УДК 517.954:532.546

В.М. Булавацкий, Ю.Г. Кривонос

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ГЕОМИГРАЦИОННЫХ ЗАДАЧ В РАМКАХ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Введение

Математическое моделирование сложных миграционных процессов является одним из актуальных предметных направлений геоинформатики, геоматематики, геоэкологии, которое развивается в настоящее время преимущественно в рамках классических постановок задач на основе общепринятых подходов теории сплошной среды и математической физики [1, 2]. При этом общеизвестные математические модели процессов переноса в геопористых средах базируются на классических законах переноса, являющихся неадекватными в условиях существенного отклонения системы от равновесного состояния [3, 4]. Кроме того, в классических моделях переноса постулированы такие весьма жесткие ограничения, как бесконечная скорость распространения возмущений, что противоречит современным физическим представлениям. В связи с этим актуальна проблема построения новых, более адекватных математических моделей процессов переноса, базирующихся на законах переноса, справедливых в условиях существенного отклонения от равновесного состояния. Указанное особенно важно в связи с проблемами охраны окружающей среды, в частности, при математическом моделировании процессов диффузии загрязняющих веществ в подземных фильтрационных потоках, а также моделировании процессов консолидации грунтовых оснований накопителей промышленных стоков, заполненных вредными для окружающей среды компонентами.

Проявляющиеся в сложных условиях протекания локально-неравновесные свойства геомиграционного процесса обусловлены рядом причин объективного характера, в частности, сложностью пространственно-временной структуры геосреды, ее микронеоднородностью, кавернозностью, релаксационными свойствами пористого скелета и насыщающих жидкостей, многофазностью состава, неизотермичностью процессов, влиянием геохимических факторов и т.д. [3]. Следует отметить, что локально-неравновесные диффузионные процессы имеют место также в высокоэнергетической плазме, при переносе во фрактальных средах и аморфных полупроводниках, полимерах, биологических системах, случайных и разреженных средах.

Попытки теоретического учета эффектов неравновесности (в частности, эффектов памяти и пространственных корреляций) в рамках классических математических моделей приводят к интегро-дифференциальным уравнениям, ядро которых содержит информацию о природе неравновесности. При решении этих уравнений интегральные операторы разлагаются в ряды дифференциальных операторов, имеющих возрастающие показатели порядка дифференцирования, поэтому при отсутствии надлежащего малого параметра этот подход оказывается не эффективным [5]. Эффективный подход в описании процессов переноса в системах, для которых важен учет нелокальных пространственно-временных свойств, связан с использованием аппарата интегро-дифференцирования дробного порядка, в рамках которого удается получить ряд новых важных результатов [6–8]. При этом особую актуальность приобретают исследования в области математического моделирования динамики геомиграции солевых растворов в пористых средах (в частности, фрактальной структуры) в условиях как временной, так и пространственной неравновесности, что важно например, при решении многих сложных задач защиты подземных водных ресурсов от зягрязнений промышленными или бытовыми стоками. В связи с этим в работе [9] построены некоторые новые дробно-дифференциальные математические модели для описания процессов переноса в условиях временной неравновесности, а в [10] построена и изучена дробно-дифференциальная математическая модель переменного порядка для описания динамики локально-неравновесного во времени фильтрационно-консолидационного процесса в геомассиве, насыщенном солевым раствором. Численное моделирование в задаче комплексного учета влияния временной и пространственной неравновесности на динамику протекания геомиграционного процесса выполнено в [11].

В данной работе изложен подход к математическому моделированию (в рамках дробно-дифференциального анализа) динамики процессов геомиграции солевых растворов в глинистых геопористых средах в условиях временной и одновременно пространственной неравновесности. Получены замкнутые численно-аналитические решения (непрерывные по временной и дискретные по геометрической переменной) соответствующих задач теории неравновесной геомиграции, поставленных в рамках математических моделей с производными Капуто и Хильфера.

1. Дробно-дифференциальная математическая модель динамики локально-неравновесного во времени и пространстве геомиграционного процесса

Рассмотрим сначала математическую модель геомиграционного процесса в насыщенной солевым раствором геопористой среде в предположении лишь временной неравновесности процесса. В этом случае будем исходить из следующего обобщения классических законов переноса Дарси и Фика на случай наличия временной неравновесности:

$$u_x = D_t^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial x}(-kH + \nu C), \tag{1}$$

$$q_C = D_t^{1-\alpha}\left(-d\frac{\partial C}{\partial x} + CJ_t^{1-\alpha}u_x + \gamma d_u \frac{\partial H}{\partial x}\right), \tag{2}$$

где u_x — скорость геофильтрации; $H(x,t) = p/\gamma$ — избыточный напор; p — поровое давление; γ — плотность жидкости; $C(x,t)$ — концентрация солей в жидкой фазе; k — коэффициент фильтрации; ν — коэффициент химического осмоса; q_C — диффузионный поток; d — коэффициент конвективной диффузии; d_u — коэффициент ультрафильтрации; $J_t^{1-\alpha}$ — дробный интеграл Римана–Лиувилля порядка $1-\alpha$ $(0<\alpha\le 1)$; $D_t^{1-\alpha}$ — оператор дробного дифференцирования Римана–Лиувилля того же порядка по переменной t [7, 12].

Отсюда, с учетом уравнения неразрывности фильтрационного потока и соотношения баланса массы солей в жидкой фазе [13], получаем систему уравнений математической модели неравновесного во времени геомиграционного процесса солевого раствора при наличии химического осмоса и ультрафильтрации в виде

$$D_t^{(\alpha)}H = C_\upsilon \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \tag{3}$$

$$\sigma D_t^{(\alpha)} C = d\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(C\frac{\partial}{\partial x}(kH - \nu C)\right) - \gamma d_u \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \tag{4}$$

где C_υ — коэффициент консолидации геомассива [14]; σ — пористость геосреды; $\mu = \frac{\nu C_\upsilon}{k}$; $D_t^{(\alpha)}$ — оператор регуляризованной дробной производной порядка α по переменной t [7, 12].

Рассматривая далее локально-неравновесный фильтрационно-консолидационный процесс в глинистых геопористых массивах, насыщенных солевыми растворами, отметим, что ввиду малых скоростей фильтрации можно пренебречь в первом приближении вторым слагаемым в правой части уравнения (4). В результате указанной линеаризации получаем математическую модель для описания динамики фильтрационно-консолидационного процесса (с учетом химического осмоса и ультрафильтрации) в насыщенном солевым раствором глинистом геопористом основании, базирующуюся на следующей системе уравнений:

$$D_t^{(\alpha)} H = C_\upsilon \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \tag{5}$$

$$\sigma D_t^{(\alpha)} C = d\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \gamma d_u \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}. \tag{6}$$

Отсюда, в частности, при $\alpha \to 1$ получаем систему уравнений динамики равновесного процесса геомиграции солевых растворов в классической постановке [15]:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = C_\upsilon \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \tag{7}$$

$$\sigma \frac{\partial C}{\partial t} = d\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \gamma d_u \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}. \tag{8}$$

Распространяя систему уравнений модели с памятью (5), (6) на случай учета также пространственной неравновесности геомиграционного процесса, вместо системы (5), (6) в дальнейшем будем моделировать динамику изучаемого процесса на основе следующей системы уравнений:

$$D_t^{(\alpha)} H = D_x^{(\beta)} (C_\upsilon H - \mu C), \tag{9}$$

$$\sigma D_t^{(\alpha)} C = D_x^{(\beta)} (dC - \gamma d_u H), \tag{10}$$

где $D_x^{(\beta)} u(x)$ — производная Капуто [7] функции $u(x)$ порядка β $(1 < \beta \le 2)$.

На основе результатов работы [12] можно показать, что из (9)–(11) при $\beta \to 2$, как частный случай, следует система уравнений модели (5), (6).

2. Постановка и численно-аналитическое решение геомиграционной задачи

В рамках рассматриваемой дробно-дифференциальной математической модели моделирование динамики локально-неравновесного во времени и пространстве изотермического геоконсолидационного процесса в насыщенной солевым раствором глинистой геосреде в случае, например, массива конечной мощности l с проницаемыми гранями сводится к решению в области $(0, l) \times (0, \infty)$ системы уравнений (9), (10) при следующих условиях:

$$H(0, t) = 0, \; H(l, t) = 0, \tag{11}$$

$$C(0, t) = C_0, \; C(l, t) = 0, \tag{12}$$

$$H(x, 0) = H_0, \; C(x, 0) = 0, \tag{13}$$

где H_0 — начальное значение избыточного напора в массиве; C_0 — заданное значение концентрации солей на входе фильтрационного потока.

Введем в рассмотрение безразмерные переменные и параметры в соответствии с соотношениями

$$x' = \frac{x}{l},\ t' = \left(\frac{C_\upsilon}{l^\beta}\right)^{1/\alpha} t,\ C' = \frac{C}{C_0},\ H' = \frac{H}{H_0},\ \mu' = \frac{\mu C_0}{C_\upsilon H_0},$$

$$a_1' = \frac{d}{\sigma C_\upsilon},\ a_2' = \frac{\gamma d_u H_0}{\sigma C_\upsilon C_0}. \tag{14}$$

Переходя в соотношениях (9)–(13) к безразмерным переменным согласно соотношениям (14) и опуская в дальнейшем знак «штрих» над безразмерными величинами, получаем следующую задачу:

$$D_t^{(\alpha)} H = D_x^{(\beta)} (H - \mu C), \tag{15}$$

$$D_t^{(\alpha)} C = D_x^{(\beta)} (a_1 C - a_2 H), \tag{16}$$

$$H(0,t) = 0,\ H(1,t) = 0,\ H(x,0) = 1, \tag{17}$$

$$C(0,t) = 1,\ C(1,t) = 0,\ C(x,0) = 0. \tag{18}$$

Умножив уравнение (15) на неопределенный действительный коэффициент q и сложив полученный результат с (16), имеем

$$D_t^{(\alpha)} (qH + C) = D_x^{(\beta)} ((q - a_2) H + (a_1 - \mu q) C). \tag{19}$$

Положим в (19), что

$$q - a_2 = qr,\ \ a_1 - \mu q = r, \tag{20}$$

где r — некоторая действительная постоянная, определяемая ниже.

Из соотношений (20) имеем квадратное уравнение для определения r:

$$r^2 - (1 + a_1) r + a_1 - \mu a_2 = 0. \tag{21}$$

Отсюда

$$r_{1,2} = \frac{1}{2}(1 + a_1 \pm \sqrt{\Delta}),\ \Delta = (1 - a_1)^2 + 4\mu a_2 > 0. \tag{22}$$

При этом корням $r = r_i$ $(i = 1, 2)$ соответствуют два значения q:

$$q_i = \frac{a_2}{1 - r_i}\ \ (r_i \ne 1;\ i = 1, 2).$$

Пусть

$$\psi_i(x,t) = q_i H(x,t) + C(x,t)\ \ (i = 1, 2). \tag{23}$$

С учетом (19), (20) и (23) для отыскания неизвестных функций ψ_i $(i = 1, 2)$ получим совокупность уравнений:

$$D_t^{(\alpha)} \psi_i = r_i D_x^{(\beta)} \psi_i\ \ (i = 1, 2). \tag{24}$$

Соответствующие краевые условия для функций ψ_i $(i = 1, 2)$ принимают вид

$$\psi_i(0,t) = 1,\ \psi_i(1,t) = 0,\ \psi_i(x,0) = q_i\ \ (i = 1, 2). \tag{25}$$

Следует отметить, что для физической корректности рассматриваемых задач необходимо выполнение условий $r_i > 0\,(i = 1, 2)$. Неравенство $r_1 > 0$ очевидно выполнено, а неравенство $r_2 > 0$ имеет место при $\nu\gamma d_u < kd$.

Приведем граничные условия в точке $x = 0$ к соответствующим однородным условиями с помощью подстановки:

$$u^{(i)}(x,t) = \psi_i(x,t) + x - 1\ \ (i = 1, 2). \tag{26}$$

Тогда задачи (24), (25) перепишем в виде

$$D_t^{(\alpha)}u^{(i)} = r_i D_x^{(\beta)}u^{(i)} \quad (i = 1, 2), \tag{27}$$

$$u^{(i)}(0, t) = 0, \; u^{(i)}(1, t) = 0, \; u^{(i)}(x, 0) = \varphi^{(i)}(x), \tag{28}$$

где $\varphi^{(i)}(x) = q_i - 1 + x \; (i = 1, 2)$.

В рассматриваемой постановке решение задач (27), (28) возможно лишь с применением численных методик [16], однако если для моделирования неравновесных по пространству свойств геомиграционного процесса использовать модификацию производной Капуто следующего вида:

$$D_x^{(\beta)}u(x) = \frac{1}{2\Gamma(2-\kappa)} \int\limits_{x-h}^{x+h} \frac{u''(s)\,ds}{|x-s|^{\beta-1}}$$

$(h \le x \le 1-h, \; 0 < h << 1, \; 1 < \beta \le 2, \; \Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера [17]), то возможно построение замкнутых численно-аналитических решений задач типа (27), (28). Указанные решения строятся на базе совместного использования дифференциально-разностного метода в совокупности с методом суммарных представлений [18]. Кратко изложим последовательность соответствующих выкладок.

Введем в рассмотрение сеточную область $\omega_h = \{x_j : x_j = jh \; (j = \overline{0, n+1})\}$, где h — шаг сетки по геометрической переменной, и поставим в соответствие задаче (27), (28) такую дифференциально-разностную задачу:

$$D_t^{(\alpha)}\vec{u}^{(i)}(t) = \kappa^{(i)}(T^{(n)} - 2E)\vec{u}^{(i)}(t) \quad (i = 1, 2), \tag{29}$$

$$\vec{u}^{(i)}(0) = \vec{\varphi}^{(i)} \quad (i = 1, 2) \tag{30}$$

где $\kappa^{(i)} = \dfrac{r_i}{h^{\beta}\Gamma(3-\beta)}$; $\vec{u}^{(i)}(t) = [u_1^{(i)}(t), u_2^{(i)}(t), ..., u_n^{(i)}(t)]^{\mathrm{T}}$; $\varphi^{(i)} = [\varphi_1^{(i)}, \varphi_2^{(i)}, ..., \varphi_n^{(i)}]^{\mathrm{T}}$;

$\varphi_k = \varphi(x_k)$; $u_k(t) = u(x_k, t)$; $T^{(n)}$ — квадратная матрица порядка n, определенная в [18]; E — единичная матрица порядка n.

Отметим, что в правой части соотношений (29) использована следующая аппроксимация производной $D_x^{(\beta)}u$:

$$D_x^{(\beta)}u\Big|_{x_j} \approx \frac{u_{\bar{x}x}}{2\Gamma(2-\beta)} \int\limits_{x_j-h}^{x_j+h} \frac{ds}{|x_j - s|^{\beta-1}} = \frac{h^{2-\beta}}{\Gamma(3-\beta)} u_{\bar{x}x} = \frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{h^{\beta}\Gamma(3-\beta)}.$$

Далее введем в рассмотрение $P^{(n)}$-трансформации векторов $\vec{u}^{(i)}$ и $\vec{\varphi}^{(i)}$ соотношениями

$$\vec{\bar{u}}^{(i)}(t) = P^{(n)}\vec{u}^{(i)}(t), \; \vec{\bar{\varphi}}^{(i)} = P^{(n)}\vec{\varphi}^{(i)} \quad (i = 1, 2), \tag{31}$$

где $P^{(n)}$ — фундаментальная матрица порядка n, определенная согласно [18] в виде

$$P^{(n)} = [p_{kj}]_{k,j=1}^{n} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \left[\sin\left(\frac{\pi k j}{n+1} \right) \right]_{k,j=1}^{n}.$$

Умножая (29), (30) слева на матрицу $P^{(n)}$, с учетом равенства [18]

$$T^{(n)} = P^{(n)}\Lambda^{(n)}P^{(n)},$$

где $\Lambda^{(n)} = [\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n]$ — диагональная матрица собственных чисел матрицы $T^{(n)}$; $\lambda_k = 2\cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right)$ $(k = \overline{1, n})$, получаем задачу в изображениях, записываемую в скалярной форме как

$$D_t^{(\alpha)}\hat{u}_j^{(i)}(t) + \theta_j^{(i)}\hat{u}_j^{(i)}(t) = 0 \quad (j = \overline{1, n};\ i = 1, 2), \tag{32}$$

$$\hat{u}_j^{(i)}(0) = \hat{\varphi}_j^{(i)} \quad (j = \overline{1, n};\ i = 1, 2), \tag{33}$$

где

$$\theta_j^{(i)} = (2 - \lambda_j)\kappa^{(i)}, \ \ \hat{\varphi}_j^{(i)} = \sum_{s=1}^{n} p_{js}\varphi_s^{(i)} \quad (j = \overline{1, n};\ i = 1, 2). \tag{34}$$

Согласно [7, 12] решение задачи (32), (33) запишем в виде

$$\hat{u}_j^{(i)}(t) = \hat{\varphi}_j^{(i)} E_\alpha(-\theta_j^{(i)} t^\alpha) \quad (j = \overline{1, n};\ i = 1, 2), \tag{35}$$

где $E_\alpha(z)$ — функция Миттаг–Леффлера [17].

Возвращаясь в соотношениях (35) к оригиналам по геометрической переменной, получаем решение рассматриваемой дифференциально-разностной задачи:

$$u_j^{(i)}(t) = \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi_s^{(i)} p_{jk} p_{ks} E_\alpha(-\theta_k^{(i)} t^\alpha) \quad (j = \overline{1, n};\ i = 1, 2), \tag{36}$$

где $\varphi_s^{(i)} = \varphi^{(i)}(x_s)$ $(s = \overline{1, n};\ i = 1, 2)$.

При этом переход к функциям напора и концентрации осуществляется по формулам

$$H = \frac{\psi_1 - \psi_2}{q_1 - q_2}, \ C = \frac{q_1\psi_2 - q_2\psi_1}{q_1 - q_2}, \tag{37}$$

$$\psi_i(x, t) = 1 - x + u^{(i)}(x, t) \quad (i = 1, 2). \tag{38}$$

Отметим, что, переходя в приведенных выше соотношениях к пределу при $\beta \to 2$, получаем численно-аналитическое решение задачи с нелокальностью лишь по времени, т.е. задачи для системы уравнений (5), (6).

3. Моделирование неравновесной динамики процесса на основе модели с дробными производными Хильфера

Дробная производная Хильфера порядка $\alpha\ (0 < \alpha \le 1)$ типа $\delta\ (0 \le \delta \le 1)$ функции $u(t)$ по переменной t определяется соотношением [19–21]

$$D_t^{\alpha,\delta}u(t) = J_t^{\delta(1-\alpha)}\frac{d}{dt}J_t^{(1-\delta)(1-\alpha)}u(t), \tag{39}$$

где $J_t^\alpha u(t)$ — правосторонний интеграл Римана–Лиувилля порядка α функции $u(t)$. Поскольку $D_t^{\alpha,1}u(t) \equiv D_t^{(\alpha)}u(t)$ и $D_t^{\alpha,0}u(t) \equiv D_t^{\alpha}u(t)$, то оператор (39) определяет непрерывную по параметру δ интерполяцию операторов Римана–Лиувилля и Капуто [19, 20]. Таким образом, использование дробных производных Хильфера для моделирования динамики локально-неравновесных процессов геомиграции позволяет моделировать одновременно некоторый класс процессов переноса с переменными характеристиками временной неравновесности в рамках одной математической модели.

При моделировании динамики рассмотренного в п.2 процесса геомиграции на основе модели с дробными производными Хильфера систему базовых уравнений модели запишем так:

$$D_t^{\alpha,\delta}H = D_x^{(\beta)}(C_\upsilon H - \mu C), \tag{40}$$

$$\sigma D_t^{\alpha,\delta}C = D_x^{(\beta)}(dC - \gamma d_u H), \tag{41}$$

где сохранены все введенные выше обозначения, причем $D_t^{\alpha,\delta}$ — оператор производной Хильфера порядка α типа δ [19–21]. В рамках данной модели задача исследования динамики локально-неравновесного во времени и пространстве миграционного процесса в условиях фильтрации солевого раствора в глинистом геопористом массиве мощностью l с проницаемыми гранями сводится к решению в области $(0,l)\times(0,\infty)$ системы уравнений (40), (41) при условиях

$$H(0,t)=0,\ \ H(l,t)=0, \tag{42}$$

$$C(0,t)=C_0(t),\ \ C(l,t)=0, \tag{43}$$

$$J_t^{(1-\delta)(1-\alpha)}H(x,0+)=g_0(x),\ \ \ J_t^{(1-\delta)(1-\alpha)}C(x,0+)=0, \tag{44}$$

где $g_0(x)$ — заданное начальное значение избыточного напора в массиве; $C_0(t)$ — концентрации солей на входе фильтрационного потока.

В безразмерных переменных (14) рассматриваемая задача принимает вид

$$D_t^{\alpha,\delta}H = D_x^{(\beta)}(H - \mu C), \tag{45}$$

$$D_t^{\alpha,\delta}C = D_x^{(\beta)}(a_1 C - a_2 H), \tag{46}$$

$$H(0,t)=0,\ \ H(1,t)=0, \tag{47}$$

$$C(0,t)=C_0(t),\ \ C(1,t)=0, \tag{48}$$

$$J_t^{(1-\delta)(1-\alpha)}H(x,0+)=g(x),\ \ \ J_t^{(1-\delta)(1-\alpha)}C(x,0+)=0, \tag{49}$$

где $g(x)=\left(\dfrac{C_\upsilon}{l^\beta}\right)^{\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)(1-\delta)}\dfrac{g_0(x)}{H_0}.$

С учетом изложенной в п. 2 методики решения из (45)–(49) получаем совокупность задач

$$D_t^{\alpha,\delta}\psi_i = r_i D_x^{(\beta)}\psi_i \ \ (i=1,2), \tag{50}$$

$$\psi_i(0,t)=C_0(t),\ \ \ \psi_i(1,t)=0\ \ (i=1,2), \tag{51}$$

$$J_t^{(1-\delta)(1-\alpha)}\psi_i(x,0+)=q_i g(x)\ ,\ (i=1,2), \tag{52}$$

или, переходя к однородным граничным условиям,

$$D_t^{\alpha,\delta}u^{(i)}(x,t)=r_i D_x^{(\beta)}u^{(i)}(x,t)+f(x,t)\ \ (i=1,2), \tag{53}$$

$$u^{(i)}(0,t)=0,\ \ u^{(i)}(1,t)=0\ \ (i=1,2), \tag{54}$$

$$J_t^{(1-\delta)(1-\alpha)}u^{(i)}(x,0+)=\eta^{(i)}(x)\ ,\ (i=1,2), \tag{55}$$

где $f(x,t)=\dfrac{(x-1)t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$; $\eta^{(i)}(x)=q_i g(x)+(x-1)\,J_t^{(1-\delta)(1-\alpha)}C_0(0+)$; функции $u^{(i)}(x,t)$ $(i=1,2)$ задаются соотношениями $u^{(i)}=\psi_i+C_0(x)(x-1).$

Численно-аналитические решения задач (53)–(55) находим аналогично изложенному выше. Повторяя выкладки, произведенные при решении задач (27), (28), получаем в области P-трансформаций задачи

ISSN 0572-2691

$$D_t^{\alpha,\delta}\hat{u}_j^{(i)}(t)+\theta_j^{(i)}\hat{u}_j^{(i)}(t)=\hat{f}_j(t)\quad (j=\overline{1,n};\ i=1,2),\tag{56}$$

$$J_t^{(1-\delta)(1-\alpha)}\hat{u}_j^{(i)}(0+)=\hat{\eta}_j^{(i)}\quad (j=\overline{1,n};\ i=1,2),\tag{57}$$

где

$$\vec{\hat{f}}(t)=P^{(n)}\vec{f}(t);\quad \vec{f}(t)=[f_1(t),\ f_2(t),\dots,\ f_n(t)]^{\mathrm{T}};\ \vec{\hat{\eta}}^{(i)}=P^{(n)}\vec{\eta}^{(i)};$$

$$\vec{\eta}^{(i)}=[\eta_1^{(i)},\ \eta_2^{(i)},\ \dots,\ \eta_n^{(i)}]^{\mathrm{T}}\quad (i=1,2).$$

Решение задач (56), (57) согласно [20, 21] запишем в виде

$$\hat{u}_j^{(i)}(t)=\hat{\eta}_j^{(i)}E_{\alpha,1-(1-\alpha)(1-\delta)}(-\theta_j^{(i)}t^{\alpha})+$$

$$+\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[-\theta_j^{(i)}(t-\tau)^{\alpha}]\,\hat{f}_j(\tau)\,d\tau\quad (j=\overline{1,n};\ i=1,2),\tag{58}$$

где $E_{\alpha,\nu}(z)$ — обобщенная функция Миттаг–Леффлера [17].

Возвращаясь в соотношениях (58) к оригиналам по геометрической переменной, имеем

$$u_j^{(i)}=G_j^{(i)}(t)+\sum_{s=1}^{n}\int_0^t f_s(\tau)\,\Phi_{js}^{(i)}(t-\tau)\,d\tau\quad (j=\overline{1,n};\ i=1,2),\tag{59}$$

где

$$G_j^{(i)}(t)=t^{(\alpha-1)(1-\delta)}+\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}p_{jk}\,p_{ks}\,\eta_s^{(i)}E_{\alpha,\alpha+\delta(1-\alpha)}(-\theta_k^{(i)}t^{\alpha});$$

$$\Phi_{js}^{(i)}(t)=t^{\alpha-1}+\sum_{k=1}^{n}p_{jk}\,p_{ks}E_{\alpha,\alpha}(-\theta_k^{(i)}t^{\alpha})\quad (j,s=\overline{1,n};\ i=1,2);$$

$$\theta_k^{(i)}=\frac{(2-\eta_k)\,r_i}{h^{\beta}\Gamma(3-\beta)}\quad (k=\overline{1,n};\ i=1,2),$$

а величины r_i $(i=1,2)$ представляются соотношениями (22).

Осуществляя переход к функциям напора и концентрации согласно соотношениям (37), (38), получаем численно-аналитическое решение рассматриваемой задачи непрерывное по временной и дискретное по геометрической переменной. Преимуществом такого решения является, в частности, возможность выборочного счета значений искомых характеристик процесса в фиксированной точке сеточной области в требуемый момент времени при отсутствии необходимости предварительного расчета этих характеристик во все предыдущие сеточные моменты времени. Указанное свойство позволяет во многих случаях сократить время вычисления решения и удобно в инженерных приложениях.

Заключение

В работе изложен подход к математическому моделированию (в рамках дробно-дифференциального анализа) динамики некоторых процессов геомиграции солевых растворов в глинистых пористых массивах с учетом эффектов памяти и пространственной неравновесности. Найдены замкнутые численно-аналитические решения некоторых одномерных нестационарных задач геомиграции, поставленных для систем дробно-дифференциальных уравнений с производными Капуто и Хильфера.

Полученные результаты пополняют банк геоматематических моделей в направлении учета новых важных свойств миграционных процессов, связанных с возможностью их существенной пространственно-временной неравновесности.

В.М. Булавацький, Ю.Г. Кривонос

ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДЕЯКИХ ГЕОМІГРАЦІЙНИХ ЗАДАЧ У РАМКАХ ДРОБОВО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

Одержано чисельно-аналітичні розв'язки деяких геоміграційних задач для систем дробово-диференціальних рівнянь з похідними Капуто і Хільфера, що описують динаміку процесу фільтрації сольових розчинів у глинистому геопористому масиві за умов часової та просторової нерівноважності.

V.M. Bulavatsky, Iu.G. Kryvonos

THE NUMERICALLY-ANALYTICAL SOLUTIONS OF SOME GEOMIGRATORY PROBLEMS WITHIN THE FRAMEWORK OF FRACTIONAL-DIFFERENTIAL MATHEMATICAL MODELS

The numerically-analytical solutions of some geomigratory problems for systems of fractional-differential equations are obtained with derivative Caputo and Hilfer's, depicting dynamics of filtration process of saline solutions in a clay geoporous massif in conditions of time and space nonequilibrium.

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. — М. : Наука, 1972. — 259 с.
2. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды: В 2-х т. — М. : Наука, 1973. — Т. 2. — 584 с.
3. *Хасанов М.М., Булгакова Г.Т.* Нелинейные и неравновесные эффекты в реологически сложных средах. — Москва; Ижевск : Ин-т компьютерных исследований, 2003. — 288 с.
4. *Соболев С.Л.* Локально-неравновесные модели процессов переноса // Успехи физических наук. — 1997. — **167**, № 10. — С. 1095–1106.
5. *Мейланов М.М., Шибанова М.Р.* Особенности решения уравнения теплопереноса в производных дробного порядка // Журнал техн. физики. — 2011. — **81**, № 7. — С. 1–6.
6. *Gorenflo R., Mainardi F.* Random walk models for space-fractional diffusion processes // Fractional calculus and applied analysis. — 1998. — N 1. — P. 167–191.
7. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and applications of fractional differential equations. — Amsterdam: Elsevier, 2006. — 523 p.
8. *Учайкин В.В.* Метод дробных производных. — Ульяновск : Изд-во «Артишок», 2008. — 512 с.
9. *Булавацкий В.М.* Некоторые математические модели геоинформатики для описания процессов переноса в условиях временной нелокальности // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2011. — № 3. — С. 128–137.
10. *Булавацкий В.М, Кривонос Ю.Г.* Об одной геоинформационной дробно-дифференциальной модели переменного порядка // Там же. — 2012. — № 3. — С. 66–72.
11. *BulavatskyV.M., Krivonos Yu.G.* Mathematical modeling in the geoinformation problem of the dynamics of geomigration under space-time nonlocality // Cybernetics and Systems Analysis. — 2012. — **48**, N 4. — P. 539–546.
12. *Podlubny I.* Fractional differential equations. — New York : Academic Press, 1999. — 341 p.
13. *Ляшко И.И., Демченко Л.И., Мистецкий Г.Е.* Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах. — Киев : Наук. думка, 1991. — 264 с.
14. *Ширинкулов Т.Ш., Зарецкий Ю.К.* Ползучесть и консолидация грунтов. — Ташкент : Фан, 1986. — 390 с.
15. *Kaczmarek M., Huekel T.* Chemo-mechanical consolidation of clays: analytical solution for a linearized one-dimensional problem // Transport in Porous Media. — 1998. — **32**. — P. 49–74.
16. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. — М. : Наука, 1977. — 656 с.
17. *Abramovitz M., Stegun I.A.* Handbook of mathematical functions. — New York : Dover, 1965. — 831 p.
18. *Положий Г.Н.* Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента. — Киев : Вища шк., 1962. — 161 с.
19. *Hilfer R.* Fractional time evolution// Applications of fractional calculus in physics / Ed. R. Hilfer. — Singapore : World scientific, 2000. — P. 87–130.
20. *Hilfer R., Luchko Y., Tomovski Z.* Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann–Liouville fractional derivatives // Fractional Calculus and Applied Analysis. — 2009. — **12**, N 3. — P. 299–318.
21. *Tomovski Z., Hilfer R., Srivastava H.M.* Fractional and operational calculus with generalized fractional derivative operators and Mittag–Leffler type functions // Integral Transforms and Special Functions. — 2010. — N 11. — P. 797–814.

Получено 27.03.2013