УДК 517.97

*Ф.А. Алиев, А.А. Нифтиев, Дж.И. Зейналов*

# ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА ОТНОСИТЕЛЬНО ЭВОЛЮЦИИ ОБЛАСТИ

## Введение

Широкий класс практических задач приводит к изучению изменения формы рассматриваемого объекта или тела относительно времени [1, 2]. Примерами таких задач являются диффузионные процессы, задачи расширения или распрямления тела за счет тепла, задачи теории упругости, экологические задачи, задача распространения нефтяного пятна на поверхности моря, биологические процессы и т.д.

При исследовании этих задач, как правило, изучаются изменения местоположения точек тела относительно времени. Однако часто представляет интерес не изменение положения точек тела, а изменение его формы. Изучение задачи в такой постановке связано с некоторыми математическими трудностями; это, в первую очередь, определение скорости изменения области, характеризирующей форму тела.

В настоящей работе рассматривается задача оптимального синтеза, относительно эволюции области. Получена формула для решения задачи синтеза оптимальной системы с обратной связью.

Для исследования этих задач в работе определяется скорость изменения формы области в линейном пространстве пар выпуклых множеств. Данное определение изменения области дает возможность исследовать широкий класс таких практических задач, как задачи оптимального управления.

## Пространство выпуклых множеств

Пусть $M$ — совокупность выпуклых замкнутых ограниченных множеств в $R^r$. Функция

$$P_D(x) = \sup_{l \in D}(l,\, x), \quad x \in D, \tag{1}$$

называется опорной функцией множества $D \in M$, где $P_D(x)$ — непрерывно-выпукла и положительно однородна [3]. Последнее означает, что $P_D(\lambda x) = \lambda P_D(x)$, $\lambda > 0$ (отметим, что $P_D(0) = 0$). Формула (1) сопоставляет каждому выпуклому замкнутому ограниченному $D \in M$ выпуклую, непрерывную, положительно однородную функцию $P_D(x)$. Верно и обратное: для каждой непрерывно выпуклой, положительно однородной функции $P(x)$ существует единственное замкнутое выпуклое ограниченное множество $D \in M$ такое, что $P(x) = P_D(x)$. Множество $D$ совпадает с субдифференциалом функции $P(x)$ в точке $0 \in R^n$ [3].

Рассмотрим прямое произведение $M \times M$, т.е. совокупность пар $(A, B)$, где $A, B \in M$. Определим в $M \times M$ операции сложения и умножения на вещественное число:

$$(A,\, B) + (C,\, D) = (A + C,\, B + D),$$

$$\lambda(A,\, B) = (\lambda A,\, \lambda B), \text{ если } \lambda \ge 0,$$

$$\lambda(A,\, B) = (|\lambda| B,\, |\lambda| A), \text{ если } \lambda < 0.$$



ISSN 0572-2691

Введем в $M \times M$ отношение эквивалентности: пары $(A, B)$ и $(C, D)$ эквивалентны, если $A + D = B + C$. Обозначим это как $(A, B) \approx (C, D)$ или $(A, B) = (C, D)$. В [3] показано, что множество $M \times M$ вместе с определенными выше алгебраическими операциями является линейным пространством.

Пусть $a = (A_1, A_2)$, $b = (B_1, B_2)$, $A_i, B_i \in M$, $i = 1, 2$, $B$ — единичный шар, $S_B = \partial B$ — единичная сфера. Скалярное произведение $a \cdot b$ в $M \times M$ определим следующим образом:

$$a \cdot b = \int_{S_B} p(x)\, q(x)\, ds. \tag{2}$$

Здесь $p(x) = P_{A_1}(x) - P_{A_2}(x)$, $q(x) = P_{B_1}(x) - P_{B_2}(x)$, $P_{A_i}(x)$, $P_{B_i}(x)$ — опорные функции множеств $A_i, B_i$, $i = 1, 2$, соответственно.

Показано, что $a \cdot b$ удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения. Пространство $M \times M$ со скалярным произведением (2) обозначим $ML_2$. Расстояние в этом пространстве между множествами $A \in M$ и $B \in M$ определяется как норма элемента $a = (A, 0) - (B, 0) = (A, B)$,

$$\|a\|_{ML_2} = \sqrt{a \cdot a} = \left( \int_{S_B} [P_A(x) - P_B(x)]^2\, ds \right)^{1/2}. \tag{3}$$

Пусть $z = [z_1, z_2, ..., z_n]$, $y = [y_1, y_2, ..., y_n]$ — векторы, где $z_i, y_i \in M \times M$. В этом случае скалярное произведение и норма определяются следующим образом:

$$z \cdot y = z_1 \cdot y_1 + z_2 \cdot y_2 + ... + z_n \cdot y_n,$$

$$\|z\|^2 = \|z_1\|^2 + \|z_2\|^2 + ... + \|z_2\|^2.$$

Для простоты вместо $z \in ML_2^{(n)}$ запишем $z \in ML_2$.

Пусть в момент времени $t \in [0, T]$ изучаемая область имеет форму $D(t)$. При изменении $t$ область $D(t)$ также меняется. Скорость изменения области $D(t)$ характеризуется величиной

$$\frac{\partial P_{D(t)}(x)}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{D(t+\Delta t)}(x) - P_{D(t)}(x)}{\Delta t}, \quad x \in S_B. \tag{4}$$

Если существуют области $V_1(t), V_2(t) \in M$, $t \in [0, T]$, такие, что

$$\frac{\partial P_{D(t)}(x)}{\partial t} = P_{V_{1(t)}}(x) - P_{V_{2(t)}}(x),$$

то величину $\dot{z}(t) = (V_1(t), V_2(t)) \in M \times M$ будем называть скоростью изменения области $D(t)$. Например, если $D(t) = B_t$ является шаром с радиусом $t$, с центром в начале координат, то $P_{D(t)}(x) = t \cdot \|x\|_{R^r}$. Тогда $\dot{z}(t) = (B_1, 0)$.

Если $D(t)$ — прямоугольник

$$D(t) = \{(x_1, x_2) : 0 \le x_1 \le 2t,\ 0 \le x_2 \le t\},$$

то $\dot{z}(t) = (D(1), 0)$.

Для любого $t$ рассмотрим пару $z(t) = (D_1(t), D_2(t)) \in M \times M$. Записывая

$$z(t) = z_1(t) - z_2(t) = (D_1(t), 0) - D_2(t), 0)$$

и предполагая, что $\dot{z}_1(t), \dot{z}_2(t) \in M \times M$, аналогично определим $\dot{z}(t) = \dot{z}_1(t) - \dot{z}_2(t) \in \in M \times M$.

Можно показать, что для любых $z(t), \eta(t) \in M \times M$, в которых $\|\dot{z}(t)\| \in L_2(t_0, T)$, $\|\dot{\eta}(t)\| \in L_2(t_0, T)$, верно соотношение

$$\int_{t_0}^{T} \dot{z}(t) \cdot \eta(t)\, dt = z(T) \cdot \eta(T) - z(t_0) \cdot \eta(t_0) + \int_{t_0}^{T} z(t) \cdot \dot{\eta}(t)\, d(t). \quad (5)$$

**Постановка задачи и основные результаты**

Пусть движение объекта описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{z}(t) = A(t)\, z(t) + B(t)\, u(t), \quad 0 < t \le T, \quad (6)$$

с начальными условиями

$$z(0) = z_0. \quad (7)$$

Нужно найти такой регулятор цепи обратной связи $u(t) = K(t)\, z(t)$, который минимизировал бы функционал

$$J = \int_0^T [z'(t) \cdot L(t)\, z(t) + u'(t) \cdot R(t)\, u(t)]\, dt + z'(T) \cdot Qz(T). \quad (8)$$

Здесь $z(t)$ — $n$-мерный вектор фазовых координат объекта, $u(t)$ — $m$-мерный вектор управляющих воздействий $A(t)$ — $n \times n$, $B(t)$ — $n \times m$, $L(t) = L'(t) \ge 0$ $n \times n$, $R(t) = R'(t) > 0$ — $m \times m$-мерные матрицы функции.

Если

$$z(t) = [z_1(t), z_2(t), ..., z_n(t)], \quad u(t) = [u_1(t), u_2(t), ...., u_m(t)]$$

и $z_i(t) = (Z_i^{(1)}(t), Z_i^{(2)}(t)) \in M \times M$, $u_i(t) = (U_i^{(1)}(t), U_i^{(2)}(t)) \in M \times M$, то уравнения (6), (7) можно записать в эквивалентной форме:

$$\frac{\partial P_{z(t)}(x)}{\partial t} = A(t)\, P_{z(t)}(x) + B(t)\, P_{u(t)}(x), \quad x \in S_B, \quad (9)$$

где $P_z = [P_{z_1}, P_{z_2}, ..., P_{z_n}]$, $P_u = [P_{u_1}, P_{u_2}, ..., P_{u_m}]$, $P_{z_i(t)}(x) = P_{Z_i^{(1)}(t)}(x) - P_{Z_i^{(2)}(t)}(x)$, $P_{u_i(t)}(x) = P_{U_i^{(1)}(t)}(x) - P_{U_i^{(2)}(t)}(x)$.

Предположим, что все эти матрицы непрерывны на $[0, T]$. Для простоты изложения рассмотрим случай $R(t) = I$. Из дальнейшего изложения будет видно, что полученный результат можно обобщать для любой положительно-определенной матрицы $R(t)$. Обозначим через $U$ класс функции $u(t) \in M \times M$, $0 \le t \le T$, удовлетворяющей условию $\|u(t)\| \in L_2(0, T)$.

**Теорема 1.** Пусть $z_0 \in M \times M$. Тогда для любого $u(t) \in U$ существует единственное решение задачи (6), (7) из $M \times M$.

*Доказательство.* Пусть $W = W(t)$ — фундаментальная матрица уравнений

$$\dot{W}(t) = A(t) W(t). \quad (10)$$

Полагая, что $H(t, s) = W(t) \cdot W^{-1}(s)$, рассмотрим

$$P(x; t) = H(t, 0) P_{z_0}(x) + \int_0^t H(t, s)\, P_{u(s)}(x)\, ds. \quad (11)$$

 ISSN 0572-2691

Заметим, что $P(x;t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{P}(x;t) = A(t)\,P(x;t) + B(t)\,P_{u(t)}(x) \tag{12}$$

и начальному условию

$$P(x;0) = P_{z_0}(x). \tag{13}$$

Из вида функции (11) видно, что $P(x;t)$ положительно однородна по $x \in R$, т.е.

$$P(\lambda x;t) = \lambda P(x;t), \quad \lambda \ge 0.$$

Ясно, что при налагаемых условиях $\left|H(t,s)\right| \le N \ \forall t, s \in [t_0, T]$. Соотношение (11) напишем в эквивалентной форме

$$P(x;t) = [H(t,0)+N]P_{z_0}(x) + \int_0^t [H(t,s)+N]P_{u(s)}(x)\,ds - NP_{z_0}(x) - N\int_0^t P_{u(s)}(x)\,ds.$$

Учитывая, что $z_0 \in M \times M$, $u(t) \in M \times M$, т.е. $z_0 = (Z_0^{(1)}, Z_0^{(2)})$ и $u(t) = (U_1, U_2)$, можно записать $P_{z_0}(x) = P_{Z_0^{(1)}}(x) - P_{Z_0^{(2)}}(x)$, $P_u(x) = P_{U_1}(x) - P_{U_2}(x)$. Тогда

$$P(x;t) = [H(t,0)+N][P_{Z_0^{(1)}}(x) - P_{Z_0^{(2)}}(x)] + \int_0^t [H(t,s)+N][P_{U_1(s)}(x) - P_{U_2(s)}(x)]\,ds$$

$$- N[P_{Z_0^{(1)}}(x) - P_{Z_0^{(2)}}(x)] - N\int_0^t [P_{U_1(s)}(x) - P_{U_2(s)}(x)]\,ds = P_1(x;t) - P_2(x;t),$$

где

$$P_1(x;t) = [H(t,0)+N]P_{Z_0^{(1)}}(x) + \int_0^t [H(t,s)+N]P_{U_1(s)}(x)\,ds + NP_{Z_0^{(2)}}(x) + N\int_0^t P_{U_2(s)}(x)\,ds,$$

$$P_2(x;t) = [H(t,0)+N]P_{Z_0^{(2)}}(x) + \int_0^t [H(t,s)+N]P_{U_2(s)}(x)\,ds + NP_{Z_0^{(1)}}(x) + N\int_0^t P_{U_1(s)}(x)\,ds.$$

Учитывая, что $H(t,0)+N \ge 0$, $H(t,s)+N \ge 0$, нетрудно показать выпуклость и положительную однородность $P_i(x;t)$, $i=1,2$. Тогда для любого $t \in [t_0, T]$ существуют $Z_1(t), Z_2(t) \in M$ такие, что $P_i(x;t) = P_{Z_i(t)}(x)$, $i=1,2$. Значит,

$$P(x;t) = P_{Z_1(t)}(x) - P_{Z_2(t)}(x).$$

Так как $P(x,t)$ — решение задачи (12), (13), $z = (Z_1(t), Z_2(t)) \in M \times M$ — решение задачи (6), (7).

Теорема доказана.

Рассмотрим матричное дифференциальное уравнение Риккати:

$$\dot{S}(t) = -A'(t)\,S(t) - S(t)\,A(t) + S(t)\,B(t)\,B'(t)\,S(t) - L(t). \tag{14}$$

Поскольку это уравнение нелинейное, неясно, может ли при заданном начальном условии $S(0) = S_0$ существовать решение. Оказывается, что определение условий существования минимума функционала (8) и вычисление оптимального управления связано с решением уравнения Риккати (14).

**Теорема 2.** Пусть на отрезке $[0,T]$ существует решение уравнения Риккати (10) с начальным условием $S(T) = Q$. Тогда существует управление $u(t)$, которое дает минимум критерию качества (8) для системы (6), (7). Минимальное значение функционала (8) равно $z_0' \cdot S(0)\, z_0$. Минимизирующее управление в виде обратной связи имеет вид

$$u(t) = -B'(t)\, S(t)\, z(t). \tag{15}$$

*Доказательство.* Ясно, что

$$\int_0^T \frac{d}{dt}[\dot{z}(t) \cdot S(t)\, z(t)]\, dt = \dot{z}(t) \cdot S(t)\, z(t) \Big|_0^T,$$

или подробнее

$$\int_0^T [z'(t) \cdot \dot{S}(t)\, z(t)\, z'(t) + \dot{z}'(t) \cdot S(t)\, z(t) + z'(t) \cdot S(t)\, \dot{z}(t)]\, dt - z'(t) \cdot S(t)\, z(t) \Big|_0^T = 0.$$

Учитывая уравнения (6), имеем

$$\int_0^T [z'(t) \cdot \dot{S}(t)\, z(t) + (z'(t)\, A'(t) + u'(t)\, B'(t)) \cdot S(t)\, z(t) + z'(t) \cdot S(t)(A(t)\, z(t) + B(t)\, u(t))]\, dt -$$

$$- z'(t) \cdot S(t)\, z(t) \Big|_0^T = 0. \tag{16}$$

Добавив тождество (16) к функционалу (8) (так как правая сторона равна нулю), получим

$$J = \int_0^T [z'(t) \cdot L(t)\, z(t) + u'(t) \cdot u(t) + z'(t) \cdot \dot{S}(t)\, z(t) + (z'(t)\, A'(t) + u'(t)\, B'(t)) \cdot S(t)\, z(t) +$$

$$+ z'(t) \cdot S(t)(A(t)\, z(t) + B(t)\, u(t)]\, dt + z'(T) \cdot Qz(T) - z'(T) \cdot S(T)\, z(T) + z' \Big| (0) \cdot S(0)\, x(0). \tag{17}$$

Принимая во внимание, что $S(t)$ является решением уравнения (14) с начальным условием $S(T) = Q$, получим

$$J = \int_0^T [z'(t) \cdot S(t)\, B(t) u(t) + u'(t)\, B'(t) \cdot S(t)\, z(t) + u'(t) \cdot u(t)[\, dt +$$

$$+ z'(t)\, S(t)\, B(t) \cdot B'(t)\, S(t)\, z(t)) + z_0' \cdot S(0)\, z_0.$$

Отсюда видно, что

$$J = \int_0^T \left\| u(t) + B'(t)\, S(t)\, z(t) \right\|^2 dt + z_0' \cdot S(0)\, z_0. \tag{18}$$

Минимум функционала $J$ равен $z_0' \cdot S(0)\, z_0$ и достигается он в том и только в том случае, когда интеграл равен нулю. Поэтому оптимальное управление запишем $u(t) = -B'(t)\, S(t)\, z(t)$, т.е. $K(t) = -B'(t)\, S(t)$.

Теорема доказана.

Подставляя (15) в уравнение (6), получаем уравнение для оптимальной траектории

$$\dot{z}(t) = [A(t) - B(t)\, B'(t)\, S(t)]\, z(t). \tag{19}$$

*Следствие.* Если $H(t, s)$ — импульсная матрица этого уравнения, то оптимальное управление выражается равенством

$$u(t) = -B'(t)\, S(t)\, H(t, 0)\, z_0. \tag{20}$$

Полученная формула (15) или формула (20) дает решение задачи синтеза оптимальной системы с обратной связью.

 ISSN 0572-2691

**Пример.** Рассмотрим следующие задачи:

$$\dot{z}(t) = -u(t), \quad 0 < t \le T, \quad z(0) = z_0,$$

$$J = \int_0^T \|u(t)\|^2 dt + \|x(T)\|^2 \to \min.$$

Пусть $D_0 \in M$ — некоторая выпуклая область и $z_0 = (D_0, 0)$. Уравнение Риккати $\dot{S}(t) = S^2(t)$, $S(T) = 1$ имеет решение $S(t) = 1/(T+1-t)$. Тогда для $z = z(t)$ получаем уравнение $\dot{z}(t) = \dfrac{z(t)}{T+1-t}$, $z(0) = z_0$. Отсюда имеем $z(t) = \dfrac{1+T-t}{T+1}(D_0, 0)$. Для оптимального управления получим выражение $u(t) = \dfrac{1}{T+1}(D_0, 0)$.

*Ф.А. Алієв, А.А. Ніфтієв, Дж.І. Зейналов*

## ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗУ ВІДНОСНО ЕВОЛЮЦІЇ ОБЛАСТІ

Розглянуто задачу оптимального синтезу, пов’язану зі змінами форми області. Стан системи описується системою диференціальних рівнянь відносно пари областей. Показано, що умови існування мінімуму функціонала, що розглядається, і обчислення оптимального керування за вхідними даними пов’язані з розв’язанням рівняння Ріккаті.

*F.A. Aliev, A.A. Niftiyev, G.I. Zeynalov*

## OPTIMAL SYNTHESIS PROBLEM RELATIVE TO DOMAIN EVOLUTION

Optimal synthesis problem related to variation of the domain form is considered. The system state is described by the system of differential equations with respect to the pair of domains. It is shown that conditions of the existence of the considered functional minimum and calculation of the optimal control by the output data is connected with the solution of Riccati matrix differential equation.

1. *Троцкий В.А., Петухов Л.В.* Оптимизация формы упругих тел. — М. : Наука, 1982. — 432 с.
2. *Муравей Л.А.* Задача управления границей для эллиптических уравнений // Вест. Москов. ун-та. Сер. 15. Вычисл. математика. и киберн. — 1998. — № 3. — С. 7–13.
3. *Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциального исчисления. — М. : Наука, 1990. — 400 с.
4. *Нифтиев А.А., Гасымов Ю.С.* Управление границами и задачи на собственные значения с переменной областью. — Баку : Изд-во БГУ, 2004. — 185 с.
5. *Нифтиев А.А., Ахмедов Э.Р.* Вариационная постановка обратной задачи относительно области // Диф. уравнения. — 2007. — **43**, № 10. — С. 1410–1416.
6. *Aliev F.A., Larin V.B.* Optimization of linear control system. — London : Gordon and Breach, 1998. — 270 p.
7. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерным и линейными объектами. — М. : Наука, 1976, — 424 с.
8. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. — М. : Наука, 1981. — 400 с.
9. *Aliev F.A., Cengiz C.A., Larin V.B., Safarova N.A.* Synthesis problem for periodic systems by static output feedback // Appl. and Comput. Mathemat. — 2005. — **4**, N 2. — P. 102–113.
10. *Aliev F.A., Velieva N.I., Safarova N.A., Niftili A.A.* Methods for solving of stabilization problem of the discrete periodic system with respect to output variable // Ibid. — 2007. — **6**, N 1. — P. 27–38.

*Получено 18.04.2011*