УДК 519.644; 519.711

В.К. Задирака, Е.Н. Коломыс, Л.В. Луц, С.С. Мельникова

ОЦЕНКИ ОСНОВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК АЛГОРИТМОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ НА НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ

Введение. Задача построения математической модели (ММ) функционирования объекта управления (ОУ) сводится к определению такого алгоритма его функционирования, который обеспечивал бы «близость» в некотором смысле выходных данных модели к выходным данным объекта. Качество модели естественно характеризуется значением некоторой функции расхождения функционирования модели и объекта $\delta = \| Y^0 - Y^M \|$ и условием $\delta < \varepsilon,\ \varepsilon > 0,$ где Y^0, Y^M — выходные данные соответственно объекта и модели, а норма берется в том пространстве, которому принадлежат значения $Y^0 - Y^M$. Число ε должно согласовываться с точностью входной информации, экономическими расходами на построение модели и другими характеристиками [1].

Для анализа качества математической модели ОУ, как правило, определяют вероятностные и динамические характеристики построенной ММ. К вероятностным характеристикам относят оценки корреляционных функций, спектральной плотности, математического ожидания и дисперсии, к динамическим — частотную характеристику (ЧХ), передаточную функцию, разгонную характеристику и импульсную переходную функцию [1].

Эта публикация является продолжением работы [2] и применяет полученные результаты для вычисления ЧХ на конкретных классах функций.

Постановка задачи. Рассмотрим линейные модели ОУ с одним входом и выходом. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — некоторые регистрируемые соответственно входы

и выходы объекта и представляют собой функции времени *t*, которые, в зависимости от известной априорной информации о них, можно «погрузить» в некоторые классы функций F_1 и F_2 соответственно. Уравнение динамики для объектов с постоянными параметрами (стационарных) имеет вид [1]

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)k(t-\tau)\,d\tau = \int_{0}^{\infty} k(u)x(t-u)\,du, \quad u = t-\tau, \tag{1}$$

где $k(t-\tau)$ — импульсная переходная функция (ИПФ) объекта. В случае линейной стационарной модели объекта, взяв преобразование Фурье от обеих частей соотношения (1), в силу теоремы о свертке двух функций получим

$$\Upsilon(i\omega) = \Phi(i\omega)\cdot X(i\omega),$$

где $X(i\omega)$, $\Upsilon(i\omega)$, $\Phi(i\omega)$ — преобразование Фурье соответственно $x(t)$, $y(t)$ и $k(t-\tau)$.

Частотной характеристикой линейной модели объекта называется отношение

$$\Phi(i\omega) = \frac{\Upsilon(i\omega)}{X(i\omega)}. \tag{2}$$

Знаая частотную характеристику $\Phi(i\omega)$ и преобразование Фурье входа $X(i\omega)$ при ненулевых начальных условиях $(X(i\omega) \neq 0)$, можно найти преобразование Фурье выходной величины $Y(i\omega)$; применив к нему обратное преобразование Фурье, получим

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(i\omega)\Phi(i\omega)e^{i\omega t}d\omega.$$

Таким образом, частотная характеристика полностью характеризует динамические свойства ОУ и поэтому является одной из ее важнейших характеристик.

Частотная характеристика и ИПФ связаны между собой с помощью прямого и обратного преобразования Фурье

$$\Phi(i\omega) = \int_{0}^{\infty} k(u)e^{-i\omega u}du, \quad k(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(i\omega)e^{i\omega u}du.$$

Для вычисления оценки частотной характеристики $\Phi(i\omega)$ предложен следующий подход. Пусть $R_X(i\omega) = R(i\omega, N, A_1, F_1)$ — результат приближенного вычисления преобразования Фурье $X(i\omega)$ с помощью квадратурной формулы A_1, которая использует N значений функции $x(t) \in F_1$, $x_j = x(t_j)$, $j = \overline{0, N-1}$; $R_Y(i\omega) = R(i\omega, N, A_2, F_2)$ — результат приближенного вычисления преобразования Фурье $Y(i\omega)$ с помощью квадратурной формулы A_2, которая использует N значений функции $y(t) \in F_2$, $y_j = y(t_j)$, $j = \overline{0, N-1}$.

Обозначим $\varepsilon_X = X(i\omega) - R_X(i\omega)$ и $\varepsilon_Y = Y(i\omega) - R_Y(i\omega)$ — абсолютные погрешности методов вычисления соответственно $X(i\omega)$ с помощью квадратурной формулы A_1 и $Y(i\omega)$ — с помощью квадратурной формулы A_2, которые можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_X| &= \max_{x(t)\in F_1} |X(i\omega) - R_x(i\omega)| \le E_X, \\ |\varepsilon_Y| &= \max_{y(t)\in F_2} |Y(i\omega) - R_y(i\omega)| \le E_Y, \end{aligned} \tag{3}$$

где E_X, E_Y — соответственно оценки погрешностей квадратурных формул A_1 и A_2 приближенного вычисления преобразования Фурье $X(i\omega)$ и $Y(i\omega)$ на классах F_1 и F_2 [2–4].

Запишем выражение для вычисления оценки частотной характеристики $\Phi(i\omega)$:

$$\Phi_R(i\omega) = \frac{R_Y(i\omega)}{R_X(i\omega)}. \tag{4}$$

Для оценки ε_Φ погрешности вычисления $\Phi(i\omega)$ с помощью $\Phi_R(i\omega)$ справедливо соотношение

$$|\varepsilon_\Phi| = \max_{\substack{x(t)\in F_1\\ y(t)\in F_2}} |\Phi(i\omega) - \Phi_R(i\omega)| \le E(F_1, F_2). \tag{5}$$

В работе [2] доказана следующая теорема.

Теорема 1. Для оценки $|\varepsilon_\Phi|$ погрешности вычисления $\Phi(i\omega)$ с помощью $\Phi_R(i\omega)$ с точностью до величин первого порядка малости относительно ε_X и ε_Y справедливо соотношение

$$|\varepsilon_\Phi| \le \frac{|R_Y(i\omega)|}{|R_X(i\omega)|}\left(\frac{|\varepsilon_Y|}{|R_Y(i\omega)|} + \frac{|\varepsilon_X|}{|R_X(i\omega)|}\right). \tag{6}$$

Соотношение (4) дает общий подход к построению алгоритма $\Phi_R(i\omega)$ — приближенного вычисления частотной характеристики $\Phi(i\omega)$, в случае, когда используются квадратурные формулы A_1 и A_2 вычисления оценки преобразования Фурье.

 ISSN 0572-2691

В работах [3, 4] построены эффективные по точности и (или) быстродействию на классах F_i квадратурные формулы вычисления оценок преобразования Фурье как интегралов от быстроосциллирующих функций и получены оценки их точности, когда $F_i \equiv C_{L,\alpha}$, $0<\alpha\le 1$, C_L, $W_{r,L}$, $r>1$, $i=1, 2$, где $C_{L,\alpha}$ — класс функций, которые удовлетворяют условию Гельдера с константой L и показателем α, $0<\alpha\le 1$: $\left| f(x') - f(x'') \right| \le L \left| x' - x'' \right|^{\alpha}$, $x', x'' \in [a, b]$; C_L — класс функций Липшица (класс $C_{L,\alpha}$, $\alpha = 1$); $W_{r,L}$, $r>1$, — класс функций, которые имеют $(r-1)$-ю непрерывную производную, и при этом $f^{(r-1)}(x)\in C_L$.

Отмечено, что повышение «потенциальной разрешимости» квадратурных формул вычисления оценок преобразования Фурье можно осуществить сужением класса F подынтегральных функций $f(t)\in F$ на класс F_N, когда $\{t_i\}_0^{N-1}$ и $\{f_i\}_0^{N-1} = \{f(t_i)\}_0^{N-1}$ фиксированы (например, функция задана таблицей значений из ее области определения). Использование оптимальных по точности на классах F_N и близких к ним квадратурных формул вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций позволяет повысить качество предложенных алгоритмов. Всего оптимальные квадратурные и кубатурные формулы построены для 45 классов $(F, F_N, F_{N,\varepsilon})$ подынтегральных функций [4].

В данной работе рассматривается интерполяционный класс функций $C_{L,N}$ [3] — класс функций C_L с заданными фиксированными значениями f_i в узлах фиксированной сетки t_i, $i=\overline{0, N-1}$.

Используя приведенные в [3, 4] квадратурные формулы и полученные оценки их точности на классах F и F_N в соотношении (4), можно построить эффективную оценку $\Phi_R(i\omega)$ частотной характеристики $\Phi(i\omega)$ на конкретных классах функций.

Построение оценок алгоритмов вычисления частотной характеристики на конкретных классах функций

Рассмотрим случаи, которые наиболее часто встречаются на практике.

Случай 1. Функции $x(t)\in C_L$, $y(t)\in C_L$ $(t\in[a, b])$.

Пусть $x(t)\in C_L$, задана таблицей значений в узлах равномерной сетки $t_\nu = \nu\Delta t + a$, $\Delta t = (b-a)/N$, $\nu=\overline{0, N}$. В работах [3, 4] для приближенного вычисления интегралов

$$I_{2,x}(\omega) = \int_a^b x(t)\sin\omega t dt,\ \ I_{3,x}(\omega) = \int_a^b x(t)\cos\omega t dt \tag{7}$$

построены оптимальные по точности при $N \ge |\omega|$ квадратурные формулы типа средней точки

$$R_{2,1}(\omega) = \sum_{\nu=0}^{N-1} x_\nu \int_{t_{\nu-1/2}}^{t_{\nu+1/2}} \sin\omega t\, dt,\ \ R_{3,1}(\omega) = \sum_{\nu=0}^{N-1} x_\nu \int_{t_{\nu-1/2}}^{t_{\nu+1/2}} \cos\omega t\, dt. \tag{8}$$

При этом справедливы следующие оценки погрешности метода:

$$E_{2,1} \le L\left[\frac{(b-a)^2}{2\pi N} + \left|P_1(\omega)\right|\right],\ \ E_{3,1} \le L\left[\frac{(b-a)^2}{2\pi N} + \left|P_2(\omega)\right|\right], \tag{9}$$

где

$$P_1(\omega) = \frac{4L\cos\left(\omega(b-(b-a)/4N)\right)\sin\omega(b-a)/4N}{\omega^2} - \frac{L(b-a)\cos\omega b}{\omega N}, \tag{10}$$

$$P_2(\omega) = \frac{L(b-a)\sin\omega b}{\omega N} - \frac{4L\sin\left(\omega(b-(b-a)/4N)\right)\sin\omega(b-a)/4N}{\omega^2}. \tag{11}$$

На практике, как правило, достаточно использовать эти оценки с точностью до главного члена относительно величины $1/N$, т.е.

$$E_{2,1} \cong \frac{L(b-a)^2}{2\pi N}, \quad E_{3,1} \cong \frac{L(b-a)^2}{2\pi N}. \tag{12}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $x(t) \in C_L$, $y(t) \in C_L$ — финитные функции, определенные на отрезке $t \in [a, b]$, и для приближенного вычисления преобразования Фурье $x(t)$ и $y(t)$ используются соответственно квадратурные формулы типа средней точки:

$$R_{1,X}(i\omega) = \sum_{\nu=0}^{N-1} x_\nu \int_{t_{\nu-1/2}}^{t_{\nu+1/2}} e^{-i\omega t} dt, \tag{13}$$

$$R_{1,Y}(i\omega) = \sum_{\nu=0}^{N-1} y_\nu \int_{t_{\nu-1/2}}^{t_{\nu+1/2}} e^{-i\omega t} dt, \tag{14}$$

где $|\omega| \geq 2\pi/(b-a)$, $x_\nu = x(t_\nu)$, $y_\nu = y(t_\nu)$, $t_\nu = \nu\Delta t + a$, $\Delta t = (b-a)/N$, $t_{\nu-1/2} =$ $= t_\nu - \Delta t/2$, $t_{\nu+1/2} = t_\nu + \Delta t/2$, $\nu = \overline{0, N-1}$; $\Delta t_{-1} = 0$, $t_0 = a$, $t_{N-1+1/2} = t_N = b$.

Тогда при $N \geq |\omega|$ для алгоритма $\Phi_R(i\omega) = \dfrac{R_{1,Y}(i\omega)}{R_{1,X}(i\omega)}$ вычисления оценки частотной характеристики $\Phi(i\omega) = \dfrac{Y(i\omega)}{X(i\omega)}$ справедлива следующая оценка погрешности метода:

$$|\varepsilon_\Phi| \leq \frac{L\sqrt{2}(M_x + M_y)(b-a)^2}{4\pi m_x^2 |\sin(\omega(b-a)/2)|} \cdot \frac{|\omega|}{N}, \tag{15}$$

где

$$m_x = \min_{\nu=\overline{0,N-1}} |x_\nu|, \quad M_x = \max_{\nu=\overline{0,N-1}} |x_\nu|, \quad M_y = \max_{\nu=\overline{0,N-1}} |y_\nu|, \tag{16}$$

при всех значениях x_ν для которых $x_\nu = x(t_\nu) \neq 0$. Время реализации алгоритма $\Phi_R(i\omega)$ (4) с учетом времени реализации квадратурных формул (13), (14) можно оценить соотношением

$$T_1 \leq (4N-1)\tau_1 + (5N+6)\tau_2 + 2\tau_3 + 4N\tau_5. \tag{17}$$

При этом τ_1 — время выполнения одной операции сложения двух чисел, τ_2 — время выполнения одной операции умножения двух чисел, τ_3 — время выполнения операции деления одного числа на другое, τ_4 — время выполнения операции двоичного сдвига числа, τ_5 — время вычисления функции $\sin x$ или $\cos x$.

Доказательство. Поскольку из условий теоремы $F_1 = F_2 = C_L$ и для приближенного вычисления $x(t)$, $y(t)$ используются квадратурные формулы одного типа: $R_{1,X}(i\omega)$, $R_{1,Y}(i\omega)$, то для нахождения оценки погрешности метода $\varepsilon_\Phi =$ $= \max\limits_{\substack{x(t)\in C_L \\ y(t)\in C_L}} |\Phi(i\omega) - \Phi_R(i\omega)|$ воспользуемся соотношением [2]

$$\varepsilon_\Phi \leq |\varepsilon| \left(\frac{|R_{1,X}(i\omega)| + |R_{1,Y}(i\omega)|}{R_{1,X}^2(i\omega)} \right), \tag{18}$$

где $|\varepsilon| = \max(|\varepsilon_X|, |\varepsilon_Y|)$.

Для упрощения следующих выкладок аргумент $i\omega$ опустим.

Поскольку

$$I_{1,x}=\int_a^b x(t)e^{-i\omega t}dt=\int_a^b x(t)\cos\omega t\,dt-i\int_a^b x(t)\sin\omega t\,dt=\mathrm{Re}(I_{1,x})-i\,\mathrm{Im}(I_{1,x}),$$

$$R_{1,X}=\sum_{\nu=0}^{N-1}x_\nu\int_{t_{\nu-1/2}}^{t_{\nu+1/2}}e^{-i\omega t}dt=\sum_{\nu=0}^{N-1}x_\nu\int_{t_{\nu-1/2}}^{t_{\nu+1/2}}\cos\omega t\,dt-i\sum_{\nu=0}^{N-1}x_\nu\int_{t_{\nu-1/2}}^{t_{\nu+1/2}}\sin\omega t\,dt=$$

$$=\mathrm{Re}(R_{1,X})-i\,\mathrm{Im}(R_{1,X}),$$

то, рассматривая отдельно вычисление действительной и мнимой части $x(t)$, придем к вычислению интегралов (7) с помощью квадратурных формул (8), а значит, и к возможности воспользоваться оценками (12). Соответственно можно представить $\varepsilon_X=\mathrm{Re}(\varepsilon_X)+i\,\mathrm{Im}(\varepsilon_X)$.

Используя (12), получим

$$|\varepsilon_X|=\sqrt{\mathrm{Re}^2(\varepsilon_X)+\mathrm{Im}^2(\varepsilon_X)}\cong\sqrt{\left(\frac{L(b-a)^2}{2\pi N}\right)^2+\left(\frac{L(b-a)^2}{2\pi N}\right)^2}=\frac{L\sqrt{2}(b-a)^2}{2\pi N}.$$

В условиях теоремы $|\varepsilon_X|=|\varepsilon_Y|=|\varepsilon|$.

Для того чтобы найти $(|R_{1,X}(i\omega)|+|R_{1,Y}(i\omega)|)/R_{1,X}^2(i\omega)$, сначала вычислим действительную и мнимую части интеграла $\int_{t_{\nu-1/2}}^{t_{\nu+1/2}}e^{-i\omega t}dt$:

$$\int_{t_{\nu-1/2}}^{t_{\nu+1/2}}\cos\omega t\,dt=\frac{1}{\omega}(\sin\omega t_{\nu+1/2}-\sin\omega t_{\nu-1/2})=\frac{2}{\omega}\sin\omega\frac{\Delta t}{2}\cos\omega t_\nu,$$

$$\int_{t_{\nu-1/2}}^{t_{\nu+1/2}}\sin\omega t\,dt=-\frac{1}{\omega}(\cos\omega t_{\nu+1/2}-\cos\omega t_{\nu-1/2})=\frac{2}{\omega}\sin\omega\frac{\Delta t}{2}\sin\omega t_\nu.$$

Тогда

$$R_{1,X}=\sum_{\nu=0}^{N-1}x_\nu\int_{t_{\nu-1/2}}^{t_{\nu+1/2}}e^{-i\omega t}dt=\sum_{\nu=0}^{N-1}x_\nu\frac{2}{\omega}\sin\omega\frac{\Delta t}{2}(\cos\omega t_\nu-i\sin\omega t_\nu)=$$

$$=\frac{2}{\omega}\sin\omega\frac{\Delta t}{2}\sum_{\nu=0}^{N-1}x_\nu e^{-i\omega t_\nu}, \tag{19}$$

$$R_{1,Y}=\sum_{\nu=0}^{N-1}y_\nu\int_{t_{\nu-1/2}}^{t_{\nu+1/2}}e^{-i\omega t}dt=\frac{2}{\omega}\sin\omega\frac{\Delta t}{2}\sum_{\nu=0}^{N-1}y_\nu e^{-i\omega t_\nu}. \tag{20}$$

Учитывая (16), оценим $|R_{1,X}|\le\frac{2M_x}{|\omega|}\left|\sin\omega\frac{\Delta t}{2}\sum_{\nu=0}^{N-1}e^{-i\omega t_\nu}\right|$,

$$|R_{1,X}|\ge\frac{2m_x}{|\omega|}\left|\sin\omega\frac{\Delta t}{2}\sum_{\nu=0}^{N-1}e^{-i\omega t_\nu}\right|,\quad |R_{1,Y}|\ge\frac{2m_y}{|\omega|}\left|\sin\omega\frac{\Delta t}{2}\sum_{\nu=0}^{N-1}e^{-i\omega t_\nu}\right|.$$

Рассмотрим

$$\left|\sin\omega\frac{\Delta t}{2}\sum_{\nu=0}^{N-1}e^{-i\omega t_\nu}\right|=\left|\sin\omega\frac{\Delta t}{2}\cdot\frac{e^{-i\omega a}-e^{-i\omega b}}{1-e^{-i\omega\Delta t}}\right|=$$

$$= \left| \sin\omega\frac{\Delta t}{2}\cdot\frac{\cos\omega a - i\sin\omega a - \cos\omega b + i\sin\omega b}{\cos\omega 0 - i\sin\omega 0 - \cos\omega\Delta t + i\sin\omega\Delta t} \right| =$$

$$= \left| \sin\omega\frac{\Delta t}{2}\cdot\frac{\sin\omega\frac{b-a}{2}\sin\omega\frac{a+b}{2} - i\sin\omega\frac{b-a}{2}\cos\omega\frac{a+b}{2}}{\sin\omega\frac{\Delta t}{2}\sin\omega\frac{\Delta t}{2} + i\sin\omega\frac{\Delta t}{2}\cos\omega\frac{\Delta t}{2}} \right| =$$

$$= \left| \sin\omega\frac{\Delta t}{2}\cdot\frac{\sin\omega\frac{b-a}{2}}{\sin\omega\frac{\Delta t}{2}}\cdot\frac{i\exp\left\{-i\omega\frac{a+b}{2}\right\}}{i\exp\left\{-i\omega\frac{\Delta t}{2}\right\}} \right| = \left|\sin(\omega(b-a)/2)\right|.$$

Отсюда получим оценку (15):

$$\left|\varepsilon_\Phi\right| \le \left|\varepsilon\right|\cdot\left(\frac{\left|R_x\right|+\left|R_y\right|}{R_x^2}\right) \le \frac{L\sqrt{2}(b-a)^2}{2\pi N}\cdot\frac{\left|\omega\right|(M_x+M_y)}{2m_x{}^2\left|\sin\omega\frac{\Delta t}{2}\sum\limits_{\nu=0}^{N-1}e^{-i\omega\Delta t}\right|} =$$

$$= \frac{L\sqrt{2}(M_x+M_y)(b-a)^2}{4\pi m_x{}^2\left|\sin(\omega(b-a)/2)\right|}\cdot\frac{\left|\omega\right|}{N}.$$

Учитывая (19), (20), получим следующее соотношение для вычисления $\Phi_R(i\omega)$:

$$\Phi_R(i\omega) = \frac{R_Y(i\omega)}{R_X(i\omega)} = \frac{\frac{2}{\omega}\sin\omega\frac{\Delta t}{2}\sum\limits_{\nu=0}^{N-1}y_\nu e^{-i\omega t_\nu}}{\frac{2}{\omega}\sin\omega\frac{\Delta t}{2}\sum\limits_{\nu=0}^{N-1}x_\nu e^{-i\omega t_\nu}} = \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{N-1}y_\nu e^{-i\omega t_\nu}}{\sum\limits_{\nu=0}^{N-1}x_\nu e^{-i\omega t_\nu}}. \tag{21}$$

Чтобы вычислить $\Phi_R(i\omega)$ по формуле (21), нужно выполнить $4N-1$ операций сложения, $5N+6$ операций умножения, 2 операции деления, $2N$ раз вычислить функцию $\sin x$ и $2N$ раз — $\cos x$. Отсюда получаем оценку (17).*

Теорема доказана.

Случай 2. Функции $x(t)\in C_{L,N}$, $y(t)\in C_{L,N}$ $(t\in[a,b])$.

Пусть $x(t)\in C_{L,N}$ задана таблицей фиксированных значений x_ν в узлах равномерной сетки Δ: $t_\nu = \nu\Delta t + a$, $\Delta t = (b-a)/N$, $\nu=\overline{0,N}$. В работах [3, 4] для приближенного вычисления интегралов (7) построены оптимальные по точности при $N\ge\left|\omega\right|$ квадратурные формулы

$$R_{2,2}(\omega) = \sum_{\nu=0}^{N-1}\int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} x_2^*(t)\sin\omega t\,dt,\quad R_{3,2}(\omega) = \sum_{\nu=0}^{N-1}\int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} x_2^*(t)\cos\omega t\,dt, \tag{22}$$

где

$$x_2^*(t) = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} x_\nu, & t_\nu \le t \le \tilde{t}_\nu, \\ x_\nu + L(t-t_\nu)\mathrm{sign}(\Delta x_\nu), & \tilde{t}_\nu \le t \le \tilde{\tilde{t}}_\nu, \\ x_{\nu+1}, & \tilde{\tilde{t}}_\nu \le t \le t_{\nu+1}, \end{array}\right\} t\notin[t_{N-1},t_N], \\ x_{N-1}, \quad t_{N-1}\le t\le t_N, \end{cases} \tag{23}$$

$$x_\nu = x(t_\nu),\ \ t_\nu = \nu\Delta t + a,\ \ \Delta t = (b-a)/N,\ \ \tilde{t}_\nu = \frac{t_\nu + t_{\nu+1}}{2} - \frac{\left|\Delta x_\nu\right|}{2L},$$

$$\tilde{\tilde{t}}_\nu = \frac{t_\nu + t_{\nu+1}}{2} + \frac{\left|\Delta x_\nu\right|}{2L},\ \ \Delta x_\nu = x_{\nu+1} - x_\nu,\ \ \nu = \overline{0, N-1},\ \ \left|\omega\right| \ge 2\pi/(b-a).$$

---

* Для частот $\omega_r = 2\pi r/N$ для вычисления $\Phi_R(i\omega)$ можно использовать алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ) [1].

При этом имеют место такие оценки погрешности метода:

$$E_{2,2} \le \frac{4L}{\omega^2}\sum_{\nu=0}^{N-2}\left(\sin^2\frac{\omega\Delta t}{4}-\sin^2\frac{\omega|\Delta x_\nu|}{4L}\right)\cdot\sin\frac{\omega(t_\nu+t_{\nu+1})}{2}+P_1(\omega),$$
$$E_{3,2} \le \frac{4L}{\omega^2}\sum_{\nu=0}^{N-2}\left(\sin^2\frac{\omega\Delta t}{4}-\sin^2\frac{\omega|\Delta x_\nu|}{4L}\right)\cdot\cos\frac{\omega(t_\nu+t_{\nu+1})}{2}+P_2(\omega), \tag{24}$$

где

$$P_1(\omega)=\frac{L}{\omega}\left[\frac{2\cos(\omega(b-(b-a)/4N))\sin\omega(b-a)/4N}{\omega}-\frac{(b-a)\cos\omega b}{N}\right],$$

$$P_2(\omega)=\frac{L}{\omega}\left[\frac{(b-a)\sin\omega b}{N}-\frac{2\sin(\omega(b-(b-a)/4N))\sin\omega(b-a)/4N}{\omega}\right].$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $x(t)\in C_{L,N}$, $y(t)\in C_{L,N}$ — финитные функции, определенные на отрезке $t\in[a,b]$, и для приближенного вычисления преобразования Фурье $x(t)$ и $y(t)$ используются соответственно оптимальные по точности на классе функций $C_{L,N}$ квадратурные формулы

$$R_{2,X}=\sum_{\nu=0}^{N-1}\int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} x_2^*(t)e^{-i\omega t}dt, \tag{25}$$

$$R_{2,Y}=\sum_{\nu=0}^{N-1}\int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} y_2^*(t)e^{-i\omega t}dt, \tag{26}$$

где $x_2^*(t)$ определяется соотношением (23):

$$x_2^*(t)=\begin{cases} x_\nu, & t_\nu\le t\le \tilde{t}_\nu, \\ x_\nu+L(t-t_\nu)\mathrm{sign}(\Delta x_\nu), & \tilde{t}_\nu\le t\le \tilde{\tilde{t}}_\nu, \\ x_{\nu+1}, & \tilde{\tilde{t}}_\nu\le t\le t_{\nu+1}, \\ x_{N-1}, & t_{N-1}\le t\le t_N, \end{cases} \quad t\notin[t_{N-1},t_N], \tag{27}$$

$$y_2^*(t)=\begin{cases} y_\nu, & t_\nu\le t\le \bar{t}_\nu \\ y_\nu+L(t-t_\nu)\mathrm{sign}(\Delta y_\nu), & \bar{t}_\nu\le t\le \bar{\bar{t}}_\nu, \\ y_{\nu+1}, & \bar{\bar{t}}_\nu\le t\le t_{\nu+1}, \\ y_{N-1} & t_{N-1}\le t\le t_N, \end{cases} \quad t\notin[t_{N-1},t_N], \tag{28}$$

$$x_\nu=x(t_\nu),\ \ y_\nu=y(t_\nu),\ \ t_\nu=\nu\Delta t+a,\ \ \Delta t=(b-a)/N,\ \ \tilde{t}_\nu=\frac{t_\nu+t_{\nu+1}}{2}-\frac{|\Delta x_\nu|}{2L},$$
$$\tilde{\tilde{t}}_\nu=\frac{t_\nu+t_{\nu+1}}{2}+\frac{|\Delta x_\nu|}{2L},\ \ \bar{t}_\nu=\frac{t_\nu+t_{\nu+1}}{2}-\frac{|\Delta y_\nu|}{2L},\ \ \bar{\bar{t}}_\nu=\frac{t_\nu+t_{\nu+1}}{2}+\frac{|\Delta y_\nu|}{2L},$$
$$\Delta x_\nu=x_{\nu+1}-x_\nu,\ \ \Delta y_\nu=y_{\nu+1}-y_\nu,\ \ \nu=\overline{0,N-1},$$

$$|\omega|\ge 2\pi/(b-a).$$

Тогда при $N\ge|\omega|$ для алгоритма $\Phi_R(i\omega)=\dfrac{R_{2,Y}(i\omega)}{R_{2,X}(i\omega)}$ вычисления оценки частотной характеристики $\Phi(i\omega)=\dfrac{Y(i\omega)}{X(i\omega)}$ справедлива следующая оценка погрешности метода:

$$|\varepsilon_\Phi|\le|\varepsilon|\cdot\frac{|R_{2,X}|+|R_{2,Y}|}{R_{2,X}^2}, \tag{29}$$

где

$$\left|\varepsilon\right| \le \frac{4L}{\omega^2}\max\left(\sum_{\nu=0}^{N-2}\left|\sin^2\sin\omega\frac{b-a}{4N}-\sin^2\frac{\omega\left|\Delta x_\nu\right|}{4L}\right|, \sum_{\nu=0}^{N-2}\left|\sin^2\sin\omega\frac{b-a}{4N}-\sin^2\frac{\omega\left|\Delta y_\nu\right|}{4L}\right|\right)+$$

$$+\frac{L}{|\omega|}\cdot\left|\frac{2}{\omega}\exp\left\{i\omega\frac{b-a}{4N}\right\}\sin\omega\frac{b-a}{4N}-\frac{b-a}{N}\right|, \qquad (30)$$

$$R_{2,X}=\frac{1}{\omega}\left[\sum_{\nu=0}^{N-2}\operatorname{sign}(\Delta x_\nu)\cdot\sin\omega\frac{\left|\Delta x_\nu\right|}{2L}\left(\left(L\frac{b-a}{4N}-\right)e^{i\omega t_{\nu+1/2}}-i\frac{2L}{\omega}e^{-i\omega\, t_{\nu+1/2}}\right)-\right.$$

$$\left.-i(x_{N-1}e^{i\omega b}-x_0e^{i\omega a})\right], \qquad (31)$$

$$R_{2,Y}=\frac{1}{\omega}\left[\sum_{\nu=0}^{N-2}\operatorname{sign}(\Delta y_\nu)\cdot\sin\omega\frac{\left|\Delta y_\nu\right|}{2L}\left(\left(L\frac{b-a}{4N}-\left|\Delta y_\nu\right|\right)e^{i\omega t_{\nu+1/2}}-i\frac{2L}{\omega}e^{-i\omega t_{\nu+1/2}}\right)-\right.$$

$$\left.-i(y_{N-1}e^{i\omega b}-y_0e^{i\omega a})\right]. \qquad (32)$$

При этом время реализации алгоритма $\Phi_R(i\omega)$ (4) с учетом реализации квадратурных формул (25)–(28) с помощью соотношений (31), (32) можно оценить соотношением

$$T_2 \le (11N+1)\tau_1+(11N+6)\tau_2+5\tau_3+5\tau_4+4N\tau_5, \qquad (33)$$

где $\tau_1-\tau_5$ определены в теореме 2.

Доказательство. Поскольку из условий теоремы $F_1=F_2=C_{L,N}$, и для приближенного вычисления $x(t)$, $y(t)$ применяются квадратурные формулы одного типа $R_{1,X}(i\omega)$, $R_{1,Y}(i\omega)$, то для нахождения оценки погрешности метода $\varepsilon_\Phi =$

$= \max\limits_{\substack{x(t)\in C_L\\ y(t)\in C_L}}\left|\Phi(i\omega)-\Phi_R(i\omega)\right|$ воспользуемся соотношением (18)

$$\varepsilon_\Phi \le |\varepsilon|\cdot\left(\frac{\left|R_{2,X}(i\omega)+\left|R_{2,Y}(i\omega)\right|\right.}{R_{2,X}^2(i\omega)}\right),$$

где $|\varepsilon|=\max(|\varepsilon_X|,|\varepsilon_Y|)$.

Для упрощения следующих выкладок в дальнейшем аргумент $i\omega$ будем опускать. Поскольку

$$I_{1,x}=\int_a^b x(t)e^{-i\omega t}dt=\int_a^b x(t)\cos\omega t\,dt-i\int_a^b x(t)\sin\omega t\,dt=\operatorname{Re}(I_{1,x})-i\operatorname{Im}(I_{1,x}),$$

$$R_{2,X}=\sum_{\nu=0}^{N-1}\int_{t_{\nu-1/2}}^{t_{\nu+1/2}}x_2^*(t)e^{-i\omega t}dt=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{N-1}\int_{t_{\nu-1/2}}^{t_{\nu+1/2}}x_2^*(t)\cos\omega t\,dt-i\sum_{\nu=0}^{N-1}\int_{t_{\nu-1/2}}^{t_{\nu+1/2}}x_2^*(t)\sin\omega t\,dt=\operatorname{Re}(R_{2,X})+i\operatorname{Im}(R_{2,X}),$$

то, рассматривая отдельно вычисление действительной и мнимой части $x(t)$, придем к вычислению интегралов (7) по квадратурным формулам (22), (23), а значит, и к возможности воспользоваться оценками (24). Из этих соображений

$$\varepsilon_X=\operatorname{Re}(\varepsilon_X)+i\operatorname{Im}(\varepsilon_X)=\frac{4L}{\omega^2}\sum_{\nu=0}^{N-2}\left(\sin^2\frac{\omega\Delta t}{4}-\sin^2\frac{\omega\left|\Delta x_\nu\right|}{4L}\right)\cdot\cos\frac{\omega(t_\nu+t_{\nu+1})}{2}+$$

ISSN 0572-2691

$$+P_2(\omega)+i\left[\frac{4L}{\omega^2}\sum_{\nu=0}^{N-2}\left(\sin^2\frac{\omega\Delta t}{4}-\sin^2\frac{\omega|\Delta x_\nu|}{4L}\right)\cdot\sin\frac{\omega(t_\nu+t_{\nu+1})}{2}+P_1(\omega)\right]=$$

$$=\frac{4L}{\omega^2}\sum_{\nu=0}^{N-2}\left(\sin^2\frac{\omega\Delta t}{4}-\sin^2\frac{\omega|\Delta x_\nu|}{4L}\right)\cdot\exp\left\{-i\,\omega\frac{t_\nu+t_{\nu+1}}{2}\right\}+$$

$$+\frac{L}{\omega}\left(i\exp\left\{-i\omega\left(b-\frac{b-a}{4N}\right)\right\}\cdot\frac{2\sin\omega(b-a)/4N}{\omega}-ie^{-i\omega b}\cdot\frac{b-a}{N}\right)=$$

$$=\frac{4L}{\omega^2}\sum_{\nu=0}^{N-2}\left(\sin^2\omega\frac{b-a}{4N}-\sin^2\frac{\omega|\Delta x_\nu|}{4L}\right)\cdot\exp\left\{-i\omega\frac{t_\nu+t_{\nu+1}}{2}\right\}+$$

$$+\frac{L}{\omega}ie^{-i\omega b}\left(\exp\left\{i\omega\frac{b-a}{4N}\right\}\frac{2}{\omega}\sin\omega\frac{b-a}{4N}-\frac{b-a}{N}\right).$$

Отсюда получим следующую оценку:

$$|\varepsilon_X|\le\frac{4L}{\omega^2}\sum_{\nu=0}^{N-2}\left|\sin^2\omega\frac{b-a}{4N}-\sin^2\frac{\omega|\Delta x_\nu|}{4L}\right|+\frac{L}{|\omega|}\cdot\left|\frac{2}{\omega}\exp\left\{i\omega\frac{b-a}{4N}\right\}\sin\omega\frac{b-a}{4N}-\frac{b-a}{N}\right|.\quad(34)$$

Аналогично можно получить оценку

$$|\varepsilon_Y|\le\frac{4L}{\omega^2}\left|\sin^2\omega\frac{b-a}{4N}-\sin^2\frac{\omega|\Delta y_\nu|}{4L}\right|+\frac{L}{|\omega|}\cdot\left|\frac{2}{\omega}\exp\left\{i\omega\frac{b-a}{4N}\right\}\sin\omega\frac{-a}{4N}-\frac{b-a}{N}\right|.\quad(35)$$

Учитывая (34), (35), имеем оценку (30)

$$|\varepsilon|=\max(|\varepsilon_X|,|\varepsilon_Y|)\le$$

$$\le\frac{4L}{\omega^2}\max\left(\sum_{\nu=0}^{N-2}\left|\sin^2\omega\frac{b-a}{4N}-\sin^2\frac{\omega|\Delta x_\nu|}{4L}\right|,\ \sum_{\nu=0}^{N-2}\left|\sin^2\omega\frac{b-a}{4N}-\sin^2\frac{\omega|\Delta y_\nu|}{4L}\right|\right)+$$

$$+\frac{L}{|\omega|}\cdot\left|\frac{2}{\omega}\exp\left\{i\omega\frac{b-a}{4N}\right\}\sin\omega\frac{b-a}{4N}-\frac{b-a}{N}\right|.$$

Перейдем к нахождению приближенного вычисления преобразований Фурье входа и выхода. Для этого сначала вычислим действительную и мнимую части интегралов (25), (26):

$$\sum_{\nu=0}^{N-1}\int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}}x_2^*(t)\cos\omega t\,dt=\frac{1}{\omega}\left[-x_0\sin\omega a+\sum_{\nu=0}^{N-2}\operatorname{sign}(\Delta x_\nu)\cdot\sin\omega\frac{|\Delta x_\nu|}{2L}\times\right.$$

$$\left.\times\left((L\Delta t-|\Delta x_\nu|)\cos\omega t_{\nu+1/2}-\frac{2L}{\omega}\sin\omega t_{\nu+1/2}\right)+x_{N-1}\sin\omega b\right],$$

$$\sum_{\nu=0}^{N-1}\int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}}x_2^*(t)\sin\omega t\,dt=\frac{1}{\omega}\left[x_0\cos\omega a+\sum_{\nu=0}^{N-2}\operatorname{sign}(\Delta x_\nu)\cdot\sin\omega\frac{|\Delta x_\nu|}{2L}\times\right.$$

$$\left.\times\left((L\Delta t-|\Delta x_\nu|)\sin\omega t_{\nu+1/2}-\frac{2L}{\omega}\cos\omega t_{\nu+1/2}\right)-x_{N-1}\cos\omega b\right],$$

$$\sum_{\nu=0}^{N-1}\int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}}y_2^*(t)\cos\omega t\,dt=\frac{1}{\omega}\left[-y_0\sin\omega a+\sum_{\nu=0}^{N-2}\operatorname{sign}(\Delta y_\nu)\cdot\sin\omega\frac{|\Delta y_\nu|}{2L}\times\right.$$

$$\times\left((L\Delta t-|\Delta y_\nu|)\cos\omega t_{\nu+1/2}-\frac{2L}{\omega}\sin\omega t_{\nu+1/2}\right)+y_{N-1}\sin\omega b\Bigg],$$

$$\sum_{\nu=0}^{N-1}\int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} y_2^*(t)\sin\omega t\,dt=\frac{1}{\omega}\Bigg[y_0\cos\omega a+\sum_{\nu=0}^{N-2}\mathrm{sign}(\Delta y_\nu)\cdot\sin\omega\frac{|\Delta y_\nu|}{2L}\times$$

$$\times\left((L\Delta t-|\Delta y_\nu|)\sin\omega t_{\nu+1/2}-\frac{2L}{\omega}\cos\omega t_{\nu+1/2}\right)-y_{N-1}\cos\omega b\Bigg].$$

Следовательно,

$$R_{2,X}=\sum_{\nu=0}^{N-1}\int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} x_2^*(t)e^{-i\omega t}dt=\sum_{\nu=0}^{N-1}\int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} x_2^*(t)\cos\omega t\,dt+i\cdot\sum_{\nu=0}^{N-1}\int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} x_2^*(t)\sin\omega t\,dt=$$

$$=\frac{1}{\omega}\Bigg[\sum_{\nu=0}^{N-2}\mathrm{sign}(\Delta x_\nu)\cdot\sin\omega\frac{|\Delta x_\nu|}{2L}\left(\left(L\frac{b-a}{4N}-|\Delta x_\nu|\right)e^{i\omega t_{\nu+1/2}}-\right.$$

$$\left.-i\frac{2L}{\omega}e^{-i\omega t_{\nu+1/2}}\right)-i\,(x_{N-1}e^{i\omega b}-x_0e^{i\omega a})\Bigg].$$

Аналогично

$$R_{2,Y}=\frac{1}{\omega}\Bigg[\sum_{\nu=0}^{N-2}\mathrm{sign}(\Delta y_\nu)\cdot\sin\omega\frac{|\Delta y_\nu|}{2L}\left(\left(L\frac{b-a}{4N}-|\Delta y_\nu|\right)e^{i\omega t_{\nu+1/2}}-\right.$$

$$\left.-i\frac{2L}{\omega}e^{-i\omega t_{\nu+1/2}}\right)-i\,(y_{N-1}e^{i\omega b}-y_0e^{i\omega a})\Bigg].$$

Итак, получили (31), (32).

Чтобы вычислить $\Phi_R(i\omega)$ с помощью формул (31), (32), нужно выполнить $11N+1$ операций сложения, $11N+6$ операций умножения, 5 операций деления, 5 операций двоичного сдвига числа, $3N-1$ раз вычислить функцию $\sin x$ и $N+1$ раз — $\cos x$. Отсюда получаем оценку (33).

Теорема доказана.

Случай 3. Функция $x(t)\in C_L$, функция $y(t)\in W_{2,L}$ ($t\in[a,b]$).

В этом случае справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Пусть $x(t)\in C_L$, $y(t)\in W_{2,L}$ — финитные функции, определенные на отрезке $t\in[a,b]$ и заданы таблицей значений $\{x_\nu\}_0^N$, $\{y_\nu\}_0^N$, $\{y'_\nu\}_0^N$ в узлах равномерной сетки $t_\nu=\nu\Delta t+a$, $\Delta t=(b-a)/N$, $\nu=\overline{0,N}$. Пусть для приближенного вычисления преобразований Фурье $x(t)$ и $y(t)$ используется соответственно оптимальная по точности при $N\geq|\omega|$ на классе C_L квадратурная формула

$$R_{1,X}=\sum_{\nu=0}^{N-1}x_\nu\int_{t_{\nu-1/2}}^{t_{\nu+1/2}}e^{-i\omega t}dt \tag{36}$$

и оптимальная по порядку точности на классе $W_{2,L}$ квадратурная формула

$$R_{3,Y}=\sum_{\nu=0}^{N-1}\int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}}S_{3,y}(t)e^{-i\omega t}dt, \tag{37}$$

где $S_{3,y}(t)$ — эрмитовый кубический сплайн, $S_{3,y}(t_\nu)=y_\nu$, $S'_{3,y}(t_\nu)=y'_\nu$, $\nu=\overline{0,N}$.

Тогда при $N\geq|\omega|$ для алгоритма $\Phi_R(i\omega)=\dfrac{R_{3,Y}(i\omega)}{R_{1,X}(i\omega)}$ вычисления оценки частотной характеристики $\Phi(i\omega)=\dfrac{Y(i\omega)}{X(i\omega)}$ справедлива следующая оценка погрешности метода:

$$|\varepsilon_\Phi| \le \frac{|R_{3,Y}|}{|R_{1,X}|}\left(\frac{|\varepsilon_Y|}{|R_{3,Y}|} + \frac{|\varepsilon_X|}{|R_{1,X}|}\right), \tag{38}$$

где

$$|\varepsilon_X| \cong \frac{L\sqrt{2}\,(b-a)^2}{2\pi N}, \quad |\varepsilon_Y| \le \frac{L\sqrt{(b-a)^5}}{16N^2},$$

$$R_{1,X} = \frac{2}{\omega}\sin\omega\frac{\Delta t}{2}\sum_{\nu=0}^{N-1} x_\nu e^{-i\omega t_\nu}, \tag{39}$$

$$R_{3,Y} = \frac{1}{\omega}\left\{\left(\frac{\alpha}{2} - i\delta\right) y_0 e^{-i\omega a} + \alpha\sum_{\nu=1}^{N-1} y_\nu e^{-i\omega t_\nu} + \left(\frac{\alpha}{2} + i\delta\right) y_N e^{-i\omega b} + \right.$$

$$\left. + \Delta t\left[\left(-\beta + i\frac{\gamma}{2}\right) y_0' e^{-i\omega a} + i\gamma\sum_{\nu=1}^{N-1} y_\nu' e^{-i\omega t_\nu} + \left(\beta + i\frac{\gamma}{2}\right) y_N' e^{-i\omega b}\right]\right\}, \tag{40}$$

$$\alpha = \frac{12}{(\omega\Delta t)^2}\left(\frac{2}{\omega\Delta t}(1-\cos\omega\Delta t) - \sin\omega\Delta t\right),$$

$$\beta = \frac{1}{\omega\Delta t}\left(1 + \frac{2}{\omega\Delta t}\sin\omega\Delta t + \frac{6}{(\omega\Delta t)^2}(-1+\cos\omega\Delta t)\right),$$

$$\gamma = \frac{4}{(\omega\Delta t)^2}\left(-2 - \cos\omega\Delta t + \frac{3}{\omega\Delta t}\sin\omega\Delta t\right),$$

$$\delta = 1 + \frac{6}{(\omega\Delta t)^2}(1+\cos\omega\Delta t) - \frac{12}{(\omega\Delta t)^3}\sin\omega\Delta t .$$

При этом время реализации алгоритма $\Phi_R(i\omega)$ (4) с учетом реализации квадратурных формул (36), (37) с помощью соотношений (39), (40) можно оценить соотношением

$$T_3 \le (6N+18)\tau_1 + (7N+30)\tau_2 + 4\tau_3 + 12\tau_4 + (2N+5)\tau_5, \tag{41}$$

где $\tau_1 - \tau_5$ определены в теореме 2.

Доказательство. Сначала найдем оценки величин $|\varepsilon_X|$, $|\varepsilon_y|$. Оценка погрешности квадратурной формулы $R_{1,X}$ $|\varepsilon_X| \cong \dfrac{L\sqrt{2}\,(b-a)^2}{2\pi N}$ доказана в теореме 2. Оценим погрешность квадратурной формулы $R_{3,Y}$:

$$|\varepsilon_Y| = \left|\int_a^b (S_{3,y}(t) - y(t))e^{-i\omega t}dt\right|.$$

Воспользовавшись неравенством Гельдера, получим

$$|\varepsilon_Y| \le \sqrt{\int_a^b (S_{3,y}(t) - y(t))^2 dt}\sqrt{\int_a^b |e^{-i\omega t}|^2 dt}.$$

В [5] доказано, что $\sqrt{\int_a^b (S_{3,y}(t) - y(t))^2 dt} = \|S_{3,y}(t) - y(t)\|_{L_2[a,b]} \le \dfrac{L(\Delta t)^2}{16} = \dfrac{L(b-a)^2}{16N^2}$. Тогда $|\varepsilon_Y| \le \sqrt{\int_a^b (S_{3,y}(t) - y(t))^2 dt}\sqrt{\int_a^b |e^{-i\omega t}|^2 dt} \le \dfrac{L(b-a)^2}{16N^2}\sqrt{b-a} = \dfrac{L\sqrt{(b-a)^5}}{16N^2}$. Теперь для нахождения оценки (38)–(40) осталось вычислить выражения (36), (37):.

$$R_{1,X} = \sum_{\nu=0}^{N-1} x_\nu \int_{t_{\nu-1/2}}^{t_{\nu+1/2}} e^{-i\omega t} dt = \sum_{\nu=0}^{N-1} x_\nu \frac{2}{\omega} \sin\omega\frac{\Delta t}{2} (\cos\omega t_\nu - i\sin\omega t_\nu) =$$

$$= \frac{2}{\omega}\sin\omega\frac{\Delta t}{2} \sum_{\nu=0}^{N-1} x_\nu e^{-i\omega t_\nu} .$$

Найдем $R_{3,Y} = \sum_{\nu=0}^{N-1} \int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} S_{3,y}(t) e^{-i\omega t} dt.$

В [6] определены такие выражения:

$$\sum_{\nu=0}^{N-1} \int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} S_{3,y}(t)\cos\omega t dt = \frac{1}{\omega}\Big\{ A y_0 + B y_N + \Delta t (A_1 y_0' + B_1 y_N') +$$

$$+ \alpha \sum_{\nu=1}^{N-1} y_\nu \cos\omega t_\nu + \gamma\Delta t \sum_{\nu=1}^{N-1} y_\nu' \sin\omega t_\nu \Big\},$$

где $A = \frac{\alpha}{2}\cos\omega a - \delta\sin\omega a,$ $B = \frac{\alpha}{2}\cos\omega b + \delta\sin\omega b,$ $A_1 = -\beta\cos\omega a + \frac{\gamma}{2}\sin\omega a,$ $B_1 =$ $= \beta\cos\omega b + \frac{\gamma}{2}\sin\omega b;$

$$\sum_{\nu=0}^{N-1} \int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} S_{3,y}(t)\sin\omega t dt = \frac{1}{\omega}\Big\{ \overline{A} y_0 + \overline{B} y_N + \Delta t (\overline{A}_1 y_0' + \overline{B}_1 y_N') +$$

$$+ \alpha \sum_{\nu=1}^{N-1} y_\nu \sin\omega t_\nu - \gamma\Delta t \sum_{\nu=1}^{N-1} y_\nu' \cos\omega t_\nu \Big\},$$

где $\overline{A} = \delta\cos\omega a + \frac{\alpha}{2}\sin\omega a,$ $\overline{B} = -\delta\cos\omega b + \frac{\alpha}{2}\sin\omega b,$ $\overline{A}_1 = -\frac{\gamma}{2}\cos\omega a - \beta\sin\omega a,$ $\overline{B}_1 =$ $= -\frac{\gamma}{2}\cos\omega b + \beta\sin\omega b$.

Подставив их в (37), найдем

$$R_{3,Y} = \sum_{\nu=0}^{N-1} \int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} S_{3,y}(t)(\cos\omega t - i\sin\omega t) dt =$$

$$= \frac{1}{\omega}\Big\{ y_0 \left(\frac{\alpha}{2} e^{-i\omega t} - i\delta e^{-i\omega t} \right) + y_N \left(\frac{\alpha}{2} e^{-i\omega t} + i\delta e^{-i\omega t} \right) +$$

$$+ \Delta t \left[y_0' \left(-\beta e^{-i\omega a} + i\frac{\gamma}{2} e^{-i\omega a} \right) + y_N' \left(\beta e^{-i\omega b} + i\frac{\gamma}{2} e^{-i\omega b} \right) \right] +$$

$$+ \alpha \sum_{\nu=1}^{N-1} y_\nu e^{-i\omega t_\nu} + i\gamma\Delta t \sum_{\nu=1}^{N-1} y_\nu' e^{-i\omega t_\nu} \Big\},$$

откуда и следует соотношение (40).

Чтобы вычислить $\Phi_R(i\omega)$ с помощью формул (39), (40), нужно выполнить $6N+18$ операций сложения, $7N+30$ операций умножения, 4 операции деления, 12 операций двоичного сдвига числа, $N+3$ раз вычислить функцию $\sin x$ и $N+2$ раз — $\cos x$. Отсюда получаем оценку (41).

Теорема 4 доказана.

Заключение. В настоящей работе рассматривается линейная модель объекта управления, для которой частотные характеристики можно определять как ее основные динамические характеристики. Статья посвящена построению алгоритмов приближенного вычисления частотной характеристики линейной модели ОУ с постоянными параметрами на некоторых конкретных классах функций и получению оценок их основных характеристик (точности и быстродействия). Предложенные подходы построения $\Phi_R(i\omega)$ можно использовать также для линейных моделей объектов управления с m входами и n выходами:

$$y_j(t) = \sum_{s=1}^{m} \int_{-\infty}^{t} k_{j,s}(t,\tau) x_s(\tau) d\tau, \quad j = \overline{1, n},$$

где $k_{j,s}(t,\tau)$ — ИПФ по js-му каналу, которая определяется как реакция на j-м выходе на возмущение $x_s(u) = \delta(u-\tau)$ при $x_p \equiv 0$ (для всех $p \neq s$), а также некоторых типов нелинейных объектов [1].

В.К. Задірака, О.М. Коломис, Л.В. Луц, С.С. Мельникова

ОЦІНКИ ОСНОВНИХ ХАРАКТЕРИСТИК АЛГОРИТМІВ ОБЧИСЛЕННЯ ЧАСТОТНОЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛІНІЙНОЇ СТАЦІОНАРНОЇ МОДЕЛІ ОБ'ЄКТА КЕРУВАННЯ НА ДЕЯКИХ КЛАСАХ ФУНКЦІЙ

Побудовано ефективні за точністю алгоритми наближеного обчислення частотної характеристики лінійної моделі об'єктів керування з постійними параметрами на класах функцій різного степеня гладкості та отримано оцінки їх основних характеристик (точності та швидкодії). Розглянуто також найбільш наближені до практики інтерполяційні класи функцій.

V.K. Zadiraka, E.N. Kolomys, L.V. Luts, S.S. Melnikova

ESTIMATION OF BASIC ALGORITHMS FOR CALCULATION OF FREQUENCY CHARACTERISTIC OF LINEAR STATIONARY MODEL OF CONTROLLED OBJECT ON SOME CLASSES OF FUNCTIONS

The article is devoted to the construction of effective with respect to accuracy algorithms of approximate calculation of frequency characteristic of linear model of controlled objects with permanent parameters on classes of functions of varying degrees of smoothness and provide estimates of their main characteristics (accuracy and speed). Also the most approximate to the practice of the interpolation function classes are considered.

1. *Методы* алгоритмизации непрерывных производственных процессов / В.В. Иванов, А.И. Березовский, В.К. Задирака и др. — М. : Наука, 1975. — 400 с.
2. *Задірака В.К., Коломис О.М., Луц Л.В., Мельникова С.С.* Ефективні за точністю алгоритми обчислення оцінки частотної характеристики лінійної моделі об'єктів керування з постійними параметрами // Искусственный интеллект. — 2013. — № 3. — С. 47–57.
3. *Задирака В.К.* Теория вычисления преобразования Фурье. — Киев : Наук. думка, 1983. — 216 с.
4. *Оптимальні* алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування / І.В. Сергієнко, В.К. Задірака, О.М. Литвин, С.С. Мельникова, О.П. Нечуйвітер. — Т. 1. Алгоритми. — 447 с.; Т. 2. Застосування. — Київ : Наук. думка, 2011. — 348 с.
5. *Завьялов А.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. — М. : Наука. 1980. — 352 с.
6. *Коломыс Е.Н., Луц Л.В., Людвиченко В.А., Мельникова С.С.* Оценки вычислительной сложности некоторых алгоритмов аппроксимации функций рядами Фурье с заданной точностью // Управляющие системы и машины. — 2013. — № 5. — С. 14–26.

Получено 25.06.2013