УДК 519.816

С.В. Каденко

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ВЕСОВ КРИТЕРИЕВ ОЦЕНКИ АЛЬТЕРНАТИВ НА ОСНОВЕ ЧЕТКИХ И НЕЧЕТКИХ РАНЖИРОВАНИЙ

Введение

Как известно, ординальное экспертное оценивание (ранжирование) альтернатив применяется в случаях, когда в ходе экспертизы эксперты в состоянии предоставить информацию только о качественном, а не количественном соотношении между альтернативами.

Если во время многокритериального оценивания эксперты затрудняются предоставить оценки относительной важности критериев, имеет смысл пытаться найти веса критериев на основе предыдущего опыта оценивания альтернатив по этим критериям. Результаты таких вычислений могут быть более адекватными и объективными, чем результаты непосредственного оценивания, ведь они будут отображать весь опыт экспертов, все их знания о предметной области, а не только суждения на текущий момент.

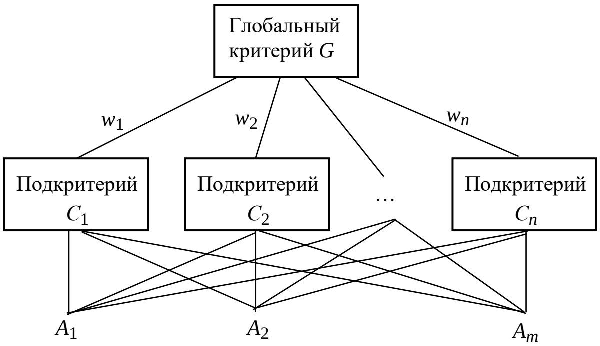
Задача определения весов критериев на основе опыта многокритериального ранжирования (ординального оценивания) альтернатив сформулирована и решена, в частности, в [1, 2].

Для нахождения весов критериев на основе опыта многокритериального кардинального оценивания альтернатив имеет смысл применять известные методы группового учета аргументов (МГУА), наименьших квадратов (МНК) и другие, как показано в [3].

В данной статье рассматриваются следующие вопросы: формулировка и решение аналогичной задачи в случае, когда экспертные оценки альтернатив заданы в виде нечетких ранжирований, а также способы упрощения процесса экспертного оценивания альтернатив и повышения адекватности результатов оценивания. Под адекватностью в данном случае понимается соответствие оценок, данных экспертом, уровню его знаний о предметной области. В публикациях [4, 5] показано, что «навязывание» шкалы эксперту равносильно оказанию давления на него и приводит к снижению достоверности результатов экспертизы. Поэтому если эксперт не уверен в своей оценке ординальных предпочтений на множестве альтернатив, следует дать ему возможность в ходе экспертизы выразить подобную неопределенность. Нечеткие ранжирования альтернатив позволяют это сделать.

1. Постановка задачи для случая четких ранжирований

Дано: множество альтернатив $A_1, A_2, ..., A_m$; множество независимых по предпочтениям [6, 7], совместимых между собой [3] критериев оценки альтернатив $C_1, C_2, ..., C_n$; ранжирования альтернатив по критериям $\{r_{ij}\}$, $i=1\ldots m$, $j=1\ldots n$, где r_{ij} — ранг альтернативы с номером i по критерию с номером j; строгое ранжирование альтернатив по глобальному (обобщенному) критерию G: $g_1, ..., g_m$ (рисунок).



Требуется найти: множество нормированных весов критериев оценки альтернатив: $\left\{ w_j : \sum_{j=1}^{n} w_j = 1; w_j > 0; j = 1\ldots n \right\}$, позволяющее при агрегации (обобщении) однокритериальных ранжирований сохранить ранжирование альтернатив по глобальному критерию.

2. Описание метода решения

Если предположить, что глобальное ранжирование альтернатив строится с помощью «взвешенного» метода Борда [8], то задача сводится к поиску решения системы неравенств следующего вида:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \times w_j > 0, \;\; i = 1\ldots m-1; \;\; w_j > 0, \;\; j = 1\ldots n, \tag{1}$$

где $a_{ij} = r_{i+1,j} - r_{ij}$ (пусть альтернативы пронумерованы в порядке убывания глобальных рангов). Если предположить, что транзитивность глобального отношения может нарушаться, то в формуле (1) $i = 1\ldots m(m-1)/2$. Как известно (в частности, из [8]), правило построения итогового (глобального) многокритериального ранжирования Борда состоит в следующем: чем меньше сумма (в общем случае взвешенная) однокритериальных рангов заданной альтернативы, тем выше ее ранг в итоговом ранжировании.

Каждое неравенство в системе (1) соответствует парному сравнению альтернатив A_i и A_j по глобальному критерию G. Если альтернатива A_i превосходит альтернативу A_k по глобальному критерию G, то

$$A_i \succ A_k \Rightarrow g_i < g_k \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} w_j r_{ij} < \sum_{j=1}^{n} w_j r_{kj} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} w_j (r_{kj} - r_{ij}) > 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{lj} \times w_j > 0,$$

где $a_{lj} = r_{kj} - r_{ij}$, а l — номер соответствующего неравенства в системе (1). В общем случае задачу можно решить с помощью методов, изложенных в [1, 2].

Если предположить, что агрегация однокритериальних ранжирований происходит по «взвешенному» правилу Кондорсе [8], то метод решения задачи будет несколько отличаться от вышеуказанного, так как неравенства будут формироваться иным способом. Как известно (в частности, из [8]), в методе Кондорсе фигурируют матрицы доминирования, соответствующие ранжированиям альтернатив. Каждый элемент d_{ij} матрицы доминирования $D=\{d_{ij}, i, j=1\ldots m\}$, соответствующей ранжированию $R=\{r_i, i=1\ldots m\}$, является результатом ординального парного сравнения альтернатив A_i и A_j и определяется следующим образом:

$$d_{ij}=\begin{cases}1, & A_i \succ A_j,\\ -1, & A_i \prec A_j,\\ 0, & A_i \equiv A_j.\end{cases} \tag{2}$$

Так, для ранжирования пяти альтернатив вида A_2, A_3, A_1, A_5, A_4, или $R=(3, 1, 2, 5, 4)$ матрица доминирования D будет иметь следующий вид:

$$\begin{array}{cccccc} & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5\\ A_1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1\\ A_2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ A_3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1\\ A_4 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1\\ A_5 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0\end{array}$$

Для того чтобы получить обобщенное отношение предпочтений на множестве альтернатив по «взвешенному» правилу Кондорсе, нужно вычислить взвешенную сумму соответствующих однокритериальних ординальных парных сравнений d_{ij} (т.е., соответствующих элементов матриц ординальных парных сравнений, а не самих рангов альтернатив, как в методе Борда). Согласно правилу Кондорсе, если в большинстве однокритериальных отношений предпочтений альтернатива A_i превосходит альтернативу A_k, то A_i превосходит A_k и в итоговом (глобальном) отношении предпочтений.

Итак, система неравенств будет формироваться по следующему принципу: пусть альтернатива A_i превосходит альтернативу A_k по глобальному критерию G:

$$A_i \succ A_k \Rightarrow g_i < g_k \Rightarrow \sum_{s=1}^{m} d_{is}^{(G)} > \sum_{s=1}^{m} d_{ks}^{(G)} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} w_j \sum_{s=1}^{m} (d_{is}^{(j)} - d_{ks}^{(j)}) > 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{lj} \times w_j > 0,$$

где $a_{lj}=\sum_{s=1}^{m}(d_{is}^{(j)} - d_{ks}^{(j)})$, а l — номер соответствующего неравенства в системе (1).

В работе [9] доказывается, что для существования линейного обобщенного критерия G необходимо и достаточно, чтобы оценки по всем его подкритериям выражались в шкале отношений. Это означает, что в методе Борда во время агрегации оценок должен осуществляться эвристический переход от рангов к кардинальному соотношению альтернатив (например, альтернатива с рангом 2 считается вдвое худшей, чем альтернатива с рангом 1). Метод Кондорсе позволяет избежать столь явного эвристического перехода от ординальной шкалы к шкале отношений. Также, в отличии от метода Борда, метод Кондорсе позволяет повышать согласованность индивидуальных экспертных оценок при групповых экспертизах [10]. И, наконец, еще одно преимущество метода Кондорсе — возможность его обобщения на случай нечетких ранжирований (см. п. 3, 4 данной статьи).

3. Случай нечетких ранжирований

Как уж говорилось во Введении, если эксперт, строящий ранжирование альтернатив, не уверен в том, какая альтернатива доминирует в заданной паре, он может задавать отношение предпочтений на множестве альтернатив в виде нечетких ранжирований. Процедуры ранжирования нечетких чисел предложены и описаны, в частности, в [11–13]. Отношение предпочтения между двумя нечеткими числами A и B (с заданными функциями принадлежности $\mu(A)$ и $\mu(B)$), предложенное в [12], строится следующим образом:

$$R(A, B) = \frac{S(A, B) + S(A \cap B, 0)}{S(A, 0) + S(B, 0)}, \tag{3}$$

где $S(A, B)$ обозначает отрезки, на которых A превосходит B, $S(B, A)$ — отрезки, на которых B превосходит A, $S(A, 0)$ — отрезки, где отлична от нуля только функция принадлежности $\mu(A)$, $S(B, 0)$ — отрезки, на которых отлична от нуля только функция принадлежности $\mu(B)$, $S(A \cap B, 0)$ — отрезки, на которых суппорты функций принадлежности $\mu(A)$ и $\mu(B)$ пересекаются, а A и B считаются эквивалентными. Для построения нечеткого отношения порядка на множестве из m альтернатив в [11–13] предлагается использовать матричную форму $[P(A_i, A_j)]_{m \times m}$, где каждый элемент отображает значение нечеткого отношения предпочтения из диапазона [0, 1]. Формула агрегации, которую используют авторы [13], следующая:

$$p''(A_i, A_k) = \begin{cases} \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n} w_j \{\max((P(A_i, A_k) - 0{,}5), 0)\}}{\sum\limits_{j=1}^{n} w_j \left| P(A_i, A_k) - 0{,}5 \right|}, & i \neq k, \\ 0{,}5, & i = k. \end{cases} \tag{4}$$

Поскольку сформулированы правила построения и агрегации нечетких ранжирований альтернатив, можно обобщить приведенную выше постановку задачи определения весов критериев (обратной задаче агрегации) на случай нечетких ранжирований.

3.1. Постановка задачи: случай нечетких ранжирований. Дано:

1. Множество альтернатив (объектов) $A_1, A_2, ..., A_m$.

2. Множество независимых по предпочтениям [6, 7], совместимых [3] критериев оценки альтернатив $C_1, C_2, ..., C_n$.

3. Матрицы однокритериальных «нечетких» ранжирований $\{d_{ik}^j\}$, $i, k = 1 \ldots m$, $j = 1 \ldots n$, где d_{ik}^j — парное сравнение альтернатив с номерами i и k по критерию с номером j, $d_{ik}^j \in [0, 1]$; $d_{ik}^j = 1 - d_{ki}^j$. В данной постановке предполагается, что нечеткие ранжирования уже построены и «дефаззифицированы» (defuzzified).

4. Матрица глобального нечеткого ранжирования альтернатив $\{g_{ik}\}$, $i, k = 1 \ldots m$ (нечеткое ранжирование альтернатив по глобальному критерию G).

Найти: набор нормированных весов критериев оценки альтернатив $\{w_j\}$, $j = 1 \ldots n$; $\sum\limits_{j=1}^{n} w_j = 1$, $w_j > 0$, $j = 1 \ldots n$, сохраняющих заданное глобальное нечеткое ранжирование альтернатив при агрегации однокритериальных нечетких предпочтений по формуле (4).

Следует подчеркнуть, что речь идет именно о сохранении нечеткого ранжирования. Попытки одновременного сохранения и четкого, и нечеткого ранжирований альтернатив сделают требования к искомому вектору весов избыточными и противоречивыми. Вычисление весов критериев, позволяющих сохранить четкое ранжирование альтернатив, представляет отдельную задачу, не рассматриваемую в данном пункте.

3.2. Идея метода решения.

Утверждение. При $i \neq k$ формула агрегации ранжирований (4) может быть приведена к линейному виду.

Доказательство. Знаменатель дроби всегда положителен, так что его можно перенести в левую часть равенства (умножив обе части равенства на знаменатель дроби):

$$p''(A_i, A_k)\sum_{j=1}^{n} w_j \left| P(A_i, A_k) - 0{,}5 \right| = \sum_{j=1}^{n} w_j \{\max((P(A_i, A_k) - 0{,}5), 0)\}, \ \ i \neq k, \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j (p''(A_i, A_k)\left| P(A_i, A_k) - 0{,}5 \right| - \{\max((P(A_i, A_k) - 0{,}5), 0)\}) = 0, \ \ i \neq k. \quad (6)$$

Таким образом, получим линейное уравнение с n неизвестными. В контексте последней постановки задачи формула (6) приобретет следующий вид:

$$\sum_{j=1}^{n} w_j (g_{ik} \left| d_{ik}^{j} - 0{,}5 \right| - \{\max((d_{ik}^{j} - 0{,}5), 0)\}) = 0, \ \ i \neq k. \quad (7)$$

Теперь, если обозначить выражение (множитель), стоящее после w_j, как b_{ik}^{j}, можно переписать равенство (7) в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{n} w_j b_{ik}^{j} = 0. \quad (8)$$

Утверждение доказано.

Из утверждения следует, что для решения задачи вычисления весов критериев, сформулированной выше, необходимо решить систему из $\frac{m(m-1)}{2}+1$ линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} w_j b_{ik}^{j} = 0, \ i, k = 1 \ldots m, \ i \neq k, \\ \sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \\ w_j > 0, \qquad j = 1 \ldots n. \end{cases} \quad (9)$$

В общем случае система будет избыточной и у нее не будет точного решения. Для нахождения решения такой системы могут применяться известные методы факторного анализа, такие как МГУА, МНК и др. [3].

4. Направления дальнейшего обобщения метода определения важности критериев на основе нечетких ранжирований

В [13] для экспертного оценивания альтернатив по качественным (intangible) критериям применяется лингвистическая шкала из семи делений, предложенная в [14]. Экспертные оценки в этой шкале несут информацию, несколько отличную от информации, содержащейся в четких ранжированиях альтернатив (они позволяют отобразить суждения эксперта наподобие следующего: «Я не уверен, но склонен считать, что первая альтернатива преобладает над второй»). К тому же процедуры агрегации четких [8] и нечетких [11–13] ранжирований различаются между собой, так что результаты вычисления весов критериев на основе нечетких и четких ранжирований также будут разными. Фактически это означает, что задачи определения весов критериев на основе многокритериальных ранжирований альтернатив в случаях, когда ранжирование альтернатив по глобальному критерию является нечетким, составляют отдельный класс, на который нельзя в чистом виде обобщать подходы, изложенные в [1, 2]. Следует рассмотреть промежуточный класс задач, в которых ранжирование альтернатив по глобальному критерию G является четким, а ранжирования по его подкритериям $C_1, C_2, ..., C_n$ — нечеткими (см. постановку задачи, приведенную в разд. 1). В этом случае организатор экспертизы получит возможность зафиксировать неопределенность в суждениях экспертов относительно однокритериальних отношений предпочтений между альтернативами, а веса критериев оценки альтернатив можно будет вычислять с помощью метода, обратного методу Кондорсе (см. разд. 2 данной статьи).

Недостатком существующих процедур нечеткого экспертного ранжирования альтернатив является их сложность. Для ранжирования нечетких чисел предложено довольно много подходов (в частности, в [13–15]). Для построения нечетких ранжирований эксперты должны задавать определенные численные (кардинальные, а не ординальные) значения оценок альтернатив, которые впоследствии используются для построения функций принадлежности. Если бы они вводили значения ординальных парных сравнений альтернатив непосредственно в матрицу (наподобие тех, что фигурируют в методе Кондорсе и в [11]), то процедура была бы существенно проще. В этом случае эксперты могут использовать шкалу предпочтений Саати [16]. Парные сравнения, заданные в этой шкале, могут отображать степень уверенности эксперта в преимуществе одной альтернативы из соответствующей пары над другой (а не само значение парного сравнения). Интересные соображения по этому поводу приведены в [11]: целесообразно предположить, что эксперт более уверен в своей оценке соотношения между альтернативами, которые более существенно отличаются одна от другой.

Одна из наиболее распространенных процедур агрегации парных сравнений, заданных в шкале Саати, — среднее геометрическое (ее преимущества и недостатки описаны, в частности, в [17]). Эту процедуру можно свести к простому взвешенному суммированию, если суждения экспертов выразить как логарифмы значений, заданных в шкале Саати. Данный прием (логарифмирование) позволит обобщить процедуру вычисления весов критериев, обратную «взвешенному» методу Кондорсе (см. разд. 2 данной статьи), на случай, когда эксперты задают однокритериальные ординальные предпочтения на множестве альтернатив не только как 1, 0 или –1, а как значения из всего диапазона от –1 до 1. При этом значения из шкалы Саати $\{1/9; 1/8; \ldots; 1/2; 1; 2; \ldots; 9\}$ преобразуются в $\{\log_9(1/9); \ldots; \log_9 1; \ldots; \log_9 9\}$ или $\{-1; -0{,}95; ...; -0{,}32; 0; 0{,}32; ...; 1\}$. 9 является наибольшим значением в шкале предпочтений Саати, так что это число предлагается избрать в качестве основания логарифма.

Рассмотрим гипотетический численный пример. Допустим, четыре альтернативы $A_1 - A_4$ оцениваются по критериям $C_1 - C_3$ и по глобальному критерию G. При этом глобальное ранжирование четкое, строгое: $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, а оценки альтернатив по критериям $C_1 - C_3$ заданы в виде матриц ординальных парных сравнений, которые отражают предпочтения экспертов и степень их уверенности в этих предпочтениях. Требуется найти вектор весов критериев $C_1 - C_3$, (w_1, w_2, w_3), позволяющий сохранить строгое глобальное ранжирование альтернатив после агрегации однокритериальних матриц ординальных парных сравнений по «взвешенному» правилу Кондорсе. Соответствующие численные значения приведены в таблице.

Таблица

Альтернативы	Критерий C_1				Критерий C_2				Критерий C_3				Ранжирования по критерию G
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_1	A_2	A_3	A_4	A_1	A_2	A_3	A_4	
A_1	0	0,63	1	0,63	0	−0,89	−0,73	−0,95	0	0,95	−0,73	−0,95	4
A_2	−0,63	0	0,32	0	0,89	0	0	0	−0,95	0	−1	−1	3
A_3	−1	−0,32	0	−0,32	0,73	0	0	−0,32	0,73	1	0	−0,32	2
A_4	−0,63	0	0,32	0	0,95	0	0,32	0	0,95	1	0,32	0	1

Используя метод, обратный «взвешенному» правилу Кондорсе, можно найти область допустимых значений (ОДЗ) весов (решение системы неравенств, построенной на основе заданных однокритериальных матриц ординальных парных сравнений). Крайние точки ОДЗ — $W_1 = (0{,}4132,\ 0{,}4174,\ 0{,}1694)$; $W_2 = (0{,}000\ 0{,}3909,\ 0{,}6091)$; $W_3 = (0{,}000\ 0{,}9030,\ 0{,}0970)$; ее центр масс: $W = (0{,}1377,\ 0{,}5704,\ 0{,}2918)$.

В рассмотренных постановках задач предполагается, что иерархия критериев включает два уровня: на верхнем (нулевом) находится глобальный критерий G, а на первом — его подкритерии $C_1, C_2, \dots, C_n$. Если иерархия содержит больше уровней и имеет древовидную структуру (у каждого критерия в графе иерархии не больше одного «предка»), то приведенные в данной статье методы решения следует применять в совокупности с подходом, описанным в [18]. Если иерархия имеет структуру типа «сеть» (каждый критерий может быть подкритерием нескольких критериев), задачу определения весов критериев следует решать для каждого отдельного фрагмента иерархии (заданного критерия и его подкритериев).

Заключение

Предложено обобщение методов определения весов критериев на основе опыта многокритериального ординального оценивания альтернатив на случай, когда экспертные оценки заданы в виде нечетких ранжирований. Нечеткие ранжирования позволяют зафиксировать неопределенность экспертных суждений и несут информацию, несколько отличную от информации, содержащейся в четких ранжированиях. Также различаются между собой и процедуры агрегации четких и нечетких ранжирований. Поэтому проблематично сравнивать результаты методов, использующих в качестве исходных данных только четкие или только нечеткие оценки.

В некотором смысле нечеткие ранжирования более информативны, но процедура получения нечетких ранжирований более трудоемкая и требует значительных усилий от экспертов и организаторов экспертиз (инженеров по знаниям), даже если большая часть операций выполняется программно. Поэтому в статье предложена идея упрощения процесса получения нечетких экспертных ранжирований с использованием инструментария метода анализа иерархий Т. Саати.

Ни одна из процедур агрегации индивидуальных и однокритериальных ранжирований не позволяет избежать парадоксов (как показано Эрроу в [19]). Тем не менее имеет смысл использовать четкие и нечеткие ранжирования в качестве исходных данных для вычисления коэффициентов весомости критериев, по которым оцениваются альтернативы, в случае, когда эти коэффициенты проблематично получить другими способами.

Процедура вычисления весов на основе четких многокритериальных ранжирований позволяет найти область допустимых значений векторов весов, которые сохраняют ранжирование альтернатив по глобальному критерию после взвешенного суммирования рангов альтернатив (по правилу Борда) или значений ординальных парных сравнений (по правилу Кондорсе). Задача вычисления весов критериев на основе нечетких ранжирований альтернатив по нескольким критериям (как и аналогичная задача для случая четких ранжирований) может быть сведена к задаче линейного программирования, но ее решением будет одна точка (вектор), а не область (как в случае четких ранжирований).

Процедуры вычисления весов критериев на основе опыта четкого и нечеткого многокритериального ранжирования альтернатив целесообразно использовать в качестве инструментария математического обеспечения существующих и новых систем поддержки принятия решений. Применение описанных подходов позволит расширить функциональные возможности этих систем.

С.В. Каденко

ВИЗНАЧЕННЯ ВІДНОСНИХ ВАГ КРИТЕРІЇВ ОЦІНКИ АЛЬТЕРНАТИВ НА ОСНОВІ ЧІТКИХ ТА НЕЧІТКИХ РАНЖУВАНЬ

Запропоновано підхід до обчислення ваг критеріїв оцінки альтернатив на основі досвіду їхнього багатокритеріального ранжування. Вважається, що у випадку, коли експерту важко оцінити альтернативи та ваги критеріїв кардинально, чи шляхом відповідних парних порівнянь, можна шукати ваги критеріїв на основі попереднього досвіду ординального оцінювання альтернатив за заданими критеріями. Описано ідею та декілька модифікацій методу обчислення ваг, а також шляхи його узагальнення на випадок, коли експертні оцінки задано у вигляді нечітких ранжувань альтернатив.

S.V. Kadenko

DEFINING RELATIVE WEIGHTS OF ALTERNATIVE ESTIMATION CRITERIA BASED ON NON-FUZZY AND FUZZY RANKINGS

An approach to alternative estimation criteria weights' calculation based on multi-criteria alternative rankings is suggested. It is assumed that in the case when it is problematic for experts to estimate alternatives and criteria weights cardinally and/or build respective pair comparison matrices while decision-making, it is possible to find criteria weights based on previous experience of ordinal alternative estimation according to given criteria. Criterion weight calculation method and ways of its extension to fuzzy rankings, as well as several method modifications are described.

1. *Каденко С.В.* Удосконалення методу визначення коефіцієнтів відносної вагомості критеріїв на основі ординальних оцінок // Реєстрація зберігання і обробка даних. — 2008. — **10**, № 1. — С. 137–149.
2. *Каденко С.В., Циганок В.В.* Про один підхід до прийняття кадрових рішень // Там же. — 2009. — **11**, № 3. — С. 66–74.
3. *Тоценко В.Г.* Методы и системы поддержки принятия решений. Алгоритмический аспект. — Київ : Наук. думка, 2002. — 382 с.
4. *Циганок В.В.* Вибір шкали оцінювання експертом у процесі виконання ним парних порівнянь у системах підтримки прийняття рішень // Реєстрація зберігання і обробка даних. — 2011. — **13**, № 3. — С. 92–105.

5. *Експериментальний* аналіз технології експертного оцінювання / В.В. Циганок, П.Т. Качанов, С.В. Каденко, О.В. Андрійчук, Г.А. Гоменюк // Там же. — 2012. — **14**, № 1. — С. 91–100.
6. *Keeney R.L., Raiffa H.* Decisions with multiple objectives: preferences and value tradeoffs. — New York : Cambridge University Press, 1993. — 540 p.
7. *Кини Р.Л., Райфа Х.* Принятие решений при многих критериях предпочтения и замещения. — М. : Радио и связь. — 1981. — 560 с.
8. *Тоценко В.Г.* Методы определения групповых многокритериальных ординальных оценок с учетом компетентности экспертов // Проблемы управления и информатики. — 2005. — № 5. — С. 84–89 / *Totsenko V.G.* Method of determination of group multicriteria ordinal estimates with account of expert competence // J. of Automat. and Inform. Sci. — 2005 — **37**, N 10. — P. 19–23.
9. *Литвак Б.Е.* Экспертная информация. Методы получения и анализа. — М. : Радио и связь, 1982. — 185 с.
10. *Цыганок В.В., Каденко С.В.* О достаточности согласованности групповых ординальных оценок // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2010. — № 4. — С. 107–112 / *Tsyganok V.V., Kadenko S.V.* On sufficiency of the consistency level of group ordinal estimates // Journ. of Automat. and Inform. Sci. — 2010. — **42**, N 8. — P. 42–47.
11. *Tanino T.* Fuzzy preference orderings in group decision-making // Fuzzy Sets and Systems. — 1984. — N 12. — P. 117–131.
12. *Tseng T.Y., Klein C.M.* New algorithm for the ranking procedure in fuzzy decision-making // IEEE Transact. on Systems, Man and Cybernetics. — 1989. — **19**, N 5. — P. 1289–96.
13. *Jiao J., Tseng M.M.* Fuzzy ranking for concept evaluation in configuration design for mass customization // Concurrent Engineer.: Research and Appl. — 1998. — **6**, N 3. — P. 189–206.
14. *Chen, S.J. et al.* Fuzzy multiple attribute decision making: methods and applications. — Berlin; Hong Kong : Springer-Verlag, 1992. — 536 p.
15. *Deep K., Kansal M.L., Singh K.P.* Ranking of alternatives in fuzzy environment using integral value // Journ. of Mathemat., Statistics and Allied Fields. — 2007. — **1**, N 2. — http://www.scientificjournals.org/ journals2007/articles/1234.pdf.
16. *Saaty T.L.* The analytic hierarchy process: planning, priority setting, resource allocation. — N.Y. : McGraw Hill, 1980. — 287 p.
17. *Choo, E.U., Wedley W.C.* A common framework for deriving preference values from pairwise comparison matrices // Comput. and Oper. Res. — 2004. — **31**. — P. 893–908.
18. *Каденко С.В.* Определение параметров иерархии критериев типа «дерево» на основе ординальных оценок // Проблемы управления и информатики. — 2008. — № 4. — С. 84–92 / *Kadenko S.V.* Determination of parameters of criteria of «tree» type hierarchy on the basis of ordinal estimates // Journ. of Automat. and Inform. Sci. — 2008. — **40**, N 8. — P. 7–15.
19. *Arrow K.J.* Social choice and individual values: 2nd ed. — New York : Wiley, 1963. — 123 p.

Получено 09.04.2012