УДК 519.873

О.Н. Хомяк

ПРИМЕНЕНИЕ УСКОРЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ СЛУЧАЙНОГО УРОВНЯ МАРКОВСКИМ ПРОЦЕССОМ

Создание современных сложных высокоответственных технических систем привело к разработке новых математических методов определения характеристик надежности. В последние годы много работ посвящено методам ускоренного моделирования, которым присущи преимущества как аналитических (высокая точность), так и статистических (широкая сфера практических применений) методов. Важный подкласс методов ускоренного моделирования составляют методы, получившие, благодаря работам [1–3], название аналитико-статистических. Существенное повышение точности расчета получаем за счет совместного использования аналитических формул при вычислении маловероятных событий (например, отказ элемента за время восстановления другого элемента) и статистического моделирования, позволяющего учесть характерные особенности функционирования системы. При этом удалось полностью отказаться от основополагающего для большинства работ предположения об экспоненциальности каких-либо случайных величин [4, 5]. Необходимо также отметить метод существенной выборки как один из наиболее распространенных подходов к ускорению моделирования. Современное состояние исследований в данном направлении описано в [6–10].

В этих публикациях исследовались системы, отказ которых никоим образом не был связан с эффективностью их работы (фактически это два состояния эффективности системы: работоспособное и неработоспособное). В то же время большой практический интерес представляют исследования систем с переменной эффективностью работы, определяемой набором отказавших элементов [11]. При этом в каждый момент времени от системы требуется определенный уровень эффективности, задаваемый случайным процессом (требуемая эффективность). Если уровень требуемой эффективности выше имеющейся, то наступает отказ, называемый функциональным [12]. Настоящая статья является обобщением работы [13], в которой рассматривались две независимые цепи Маркова. Ниже изложен метод ускоренного моделирования, позволяющий строить несмещенные оценки вероятности функционального отказа в случае марковской модели. Найдены условия, гарантирующие ограниченность относительной среднеквадратической погрешности (ОСКП), если вероятность функционального отказа стремится к нулю. Данное свойство является теоретическим обоснованием устойчивости статистических оценок при возрастании надежности системы. Рассмотрен численный пример, иллюстрирующий скорость сходимости оценок, когда выполнены условия теоремы об ограниченности относительной погрешности и когда эти условия не выполнены.

Постановка задачи

В качестве модели рассматривается двухмерный процесс Маркова $\zeta(t) = (\xi(t), \eta(t))$, $t \geq 0$, с пространством состояний $\Upsilon_\zeta = \Upsilon_\xi \times \Upsilon_\eta$, где $\Upsilon_\eta = \{1, \dots, N\}$, а Υ_ξ — конечное подмножество конечномерного векторного пространства. Первая компонента $\xi(t)$ описывает состояние исследуемой системы. Вторая компо-

 ISSN 0572-2691

нента $\eta(t)$ определяет состояние внешней среды (в частности, нагрузку на систему). Заданы интенсивности $\lambda(\mu, j; \nu, i)$ перехода процесса $\zeta(t)$ из состояния (ν, i) в состояние (μ, j). Обозначим через $\theta \in \Upsilon_\xi$ состояние системы, когда все ее элементы работоспособны.

Каждому состоянию системы $\xi(t) = \nu$ соответствует некоторая эффективность ее функционирования, определяемая функцией $f(\nu)$. При отказе элементов эффективность работы системы убывает. Вторая компонента $\eta(t)$ задает эффективность функционирования, требуемую от системы в момент времени t, а именно: если $\eta(t) = i$, то от системы в момент t требуется эффективность $g(i)$. Для определенности предположим, что $g(i)$ является монотонно возрастающей функцией. Если в некоторый момент времени требуемая эффективность выше имеющейся, то наступает так называемый функциональный [12] отказ. Исследуемой характеристикой является вероятность $Q(T) = \mathbf{P}\{\tau < T\}$ функционального отказа на отрезке времени $[0, T]$, где $\tau = \inf\{t : f(\xi(t)) < g(\eta(t))\}$.

Оценка вероятности $Q(T)$ методом ускоренного моделирования

Введем индикаторы, обозначающие переходы, связанные с уменьшением эффективности работы системы и/или возрастанием уровня требуемой эффективности:

$$a(\mu, j; \nu, i) = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda(\mu, j; \nu, i) > 0 \text{ и } f(\mu) \le f(\nu),\ g(j) \ge g(i), \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$\nu, \mu \in \Upsilon_\xi$, $i, j \in \Upsilon_\eta$ (если $a(\mu, j; \nu, i) = 1$, то переход из (ν, i) в (μ, j) связан либо с отказом одного или нескольких элементов, либо с ростом уровня требуемой эффективности, что также может привести к функциональному отказу).

Введем дополнительное условие, исключающее из рассмотрения марковские процессы, в которых возможны циклы, возникающие благодаря переходам $(\nu, i) \to (\mu, j)$ с $a(\mu, j; \nu, i) = 1$. Для этого рассмотрим вспомогательную цепь Маркова с переходными вероятностями

$$q(\mu, j; \nu, i) = \frac{a(\mu, j; \nu, i)\lambda(\mu, j; \nu, i)}{\sum\limits_{(\sigma,k)\ne(\nu,i)} a(\sigma, k; \nu, i)\lambda(\sigma, k; \nu, i)}.$$

В дальнейшем будем предполагать, что цепь Маркова с вероятностями перехода $\{q(\mu, j; \nu, i)\}$ не содержит сообщающихся состояний, т.е. не существует таких состояний (ν, i) и (μ, j), которые были бы достижимы одно из другого. Кроме того, предположим, что множество состояний $E_0 = \{(\nu, i) : f(\nu) < g(i)\}$, в которых наступает функциональный отказ, достижимо из любого состояния $(\nu, i) \notin E_0$.

Данная работа обобщает результаты, изложенные в [13]. Основная идея исследования состоит в следующем. Обозначим через $\{(\xi_k, \eta_k), k \ge 0\}$ вложенную цепь Маркова марковского процесса $\zeta(t)$, $t \ge 0$, с фиксированным начальным состоянием $(\xi_0, \eta_0) = (\theta, 1)$. Переходные вероятности данной цепи Маркова вычисляются по формуле

$$p(\mu, j; \nu, i) = \mathbf{P}\{(\xi_{k+1}, \eta_{k+1}) = (\mu, j) \,|\, (\xi_k, \eta_k) = (\nu, i)\} = \frac{\lambda(\mu, j; \nu, i)}{\Lambda(\nu, i)}, \qquad (1)$$

где

$$\Lambda(\nu, i) = \sum_{(\mu, j) \neq (\nu, i)} \lambda(\mu, j; \nu, i) \tag{2}$$

— интенсивность выхода из состояния (ν, i). Функциональный отказ произойдет в промежутке $[0, T]$ тогда и только тогда, когда вложенная цепь Маркова $\{(\xi_k, \eta_k)\}$ пройдет последовательность состояний (ν_k, i_k), $k = 0, 1, \ldots, n$, $(\nu_0, i_0) = (\theta, 1)$, $(\nu_k, i_k) \notin E_0$, $k = 1, \ldots, n-1$, $(\nu_n, i_n) \in E_0$, и суммарное время пребывания в этих состояниях не будет превосходить T (сумма экспоненциально распределенных случайных величин). Если обозначить через $\{\sigma^{(j)}(\nu, i), j \geq 1\}$ последовательность независимых экспоненциально распределенных случайных величин с параметром $\Lambda(\nu, i)$, то вероятность $Q(T)$ функционального отказа можно записать в виде ряда:

$$Q(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{(\nu_1, i_1) \notin E_0, \\ (\nu_1, i_1) \neq (\nu_0, i_0)}} p(\nu_1, i_1; \nu_0, i_0) \sum_{\substack{(\nu_2, i_2) \notin E_0, \\ (\nu_2, i_2) \neq (\nu_1, i_1)}} p(\nu_2, i_2; \nu_1, i_1) \ldots$$

$$\ldots \sum_{(\nu_n, i_n) \in E_0} p(\nu_n, i_n; \nu_{n-1}, i_{n-1}) \mathbf{P}\{\sigma^{(1)}(\nu_0, i_0) + \ldots + \sigma^{(n)}(\nu_{n-1}, i_{n-1}) < T\}. \tag{3}$$

Алгоритм ускоренного моделирования вероятности $Q(T)$ основан на формуле (3): вначале моделируется траектория вложенной цепи Маркова до попадания в состояние отказа, а затем аналитически (рекуррентные формулы) вычисляется свертка экспоненциальных распределений при известных параметрах этих распределений. Если траекторию вложенной цепи Маркова моделировать стандартным методом Монте-Карло, то до перехода во множество состояний E_0 может понадобиться большое количество шагов, что отрицательно сказывается на дисперсии оценки. Поэтому используем метод взвешенного моделирования: выбор следующего состояния осуществляется пропорционально вероятности отказа из этого состояния. Введем весовые коэффициенты, которые обозначим $\{\phi(\nu, i)\}$. Предположим, что $\phi(\nu, i) > 0$, $(\nu, i) \notin E_0$, и $\phi(\nu, i) = 1$, $(\nu, i) \in E_0$. Алгоритм построения оценки $\hat{Q}_1(T)$ в одной реализации для вероятности $Q(T)$ формулируется следующим образом.

1. Полагают, что $(\nu_0, i_0) = (\theta, 1)$ — начальное состояние вложенной цепи Маркова, $n = 0$, $\beta_1 = 1$ — начальное значение нормирующего множителя.

2. Вычисляют

$$c(\nu_n, i_n) = \sum_{(\mu, j) \in \Upsilon_\zeta} p(\mu, j; \nu_n, i_n) \phi(\mu, j).$$

3. Строят реализацию двухмерной случайной величины (ξ, η), которая принимает значение (μ, j) с вероятностью $p(\mu, j; \nu_n, i_n)\phi(\mu, j) / c(\nu_n, i_n)$. Пусть $(\xi, \eta) = (\nu_{n+1}, i_{n+1})$.

4. Полагают $\beta_{n+1} = \beta_n c(\nu_n, i_n) / \phi(\nu_{n+1}, i_{n+1})$.

5. Переходят на шаг 2 алгоритма, увеличивая при этом n на единицу, если $(\nu_{n+1}, i_{n+1}) \notin E_0$. Если же $(\nu_{n+1}, i_{n+1}) \in E_0$, то оценка $\hat{Q}_1(T)$ в одной реализации построена следующим образом:

$$\hat{Q}_1(T) = \beta_{n+1} R(T),$$

где $R(T)=\mathbf{P}\{\sigma^{(1)}(\nu_0,i_0)+\ldots+\sigma^{(n+1)}(\nu_n,i_n)<T\}$, а $\sigma^{(k)}(\nu_{k-1},i_{k-1})$, $k=1,\ldots,n+1$, — последовательность независимых экспоненциально распределенных случайных величин с параметрами $\{\Lambda(\nu_{k-1},i_{k-1})\}$.

Замечание. Алгоритм вычисления вероятности $R(T)$ сформулирован в [14]:

$$R(T)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(\overline{\Lambda}T)^k}{k!}e^{-\overline{\Lambda}T}\mathbf{P}\{\alpha_1+\ldots+\alpha_{n+1}\le k-n-1\},$$

где $\overline{\Lambda}=\max\limits_{0\le k\le n}\Lambda(\nu_k,i_k)$, а $\{\alpha_k\}$ — независимые случайные величины, имеющие геометрическое распределение с вероятностями успеха $\left\{p_k=\dfrac{\Lambda(\nu_{k-1},i_{k-1})}{\overline{\Lambda}}\right\}$. Если обозначить $h_{ij}=\mathbf{P}\{\alpha_1+\ldots+\alpha_i=j\}$, $i=1,\ldots,n+1$, $j\ge 0$, то

$$\mathbf{P}\{\alpha_1+\ldots+\alpha_{n+1}\le k-n-1\}=\sum_{j=0}^{k-n-1}h_{n+1,j},\quad h_{1j}=p_1(1-p_1)^j,\ j\ge 0,$$

$$h_{i+1,j}=\sum_{k=0}^{j}h_{ik}\,p_{i+1}(1-p_{i+1})^{j-k},\quad i=1,\ldots,n,\ j\ge 0.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Предположим, что $\phi(\nu,i)>0$, $(\nu,i)\notin E_0$, и $\phi(\nu,i)=1$, $(\nu,i)\in E_0$. Тогда оценка $\hat{Q}_1(T)$ является несмещенной, т.е. $\mathbf{M}\hat{Q}_1(T)=Q(T)$.

Доказательство. Несмещенность оценки вытекает непосредственно из сформулированного алгоритма, причем несмещенность сохраняется при любом выборе положительных весовых коэффициентов $\{\phi(\nu,i)\}$. В соответствии с изложенным выше алгоритмом построения оценки $\hat{Q}_1(T)$ имеем

$$\mathbf{M}\hat{Q}_1(T)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{(\nu_1,i_1)\notin E_0,\\(\nu_1,i_1)\ne(\nu_0,i_0)}}\frac{p(\nu_1,i_1;\nu_0,i_0)\,\phi(\nu_1,i_1)}{c(\nu_0,i_0)}\frac{c(\nu_0,i_0)}{\phi(\nu_1,i_1)}\times$$

$$\times\sum_{\substack{(\nu_2,i_2)\notin E_0,\\(\nu_2,i_2)\ne(\nu_1,i_1)}}\frac{p(\nu_2,i_2;\nu_1,i_1)\,\phi(\nu_2,i_2)}{c(\nu_1,i_1)}\frac{c(\nu_1,i_1)}{\phi(\nu_2,i_2)}\ldots$$

$$\ldots\times\sum_{(\nu_n,i_n)\in E_0}\frac{p(\nu_n,i_n;\nu_{n-1},i_{n-1})\,\phi(\nu_n,i_n)}{c(\nu_{n-1},i_{n-1})}\frac{c(\nu_{n-1},i_{n-1})}{\phi(\nu_n,i_n)}\times$$

$$\times\mathbf{P}\{\sigma^{(1)}(\nu_0,i_0)+\ldots+\sigma^{(n)}(\nu_{n-1},i_{n-1})<T\}=Q(T).$$

Теорема доказана.

Условия ограниченности относительной среднеквадратической погрешности

Ограниченность ОСКП оценок — важное свойство, являющееся теоретическим обоснованием устойчивости вычислений, когда значения некоторых параметров близки к критическим. При определенном выборе весовых коэффициентов $\{\phi(\nu,i)\}$ сформулированный выше алгоритм позволяет строить оценки, обладающие указанным свойством. Еще в середине 60-х годов И.Н. Коваленко сформулировал принцип монотонных отказов [15], согласно которому, как правило, преимущественный вклад в отказ системы вносят монотонные траектории, когда с момента отказа одного из элементов при абсолютно исправном состоянии системы и до отказа системы не было восстановлено ни одного элемента, т.е. число отказавших элементов монотонно возрастает. Именно этим принципом воспользуемся для выбора коэффициентов $\{\phi(\nu, i)\}$, т.е. $\phi(\nu, i)$ — вероятность монотонного функционального отказа вложенной цепи Маркова при начальном состоянии (ν, i). Здесь под монотонным отказом понимается любая последовательность состояний (ν_k, i_k), $k = 0, 1, \ldots, n$, такая что $(\nu_0, i_0) = (\theta, 1)$, $(\nu_k, i_k) \notin E_0$, $k = 1, \ldots, n-1$, $(\nu_n, i_n) \in E_0$, и $a(\nu_k, i_k; \nu_{k-1}, i_{k-1}) = 1$, $k = 1, \ldots, n$.

Алгоритм вычисления весовых коэффициентов $\{\phi(\nu, i)\}$ формулируется следующим образом.

1. Полагают $\phi(\mu, j) = 1$, если $(\mu, j) \in E_0$, и $\phi(\mu, j) = -1$, если $(\mu, j) \notin E_0$.

2. Пусть существует (ν, i), такое что $\phi(\nu, i) < 0$, причем $\phi(\mu, j) > 0$ для всех (μ, j), таких что $a(\mu, j; \nu, i)\, p(\mu, j; \nu, i) > 0$. Тогда вычисляют

$$\phi(\nu, i) := \sum_{(\mu, j): a(\mu, j; \nu, i)\, p(\mu, j; \nu, i) > 0} a(\mu, j; \nu, i)\; p(\mu, j; \nu, i)\, \phi(\mu, j).$$

Если же (ν, i) с указанными свойствами не существует, то весовые коэффициенты $\{\phi(\nu, i)\}$ определены для всех (ν, i) и алгоритм окончен.

Установим условия ограниченности ОСКП в случае, когда переходы, связанные с отказом элементов, являются маловероятными событиями. Предположим, что интенсивности переходов $\{\lambda(\mu, j; \nu, i)\}$ зависят от некоторого малого параметра $\varepsilon > 0$: $\lambda(\mu, j; \nu, i) = O(\varepsilon^{b(\mu, j; \nu, i)})$, $(\nu, i), (\mu, j) \in \Upsilon_\zeta$. Согласно формулам (1), (2) определяют соответствующие порядки вероятностей переходов вложенной цепи Маркова: $p(\mu, j; \nu, i) = O(\varepsilon^{s(\mu, j; \nu, i)})$, где $s(\mu, j; \nu, i) = b(\mu, j; \nu, i) - \min_{(\sigma, k) \neq (\nu, i)} b(\sigma, k; \nu, i)$. Весовые коэффициенты $\{\phi(\nu, i)\}$ также зависят от малого параметра: $\phi(\nu, i) = O(\varepsilon^{d(\nu, i)})$. Алгоритм вычисления порядков $\{d(\nu, i)\}$ вытекает из сформулированного алгоритма вычисления весовых коэффициентов $\{\phi(\nu, i)\}$.

1. Полагают $d(\mu, j) = 0$, если $(\mu, j) \in E_0$, и $d(\mu, j) = -1$, если $(\mu, j) \notin E_0$.

2. Пусть существует (ν, i), такое что $d(\nu, i) < 0$, причем $d(\mu, j) \geq 0$ для всех (μ, j), таких что $a(\mu, j; \nu, i)\, p(\mu, j; \nu, i) > 0$. Тогда вычисляют

$$d(\nu, i) = \min_{\substack{(\mu, j) \neq (\nu, i), \\ a(\mu, j; \nu, i) = 1}} \{s(\mu, j; \nu, i) + d(\mu, j)\}.$$

Повторяют шаг 2 до тех пор, пока существуют (ν, i) с указанными свойствами.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Предположим, что для любых $(\nu, i) \notin E_0$ выполняется соотношение

$$\min_{(\mu, j) \neq (\nu, i)} \{s(\mu, j; \nu, i) + d(\mu, j)\} \geq d(\nu, i). \tag{4}$$

Если, кроме того, существует последовательность состояний $\{(\alpha_k, l_k),\ k = 0, 1, \ldots, n\}$, обладающая свойствами: $(\alpha_0, l_0) = (\theta, 1)$, $(\alpha_k, l_k) \notin E_0$, $k = 1, \ldots, n-1$, $(\alpha_n, l_n) \in E_0$, $\lambda(\alpha_k, l_k; \alpha_{k-1}, l_{k-1}) > 0$, $k = 1, \ldots, n$, и

$$s(\alpha_k, l_k; \alpha_{k-1}, l_{k-1}) + d(\alpha_k, l_k) = d(\alpha_{k-1}, l_{k-1}),\ k = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

$$\Lambda(\alpha_k, l_k) = O(1),\ k = 1, \ldots, n-1, \tag{6}$$

то $r(\varepsilon) = \sqrt{\mathbf{M}\hat{Q}_1^2(T) / Q^2(T) - 1} = O(1)$ при $\varepsilon \to 0$.

ISSN 0572-2691

Доказательство. Достаточно доказать, что $\mathbf{M}\hat{Q}_1^2(T) = O(Q^2(T))$ при $\varepsilon \to 0$. Соотношения (5) и (6) позволяют построить нижнюю оценку для $Q(T)$. Если вложенная цепь Маркова $\{(\xi_k, \eta_k), k \ge 0\}$, стартуя из состояния $(\alpha_0, l_0) = (\theta, 1)$, пройдет последовательно состояния $(\alpha_k, l_k) \notin E_0$, $k = 1, \ldots, n-1$, $(\alpha_n, l_n) \in E_0$ и при этом суммарное время $\sigma^{(1)}(\alpha_0, l_0) + \ldots + \sigma^{(n)}(\alpha_{n-1}, l_{n-1})$ пребывания в указанных состояниях не превысит *T*, то наступает функциональный отказ. Поэтому

$$Q(T) \ge \mathbf{P}\{(\xi_k, \eta_k) = (\alpha_k, l_k), k = 1, \ldots, n\}\mathbf{P}\{\sigma^{(1)}(\alpha_0, l_0) + \ldots + \sigma^{(n)}(\alpha_{n-1}, l_{n-1}) < T\}. \quad (7)$$

Предположения (4) и (5) позволяют сделать вывод, что первый множитель в правой части соотношения (7) имеет порядок $O(\varepsilon^{d(\theta,1)})$. В то же время из (6) следует, что второй множитель в правой части (7) имеет порядок $O(\varepsilon^{w(\theta,1)})$, где $w(\theta, 1) = \min\limits_{(\sigma, j) \ne (\theta, 1)} b(\sigma, j; \theta, 1)$. Поэтому вероятность $Q(T)$ имеет порядок не выше $O(\varepsilon^{d(\theta,1)+w(\theta,1)})$.

Построим теперь верхнюю оценку для $\mathbf{M}\hat{Q}_1^2(T)$. Из алгоритма построения оценки $\hat{Q}_1(T)$ следует соотношение:

$$\mathbf{M}\hat{Q}_1^2(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{(\nu_1, i_1) \notin E_0, \\ (\nu_1, i_1) \ne (\nu_0, i_0)}} \frac{p(\nu_1, i_1; \nu_0, i_0)\phi(\nu_1, i_1)}{c(\nu_0, i_0)} \left(\frac{c(\nu_0, i_0)}{\phi(\nu_1, i_1)}\right)^2 \times$$

$$\times \sum_{\substack{(\nu_2, i_2) \notin E_0, \\ (\nu_2, i_2) \ne (\nu_1, i_1)}} \frac{p(\nu_2, i_2; \nu_1, i_1)\phi(\nu_2, i_2)}{c(\nu_1, i_1)} \left(\frac{c(\nu_1, i_1)}{\phi(\nu_2, i_2)}\right)^2 \ldots$$

$$\ldots \times \sum_{(\nu_n, i_n) \in E_0} \frac{p(\nu_n, i_n; \nu_{n-1}, i_{n-1})\phi(\nu_n, i_n)}{c(\nu_{n-1}, i_{n-1})} \left(\frac{c(\nu_{n-1}, i_{n-1})}{\phi(\nu_n, i_n)}\right)^2 \times$$

$$\times [\mathbf{P}\{\sigma^{(1)}(\nu_0, i_0) + \ldots + \sigma^{(n)}(\nu_{n-1}, i_{n-1}) < T\}]^2.$$

Поскольку $(\nu_0, i_0) = (\theta, 1)$, $\phi(\nu, i) = 1$ при $(\nu, i) \in E_0$ и

$$\mathbf{P}\{\sigma^{(1)}(\nu_0, i_0) + \ldots + \sigma^{(n)}(\nu_{n-1}, i_{n-1}) < T\} \le \mathbf{P}\{\sigma^{(1)}(\theta, 1) < T\},$$

то

$$\mathbf{M}\hat{Q}_1^2(T) \le c(\theta, 1)\mathbf{P}\{\sigma^{(1)}(\theta, 1) < T\} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{(\nu_1, i_1) \notin E_0, \\ (\nu_1, i_1) \ne (\nu_0, i_0)}} p(\nu_1, i_1; \nu_0, i_0) \frac{c(\nu_1, i_1)}{\phi(\nu_1, i_1)} \times$$

$$\times \sum_{\substack{(\nu_2, i_2) \notin E_0, \\ (\nu_2, i_2) \ne (\nu_1, i_1)}} p(\nu_2, i_2; \nu_1, i_1) \frac{c(\nu_2, i_2)}{\phi(\nu_2, i_2)} \ldots \sum_{(\nu_n, i_n) \in E_0} p(\nu_n, i_n; \nu_{n-1}, i_{n-1}) \times$$

$$\times \mathbf{P}\{\sigma^{(1)}(\nu_0, i_0) + \ldots + \sigma^{(n)}(\nu_{n-1}, i_{n-1}) < T\}. \quad (8)$$

Из сформулированного выше алгоритма построения оценки $\hat{Q}_1(T)$ следует, что $c(\nu, i)$ является величиной порядка $O(\varepsilon^{\min\limits_{(\mu, j) \ne (\nu, i)} \{b(\mu, j; \nu, i) + d(\mu, j)\}})$ для любых

$(\nu, i) \notin E_0$. Поэтому условие (4) теоремы гарантирует, что $\dfrac{c(\nu, j)}{\phi(\nu, j)} = O(1)$ при $\varepsilon \to 0$ для любых $(\nu, j) \notin E_0$. Поскольку вероятность $\mathbf{P}\{\sigma^{(1)}(\theta, 1) < T\}$ имеет порядок $O(\varepsilon^{w(\theta,1)})$, а $c(\theta, 1)$ — порядок $O(\varepsilon^{d(\theta,1)})$, то из соотношения (8) следует, что $\dfrac{\mathbf{M}\hat{Q}_1^2(T)}{Q^2(T)} = O(1)$. Теорема доказана.

Численный пример

Предположим, что компоненты двухмерного марковского процесса $\zeta(t) = (\xi(t), \eta(t)),\ t \ge 0$, являются независимыми марковскими процессами, принимающими значения в $\Upsilon_\xi = \{1, \ldots, 7\}$ и $\Upsilon_\eta = \{1, 2, 3\}$. На численных примерах покажем, что условия теоремы 2 являются существенными для построения оценок с ограниченной ОСКП. Для этого рассмотрим два случая: 1) характеристики процессов подобраны таким образом, что условия теоремы 2 выполнены; 2) соответствующие характеристики подобраны так, что условия теоремы 2 не выполнены.

Случай 1. Интенсивности переходов процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ зададим следующим образом: $\lambda_\xi(i, j) = \varepsilon^{0,5(j-i)}$, если $(i, j) \in S = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (5, 7), (6, 7)\}$; $\lambda_\xi(j, i) = 1$, если $(i, j) \in S$; $\lambda_\xi(i, j) = 0$ — для остальных значений (i, j); $\lambda_\eta(1, 2) = \varepsilon,\ \lambda_\eta(2, 3) = \varepsilon,\ \lambda_\eta(1, 3) = \varepsilon^2,\ \lambda_\eta(2, 1) = 1,\ \lambda_\eta(3, 2) = 0,5,$ $\lambda_\eta(3, 1) = 0,5$.

С учетом независимости процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ интенсивности переходов двухмерного процесса $\zeta(t)$ задаются следующим образом: $\lambda(i_2, j_2; i_1, j_1) = \lambda_\xi(i_1, i_2)$, если $j_2 = j_1$; $\lambda(i_2, j_2; i_1, j_1) = \lambda_\eta(j_1, j_2)$, если $i_2 = i_1$; $\lambda(i_2, j_2; i_1, j_1) = 0$, если $i_2 \ne i_1$ и $j_2 \ne j_1$. Функции имеющейся и требуемой эффективности зададим так:

$$f(i): 1,\ 0{,}9,\ 0{,}8,\ 0{,}5,\ 0{,}3,\ 0{,}2,\ 0,\ i = 1, \ldots, 7;$$

$$g(i) = 0{,}1 + 0{,}3(i-1),\ \ i = 1, 2, 3.$$

Положим $T = 10,\ \varepsilon = 2^{-m},\ m = 1, 2, \ldots$. Оценки $\hat{Q}(T)$ для вероятности $Q(T)$ функционального отказа, построенные с относительной погрешностью 1 % и достоверностью 0,99 при различных значениях ε, приведены в табл. 1 ($\hat{r}(\varepsilon)$ — ОСКП соответствующей оценки, $\hat{N}(\varepsilon)$ — количество реализаций, требуемых для достижения указанной точности оценки).

Приведенные данные показывают, что в широком диапазоне изменения вероятности функционального отказа (от $5 \cdot 10^{-2}$ до $2 \cdot 10^{-15}$) ОСКП оценок остается ограниченной, причем ее минимальное значение достигается в окрестности $\varepsilon = 2^{-5}$ ($\hat{r}(\varepsilon) = 0{,}41$). При уменьшении ε, ОСКП незначительно возрастает, что, однако, нисколько не сказывается на вычислительных затратах. Поэтому можно сделать вывод о полном соответствии численных результатов утверждению теоремы 2.

Таблица 1

m	$\hat{Q}(T)$	$\hat{r}(\varepsilon)$	$\hat{N}(\varepsilon)$
3	$5{,}32 \cdot 10^{-2}$	1,06	74782
6	$1{,}42 \cdot 10^{-4}$	0,45	13707
9	$2{,}84 \cdot 10^{-6}$	0,75	36985
12	$5{,}55 \cdot 10^{-10}$	0,89	52783
15	$1{,}08 \cdot 10^{-12}$	0,95	59771
18	$2{,}11 \cdot 10^{-15}$	0,97	62388

ISSN 0572-2691

Случай 2. Интенсивности переходов процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ зададим так же, как и в предыдущем случае, но с некоторыми изменениями: $\lambda_\xi(1, 2) = \varepsilon$, $\lambda_\xi(1, 3) = \varepsilon^2$, $\lambda_\xi(2, 4) = \varepsilon^2$, $\lambda_\xi(4, 5) = \varepsilon^2$, $\lambda_\xi(4, 6) = \varepsilon^2$, $\lambda_\xi(2, 1) = 0{,}5$, $\lambda_\xi(2, 3) = 0{,}5$. Легко видеть, что в этом случае принцип монотонных отказов не работает, т.е. не все весовые множители $\{\phi(\nu, i)\}$ позволяют оценить вклад в отказ наиболее вероятных траекторий (некоторые из них будут немонотонными). Поэтому условие (4) теоремы 2 не выполняется. Соответствующие оценки для $\hat{Q}(T)$, $\hat{r}(\varepsilon)$ и $\hat{N}(\varepsilon)$, построенные с относительной погрешностью 1 % и достоверностью 0,99 при различных значениях ε, приведены в табл. 2.

Таблица 2

m	$\hat{Q}(T)$	$\hat{r}(\varepsilon)$	$\hat{N}(\varepsilon)$
3	$8{,}63 \cdot 10^{-3}$	4,77	$1{,}51 \cdot 10^{6}$
5	$8{,}64 \cdot 10^{-5}$	7,47	$3{,}70 \cdot 10^{6}$
7	$1{,}10 \cdot 10^{6}$	9,17	$5{,}58 \cdot 10^{6}$
8	$1{,}30 \cdot 10^{-7}$	21,35	$3.02 \cdot 10^{7}$
9	$1{,}57 \cdot 10^{-8}$	31,35	$6{,}52 \cdot 10^{7}$

По сравнению с рассмотренным ранее случаем, количество реализаций, требуемых для достижения необходимой точности оценок, существенно возросло. При этом наблюдается заметный рост ОСКП оценок при убывании оцениваемой вероятности $Q(T)$, что свидетельствует об ухудшении устойчивости вычислительных алгоритмов. Поэтому можно сделать вывод, что условия теоремы 2 не носят технический характер, а их выполнение является достаточным для построения устойчивых вычислительных процедур в широком диапазоне изменения оцениваемой вероятности $Q(T)$.

О.М. Хом'як

ЗАСТОСУВАННЯ ПРИСКОРЕНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДЛЯ ОЦІНКИ ЙМОВІРНОСТІ ПЕРЕТИНУ ВИПАДКОВОГО РІВНЯ МАРКОВСЬКИМ ПРОЦЕСОМ

Досліджується двовимірний процес Маркова, перша компонента якого визначає ефективність функціонування системи, а друга — ефективність, яка вимагається від системи. Досліджується ймовірність функціональної відмови, коли наявна ефективність системи стає нижчою за ту, що вимагається. Запропоновано алгоритм прискореного моделювання ймовірності функціональної відмови. Отримано умови, які гарантують обмеженість відносної середньоквадратичної похибки. Наведено результати чисельного експерименту.

O.N. Khomyak

FAST SIMULATION METHOD FOR THE EVALUATION OF INTERSECTION PROBABILITY OF RANDOM LEVEL BY MARKOV PROCESS

A two-dimensional Markov process is considered. Its first component determines the system efficiency, and the second one — an efficiency which is required from the system. The probability of system functional failure when the real system efficiency becomes lower than the required efficiency is investigated. A fast simulation algorithm for the evaluation of the functional failure is proposed. Conditions ensuring the boundedness of relative root-mean square error are established. Numerical results are presented.

1. *Коваленко И.Н.* Асимптотический метод оценки надежности сложных систем // О надежности сложных систем. — М. : Сов. радио, 1966. — С. 205–223.
2. *Коваленко И.Н.* Аналитико-статистический метод расчета характеристик высоконадежных систем // Кибернетика. — 1976. — № 6. — С. 82–92.
3. *Коваленко И.Н.* Анализ редких событий при оценке эффективности и надежности систем. — М.: Сов. радио, 1980. — 209 с.
4. *Kovalenko I.N., Kuznetsov N.Yu., Pegg Ph.A.* Mathematical theory of reliability of time dependent systems with practical applications. — Chichester : Wiley, 1997. — 303 p.
5. *Kuznetsov N.* Fast simulation technique in reliability evaluation of Markovian and non-Markovian systems // Simulation and Optimization Methods in Risk and Reliability Theory. — New York : Nova Science Publishers, 2008. — P. 65–108.
6. *Heidelberger P.* Fast simulation of rare events in queueing and reliability models // ACM Trans. Modeling Comput. Simul. — 1995. — **5**, N 1. — P. 43–85.
7. *Glasserman P., Heidelberger Ph., Shahabuddin P., Zajic T.* Multilevel splitting for estimating rare event probabilities // Operat. Res. — 1999. — **47**, N 4. — P. 585–600.
8. *Ермаков С.М.* Метод существенной выборки для моделирования вероятностей умеренных и больших уклонений оценок и критериев // Теория вероятн. и ее применен. — 2006. — **51**, № 2. — С. 319–332.
9. *Blanchet J., Lam H.* Rare event simulation techniques / Proc. of the 2011 Winter Simulation Conference. — 2011. — P. 217–231.
10. *Li J., Mosleh A., Kang R.* Likelihood ratio gradient estimation for dynamic reliability applications // Reliab. Engin. and System Safety. — 2011. — **96**, N 12. — P. 1667–1679.
11. *Кузнецов Н.Ю.* Оценка вероятности функционального отказа высоконадежных систем методом ускоренного моделирования // Кибернетика и системный анализ. — 1991. — № 4. — С. 30–41.
12. *Самойлов О.Б., Усынин Г.Б., Бахметьев А.М.* Безопасность ядерных энергетических установок. — М. : Энергоатомиздат, 1989. — 280 с.
13. *Хомяк О.Н.* Нахождение вероятности пересечения функционалов от траекторий двух цепей Маркова методом существенной выборки // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2013. — № 4. — С. 123–128.
14. *Кузнецов Н.Ю., Шумская А.А.* О вычислении свертки экспоненциальных распределений // Там же. — 2013. — № 5. — С. 103–105.
15. *Коваленко И.Н.* Об оценке надежности сложных систем // Вопр. радиоэлектроники. — 1965. — **12**, № 9. — С. 50–68.

Получено 11.09.2013

Статья представлена к публикации членом редколлегии чл.-корр. НАН Украины Н.Ю. Кузнецовым.