tau\gamma(|\omega|)H \underline{*} (V_1 + \Gamma(\delta_1)H) \underline{*} \Gamma(\delta_1)H + \overline{U}_1 + \Gamma(\delta_1)H.$$

Учитывая, что $U_1 \subset \overline{U}_1 + \Gamma(\delta_1)H$ и воспользовавшись (4), имеем

$$B_1(M \underline{*} 2\tau\gamma(|\omega|)H) \supset M \underline{*} 2\tau\gamma(|\omega|)H \underline{*} (V_1 + \Gamma(\delta_1)H) \underline{*} \Gamma(\delta_1)H + \overline{U}_1.$$

Теперь, применяя соотношения (2) к правой части этого включения, операцию геометрической разности применим для терминального множества

$$B_1(M \underline{*} 2\tau\gamma(|\omega|)H) \supset M \underline{*} 2(\tau\gamma|\omega| + \Gamma(\delta_1))H \underline{*} V_1 + U_1 = S_1(M \underline{*} 2(\tau\gamma(|\omega|) + \Gamma(\delta_1)H)).$$

Предположим, что

$$B_k(M \underline{*} 2\tau\gamma(|\omega|)H) \supset S_k\left(M \underline{*} 2\left(\tau\gamma(|\omega|) + \sum_{i=1}^{k} \Gamma(\delta_i)\right)H\right).$$

Покажем, что

$$B_{k+1}(M \underline{*} 2\tau\gamma(|\omega|)H) \supset S_{k+1}\left(M \underline{*} 2\left(\tau\gamma(|\omega|) + \sum_{i=1}^{k+1} \Gamma(\delta_i)\right)H\right).$$

На самом деле

$$B_{k+1}(M \underline{*} 2\tau\gamma(|\omega|)H) = B_k(M \underline{*} 2(\tau\gamma(|\omega|))) \underline{*} \overline{V}_{k+1} + \overline{U}_{k+1}.$$

В силу предположения

$$B_{k+1}(M \underline{*} 2\tau\gamma(|\omega|)H) \supset S_k\left(M \underline{*} 2\left(\tau\gamma(|\omega|) + \sum_{i=1}^{k} \Gamma(\delta_i)\right)H\right) \underline{*} \overline{V}_{k+1} + \overline{U}_{k+1}.$$

Пользуясь включениями (3), (8), приходим к соотношению

$$B_{k+1}(M \underline{*} 2\tau\gamma(|\omega|)H) \supset S_{k+1}\left(M \underline{*} 2\left(\tau\gamma(|\omega|) + \sum_{i=1}^{k+1} \Gamma(\delta_1)\right)H\right) \underline{*} V_{k+1} + U_{k+1}.$$

 ISSN 0572-2691

Отсюда следует, что

$$B_n(M \underline{*} 2\tau\gamma(|\omega|)H) \supset S_n\left(M \underline{*} 2\left(\tau\gamma(|\omega|)+\sum_{i=1}^{n}\Gamma(\delta_1)\right)H\right), \tag{15}$$

поскольку $\sum_{i=1}^{n}\Gamma(\delta_i) \le 2\tau\gamma(|\omega|)$, то $B(M \underline{*} 2\tau\gamma(|\omega|)H, \omega) \supset S(M \underline{*} 4\tau\gamma(|\omega|)H, \omega)$.

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть M — открытое подмножество R^d. Тогда справедливо равенство

$$\bigcup_{\omega} S(M \underline{*} 4\tau\gamma(|\omega|)H, \omega) = \bigcup_{\omega} S(M, \omega) = W_\tau(M).$$

Доказательство. Покажем включение

$$\bigcup_{\omega\in\Omega} S(M \underline{*} 4\tau\gamma(|\omega|)H, \omega) \supset \bigcup_{\omega\in\Omega} S(M, \omega).$$

Обратное включение очевидно.

Пусть ω_0 — произвольное разбиение из Ω и ω_k — последовательность измельчающих разбиений таких, что $\omega_0 \subset \omega_1 \subset \ldots \subset \omega_k$ и $|\omega_k| \to 0$, $k \to \infty$. Покажем, что $S(M, \omega_0) \subset \bigcup_{k\ge 0} S(M_k, \omega_k)$, где $M_k = M \underline{*} 2\tau\gamma(|\omega_k|)H$. При измельчении разбиений суммы $S(M, \omega)$ возрастает. Поэтому достаточно показать $S(M, \omega_0) \subset \bigcup_{k\ge 0} S(M_k, \omega_0)$. На самом деле здесь имеет место равенство $\bigcup_{k\ge 0} S(M_k, \omega_0) = S(M, \omega_0)$.

Пользуясь леммой 1, операцию объединения по k применим для терминального множества и получим

$$\bigcup_{k\ge 0} S(M_k, \omega_0) = S\left(\bigcup_{k\ge 0} M_k, \omega_0\right).$$

Остается заметить, что $\bigcup_{k\ge 0} M_k = M$. Следовательно,

$$S(M, \omega_0) \subset \bigcup_{\omega\in\Omega} S(M \underline{*} 4\tau\gamma(|\omega|)H, \omega).$$

Лемма 4 доказана.

Теорема 1. Пусть M — открытое подмножество R^d. Тогда справедливо равенство

$$W_\tau(M) = \bigcup_{\omega} B(M \underline{*} 2\tau\gamma(|\omega|)H, \omega).$$

Доказательство теоремы следует из лемм 3 и 4.

Пусть $\omega \in \Omega$. Положим

$$C_0 = M,\ C_i = C_{i-1} \underline{*} V_i + \overline{U}_i,\ C(M, \omega) = C_n,\ C_\tau(M) = \bigcup_{\omega} C(M, \omega). \tag{16}$$

Лемма 5. Имеют место включения

$$S(M, \omega) \supset C(M, \omega) \supset S(M \underline{*} 2\tau\gamma(|\omega|)H, \omega).$$

Доказательство леммы 5 аналогично доказательству леммы 3.

Теорема 2. Если M — открытое подмножество R^d, то

$$W_\tau(M) = C_\tau(M). \tag{17}$$

Доказательство теоремы следует из лемм 4 и 5.

Отметим, что в схеме (16) частичные суммы C_i образуются без учета аппроксимация интеграла U_i интегралом $\overline{U_i}$.

Приложение упрощенных схем для нижнего альтернированного интеграла к линейным дифференциальным играм. Рассмотрим линейную дифференциальную игру

$$\dot{z} = Cz - u + v, \tag{18}$$

$z \in R^d$, C — $(d \times d)$-матрица, $u \in P,\ v \in Q,\ P \in \mathrm{Ccm}(R^d),\ Q \in \mathrm{Ccm}(R^d)$.

Стратегией преследователя назовем пару (ω, U), где $\omega = \{\tau_0, \tau_1, \tau_2, ..., \tau_n\}$ — разбиение отрезка I $(\omega \in \Omega)$, $U = \{U_i\}_0^{n-1}$ — семейство операторов U_i, каждый из которых ставит в соответствие вектору $\xi \in R^d$ и точке τ_i измеримую функцию $u(\cdot) \in P(\Delta_i)$. Семейство всех таких стратегий преследователя обозначим U_*. Произвольную измеримую функцию $v(\cdot) \in Q(I)$ назовем допустимым управлением убегающего.

Каждой точке $z_0 \in R^d$ стратегии преследователя $U = (\omega, U) \in U_*$ и управления убегающего $v(\cdot) \in Q(I)$ соответствует единственная абсолютно-непрерывная траектория $z(t) = z(t, z_0, U, v(\cdot))$, которая определяется следующим образом.

Пусть $\omega = \{0 = \tau_0, \tau_1, \tau_2, ..., \tau_n = \tau\}$ и $\tau - \tau_{n-k} = \overline{\tau}_k$, $k = \overline{0, n}$. На отрезке $\Delta_1 = [0, \overline{\tau}_1]$ траектория $z(t)$ определяется как решение задачи Коши

$$\dot{z} = Cz - u_0(t) + v(t),\ \ z(0) = z_0,$$

где $u_0(\cdot) = U_0(\overline{\tau}_0, z_0)$.

Пусть $z(t)$ построена на отрезке $[0, \overline{\tau}_{n-1}]$, $z_{n-1} = z(\overline{\tau}_{n-1})$. Тогда $z(t)$ на отрезке $\Delta_1 = [\overline{\tau}_{n-1}, \overline{\tau}_n]$ определяется как решение задачи Коши

$$\dot{z} = Cz - u_{n-1}(t) + v(t),\ \ z(\overline{\tau}_{n-1}) = z_{n-1},$$

где $u_{n-1}(\cdot) = U_{n-1}(\overline{\tau}_{n-1}, z_{n-1})$. Функцию $u(t) = u_k(t)$ при $t \in \Delta_k$ назовем реализацией стратегий U.

Таким образом, преследователь для построения стратегий из класса U_* не пользуется информацией об управлении убегающего, а пользуется значением $z(t)$ в дискретные моменты времени τ_i, т.е. $z(\tau_i)$ и в этом отношении стратегии из класса U_* близки к нижним кусочно-программным стратегиям [4, 18, 19].

По определению из точки z_0 можно завершить преследование за время τ (в момент времени τ), если существует стратегия преследователя $U = (\omega, U) \in U_*$ такая, что при любом управлении убегающего $v(\cdot) \in Q(I)$ в некоторый момент времени $t_* \in I$ (в момент времени τ) окажется $z(t_*) = z(t_*, z_0, v(\cdot)) \in M\ (z(\tau) \in M)$.

Пусть в схемах (7) и (16) $C(t) = e^{tC}$. Тогда на основе соотношении (17) доказывается следующая теорема.

Теорема 3. Пусть M — открытое подмножество R^d. Тогда в игре (18) из точек z_0, для которых $\exp(\tau C) z_0 \in W_\tau(M)$, можно завершить преследование в момент времени τ в классе стратегии U_*. При этом все реализации стратегий преследователя можно сделать кусочно-постоянными.

Каждому разбиению ω, $\omega \in \Omega$, ставим в соответствие множество S^ω, называемое верхней альтернированной суммой, определяемой следующим образом:

$$S^o = M,\ S^i = (S^{i-1} + U_i) \underline{*} V_i,\ S^\omega = S^n.$$

Множество $W^{\tau}(M) = \bigcap_{\omega \in \Omega} S^{\omega}$ называется верхним альтернированным интегралом Понтрягина [1–4].

Пусть существуют положительное число r и функция $f(\cdot): I \to R^d$, имеющая ограниченную вариацию на отрезке I, такие, что для каждого разбиения $\omega \in \Omega$ частичные альтернированные суммы S^i удовлетворяют условиям

$$f(\tau_i) + rH \subset S^i, \ \tau_i \in \omega, \ i = \overline{0, n}. \tag{19}$$

Теорема 4. Если $M \in \mathrm{Ccl}(R^d)$ и выполнены условия (19), то $\mathrm{Int}\, W^{\tau}(M) = C_{\tau}(\mathrm{Int}\, M)$.

Доказательство. Из теоремы 2 следует, если $M \in \mathrm{Ccl}(R^d)$, то $W_{\tau}(\mathrm{Int}\, M) = C_{\tau}(\mathrm{Int}\, M)$. С другой стороны, при выполнении условия теоремы из результата работы [5, § 6, теорема 9] следует $\mathrm{Int}\, W^{\tau}(M) = W_{\tau}(\mathrm{Int}\, M)$, поэтому $\mathrm{Int}\, W^{\tau}(M) = C_{\tau}(\mathrm{Int}\, M)$.

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда из всех точек z_0, для которых $\exp(\tau C) z_0 \in \mathrm{Int}\, W^{\tau}(M)$, можно завершить преследование в момент времени τ в классе стратегии U_* в игре (18). При этом все реализации стратегий преследователя можно сделать кусочно-постоянными.

Отметим, что аналогичное утверждение доказано в работе [5], когда все реализации стратегий преследователя являются измеримыми функциями (см. также [4]).

І.М. Ісканаджієв

ПРО НИЖНІЙ АЛЬТЕРНОВАНИЙ ІНТЕГРАЛ ПОНТРЯГІНА

Побудовано нові спрощені схеми для нижнього альтернованого інтеграла Понтрягіна. На основі цих схем доведено, що в лінійній диференціальній грі для початкових станів, до яких застосовується нижній альтернований інтеграл, існує стратегія переслідування, що гарантує точне закінчення переслідування і має кусково-сталу реалізацію.

I.M. Iskanadjiev

ON THE LOWER PONTRYAGIN ALTERNATING INTEGRAL

The simplified schemes for the lower Pontryagin alternating integral are constructed. Basing on this schemes we also prove that in linear differential game the lower alternating integral can be applied to initial states, then there exists the pursuer strategy guaranteeing exact completion of pursuit and having a piecewise constant realization.

1. *Понтрягин Л.С.* О линейных дифференциальных играх // Докл. АН СССР. — 1967. — **175**, № 4. — С. 764–766.
2. *Понтрягин Л.С.* Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. — 1980. — **112**, № 3. — С. 307–330.
3. *Азамов А.* О втором методе Понтрягина в линейных дифференциальных играх // Там же. — 1982. — **118**, № 3. — С. 422–430.

4. *Никольский М.С.* О нижнем альтернированном интеграле Понтрягина в линейных дифференциальных играх преследования // Там же. — 1985. — **128**, № 1. — С. 35–49.
5. *Азамов А.* Полуустойчивость и двойственность в теории альтернированного интеграла Понтрягина // Докл. АН СССР. — 1988. — **299**, № 2. — С. 265–268.
6. *Никольский М.С.* Об альтернированном интеграле Л.С. Понтрягина // Мат. сб. — 1981. — **116**, № 4. — С. 136–144.
7. *Половинкин Е.С.* Об интегрировании многозначных отображений // Докл. АН СССР. — 1988. — **271**, № 5. — С. 1059–1074.
8. *Мищенко Е.Ф., Сатимов Н.* Альтернированный интеграл в линейных дифференциальных играх с нелинейными управлениями // Диф. уравнения. — 1974. — **10**, № 12. — С. 2173–2178.
9. *Пшеничный Б.Н., Сагайдак М.Н.* О дифференциальных играх с фиксированным временем. // Кибернетика. — 1970. — № 2. — С. 54–63.
10. *Гусятников П.Б.* К вопросу информированности игроков в дифференциальной игре // ПММ. — 1972. — **36**, № 5. — С. 917–924.
11. *Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А., Рапопорт И.С.* Эффективный метод решения дифференциальных игр со многими преследователями // Докл. АН СССР. — 1981. — **256**, № 3. — С. 530–535.
12. *Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В.* Дифференциальные игры. — Киев : Наук. думка, 1992, — 264 с.
13. *Азамов А.* О существовании стратегии с кусочно-постоянными реализациями // Мат. заметки. — 1987. — **41**, № 5. — С. 718–723.
14. *Куржанский А.Б., Мельников Н.Б.* О задаче синтеза управлений: альтернированный интеграл Понтрягина и уравнение Гамильтона–Якоби // Мат. сб. — 2000. — **191**, № 6. С. 69–100.
15. *Мухамедиев Б.М., Мансурова М.Е.* Альтернированные интегралы Понтрягина со смешанными ограничениями // Вычисл. технологии. — 2007. — **12**, № 2. — С 104–114.
16. *Silin D.* A generalization of Pontryagin's alternating integral and generalized solutions to Hamilton–Jakobi equations // Междунар. конф. «Дифференциальные уравнения и топология», посвящ. 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина. Тез. докл. — М. : МГУ им. В.М. Ломоносова, 2008. — С. 291.
17. *Пономарев А.П., Розов Н.Х.* Устойчивость и сходимость альтернированных сумм Понтрягина // Вестн. Москов. ун-та. Сер. вычисл. математика и кибернетика. — 1978. — № 1. — С. 82–90.
18. *Субботин А.И. Ченцов А.Г.* Оптимизации гарантии в задачах управления. — М. : Наука, 1981. — 288 с.
19. *Петросян Л.А.* Дифференциальные игры преследования. — Л. : Изд-во ЛГУ, 1977. — 222 с.

Получено 14.03.2011