УДК 519.21

Б.В. Бондарев, В.О. Болдырева

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТИ НЕРАЗОРЕНИЯ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ, РАБОТАЮЩЕЙ НА (B, S)-РЫНКЕ С УЧЕТОМ РЕКЛАМНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Введение

Для изучения функционирования страховых компаний и влияний различных стратегий управления на их деятельность используются математические модели. Наиболее простой и изученной является классическая модель риска [1, 2], где процесс поступления премий линейный, а иски удовлетворяют пуассоновскому закону распределения.

Нас интересует влияние рекламы на деятельность страховой компании, а именно, как изменяется вероятность неразорения при тех или иных отчислениях на рекламную деятельность. Выделение такого рода средств будет привлекать новых клиентов, что способствует увеличению потока премий, однако количество страховых случаев также будет увеличиваться, т.е. возрастут суммарные выплаты по искам. Поэтому необходимо определить, какую часть капитала можно отводить на рекламную деятельность так, чтобы вероятность неразорения страховой компании была максимальной. Не менее важной задачей будет нахождение условий для доказательства корректности выведенных уравнений.

В работах [3–10] рассмотрены вопросы оптимального управления страховой компанией с учетом расходов на рекламу. В частности, в работах [3, 4] решаются задачи об оптимальном во времени распределении расходов на рекламу, а также строится стратегия рекламной программы в зависимости от условий эффективности рекламы. Основными исходными данными являются начальный капитал компании и количество застрахованных клиентов, а критерием оптимальности рекламной компании является максимизация капитала, причем определяются промежутки включения и выключения рекламы. В работах [5, 6] находятся оптимальные условия управления портфелем активов и оптимальная часть средств, которая должна отводиться на рекламу, при которых функционал качества принимает наибольшее значение для накопительно-потребительского фонда с функциями страховой компании, что работает на (B, S)-рынке, а цена рискового актива описывается моделью Самуэльсона, поступающие премии случайны.

В работах [7, 8] исследуется страховая компания в рамках классической модели страхования с учетом расходов на рекламу. Методология исследования основана на использовании механизма теории управления, даны практические рекомендации по планированию рекламных компаний.

В работе [9] также рассматривается задача максимизации капитала при проведении рекламной деятельности; однако компания занимается не страховой деятельностью, а продажей однородного товара, что влечет за собой также дополнительные расходы на аренду, обслуживание и т.д.

В [11–17] находятся интегродифференциальные и интегральные уравнения для вероятности неразорения страховой компании на конечном и бесконечном промежутках времени в заданных моделях. Однако эти работы не охватывают случаи с расходами на рекламную деятельность, которые будут рассматриваться в данной статье. Основной целью будет нахождение интегродифференциальных уравнений на бесконечном промежутке времени для вероятности неразорения компании, функционирующей на (B, S)-рынке. Здесь в качестве математической модели акции рассматривается модель Самуэльсона, где обязательное условие — вложения в рекламу. Рассматриваются модели страховых компаний при постоянных и стохастических премиях, а также достаточные условия для корректного выведения уравнений.

Классическая модель риска с учетом рекламной деятельности

Пусть цена рискового актива описывается моделью Самуэльсона, т.е.

$$P(t) = P(0)\exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right\},\ t \geq 0,$$

тогда по формуле Ито [15]

$$dP(t) = P(t)(\mu dt + \sigma dW(t)). \tag{1}$$

Рассмотрим сначала классическую модель страхования — модель Крамера–Лундберга, работающую на (B, S)-рынке, т.е. когда есть возможность вкладывать имеющиеся средства как в безрисковый актив — банковский счет или облигации, так и в рисковый актив — акции. Пусть $\xi_x(t)$ — капитал компании в момент времени t, а в начальный момент времени $\xi_x(0) = x$. Пусть на рекламу происходит отчуждение средств со скоростью $\delta \geq 0$, т.е. в денежном соотношении это $\delta\xi_x(t)\Delta t$, тогда на момент времени $t + \Delta t$ останется $(1 - \delta\Delta t)\xi_x(t)$ денег.

Оставшийся капитал разбивается на две части: доля $0 \leq u \leq 1$ отводится на покупку акций, доля $1 - u$ кладется на банковский счет под процентную ставку r. В денежном соотношении: $u(1 - \delta\Delta t)\xi_x(t)$ — часть денег на покупку акций, $(1 - u)\times$ $\times(1 - \delta\Delta t)\xi_x(t)$ — часть денег, которая кладется на банковский счет, тогда на момент времени $t + \Delta t$ на банковском счету будет $(1 - u)(1 - \delta\Delta t)\xi_x(t)(1 + r\Delta t)$ денег.

После вложений в рекламную деятельность количество клиентов компании увеличится, а значит, увеличится интенсивность взносов на долю $\psi_1(\delta)$ и интенсивность поданных исков на долю $\psi(\delta)$.

Перепишем уравнение (1) в следующем виде:

$$P(t + \Delta t) - P(t) \approx P(t)(\mu\Delta t + \sigma\Delta W(t)),$$

где

$$\Delta W(t) = W(t + \Delta t) - W(t),$$

отсюда с точностью до бесконечно малых высшего порядка имеем

$$P(t + \Delta t) = P(t)(1 + \mu\,\Delta t + \sigma\Delta W(t)).$$

Количество акций, которое мы можем купить на сумму $u(1 - \delta\Delta t)\xi_x(t)$ по цене $P(t)$ за акцию, очевидно, будет $\dfrac{u(1 - \delta\Delta t)\xi_x(t)}{P(t)}$, тогда новая цена рискового актива к моменту времени $t + \Delta t$ будет равна

$$u(1 - \delta\Delta t)\xi_x(t)(1 + \mu\,\Delta t + \sigma\Delta W(t)).$$

Соотношение для эволюции капитала можно записать в виде

$$\xi_x(t+\Delta t)=c(1+\psi_1(\delta))\Delta t-\sum_{k=Z(t)}^{Z(t+\Delta t)}\eta_k+$$
$$+(1-u)(1-\delta\Delta t)\xi_x(t)(1+r\Delta t)+u(1-\delta\Delta t)\xi_x(t)(1+\mu\Delta t+\sigma\Delta W(t)),$$

где η_k — величины исков; $Z(t)$ — пуассоновский процесс количества поступающих исков; $P\{\eta_k<x\}=F(x),\ F(dx)=F(x+dx)-F(x).$

Суммарные иски к страховой компании после рекламной деятельности описываются сложным пуассоновским процессом, но уже с параметром $\lambda(1+\psi(\delta)),$ и представимы в виде стохастического интеграла $\int_0^t\int_0^{+\infty}\alpha\nu(d\alpha,ds)$ [18], где $\nu(d\alpha,ds)$ — пуассоновская мера, а

$$M\nu(d\alpha,ds)=\lambda(1+\psi(\delta))F(d\alpha)ds,$$

где $F(d\alpha)$ — мера интервала $(\alpha,\alpha+d\alpha).$

Раскрыв скобки и приведя подобные, перейдем к пределу при $\Delta t\to 0$ в выражении

$$\xi_x(t+\Delta t)=c(1+\psi_1(\delta))\Delta t-\int_0^{t+\Delta t}\int_0^{+\infty}\alpha\nu(d\alpha,ds)+$$
$$+(1-u)(1-\delta\Delta t)\xi_x(t)(1+r\Delta t)+u(1-\delta\Delta t)\xi_x(t)(1+\mu\Delta t+\sigma\Delta W(t)),$$

получим уравнение, описывающее эволюцию капитала страховой компании:

$$d\xi_x(t)=\xi_x(t)(u\mu-ur+r-\delta)\,dt+u\sigma\xi_x(t)\,dW(t)+c(1+\psi_1(\delta))\,dt-\int_0^{+\infty}\alpha\nu(d\alpha,dt).$$

Теперь воспользуемся идеями и методами работ [15–17]. Пусть первый скачок процесса исков происходит в момент времени $\tau=s.$ До этого момента уравнение капитала имело вид

$$d\xi_x(t)=\xi_x(t)(u\mu-ur+r-\delta)\,dt+u\sigma\xi_x(t)\,dW(t)+c(1+\psi_1(\delta))\,dt,$$

где $\xi_x(0)=x,$ тогда

$$a(t,x)=x(u\mu-ur+r-\delta)+c(1+\psi_1(\delta)),\ \ \sigma(t,x)=u\sigma x.$$

Пусть $P(x,t,A)=P\{\xi_x(t)\in A\}$ — вероятность перехода процесса из состояния x во множество A за время $t>0.$

По формуле полной вероятности нетрудно записать формулу для вероятности неразорения страховой компании на бесконечном интервале времени:

$$\varphi(x)=\int_0^{+\infty}\lambda(1+\psi(\delta))e^{-\lambda(1+\psi(\delta))s}\int_0^{+\infty}P(x,s,dz)\int_0^{z}\varphi(z-y)g(y)\,dy\,ds, \tag{2}$$

где $f(x)$ — плотность распределения величины иска, $f(x)=F'(x).$

Пусть $f(0)=f'(0)=0,\ f''(z)$ непрерывна, тогда

$$G(z)=\int_0^z\varphi(z-y)f(y)\,dy=\int_0^z\varphi(y)f(z-y)\,dy,$$

$$G'(z)=\varphi(z)f(0)+\int_0^z\varphi(y)f'(z-y)\,dy=\int_0^z\varphi(y)f'(z-y)\,dy,$$

$$G''(z)=\varphi(z)f'(0)+\int_0^z\varphi(y)f''(z-y)\,dy=\int_0^z\varphi(y)f''(z-y)\,dy.$$

Отсюда функция

$$U(s,x)=\int_0^{+\infty} G(z)\,P(x,s,dz)$$

имеет [19] частные производные

$$\frac{\partial U}{\partial s}(s,x),\ \frac{\partial U}{\partial x}(s,x),\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(s,x)$$

и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial s}(s,x)=[x(u\mu-ur+r-\delta)+c(1+\psi_1(\delta))]\frac{\partial U}{\partial x}(s,x)+\frac{u^2\sigma^2x^2}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(s,x) \tag{3}$$

и начальному условию $\lim\limits_{s\to+0} U(s,x)=G(x).$ Из (2) имеем

$$\varphi(x)=\int_0^{+\infty}\lambda(1+\psi(\delta))\,e^{-\lambda(1+\psi(\delta))\,s}U(s,x)\,ds. \tag{4}$$

Проинтегрировав по частям выражение (4), получим

$$\varphi(x)=u(0,x)+\int_0^{+\infty}e^{-\lambda(1+\psi(\delta))\,s}\,\frac{\partial U(s,x)}{\partial s}ds$$

или

$$\varphi(x)=\int_0^{z}\varphi(z-y)\,f(y)\,dy+\int_0^{+\infty}e^{-\lambda(1+\psi(\delta))\,s}\,\frac{\partial U(s,x)}{\partial s}ds.$$

Воспользовавшись уравнением (3) для того, чтобы выразить $\frac{\partial U(s,x)}{\partial s}$, имеем

$$\varphi(x)=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda(1+\psi(\delta))\,s}\Bigg([x(u\mu-ur+r-\delta)+c(1+\psi_1(\delta))]\frac{\partial U}{\partial x}(s,x)+$$

$$+\frac{u^2\sigma^2x^2}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(s,x)\Bigg)ds+G(x),$$

$$\varphi(x)=\int_0^{z}\varphi(z-y)\,f(y)\,dy+\frac{x(u\mu-ur+r-\delta)+c\,(1+\psi_1(\delta))}{\lambda(1+\psi(\delta))}\times$$

$$\times\int_0^{+\infty}\lambda(1+\psi(\delta))e^{-\lambda(1+\psi(\delta))s}\,\frac{\partial U}{\partial x}(s,x)ds+$$

$$+\frac{u^2\sigma^2x^2}{2\lambda(1+\psi(\delta))}\int_0^{+\infty}\lambda(1+\psi(\delta))\,e^{-\lambda(1+\psi(\delta))\,s}\,\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(s,x)\,ds,$$

$$\varphi(x)=\int_0^{z}\varphi(z-y)\,f(y)\,dy+\frac{x\,(u\mu-ur+r-\delta)+c\,(1+\psi_1(\delta))}{\lambda(1+\psi(\delta))}\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{+\infty}\lambda(1+\psi(\delta))\,e^{-\lambda(1+\psi(\delta))\,s}U(s,x)\,ds+$$

$$+\frac{u^2\sigma^2x^2}{2\lambda(1+\psi(\delta))}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^{+\infty}\lambda(1+\psi(\delta))\,e^{-\lambda(1+\psi(\delta))\,s}U(s,x)\,ds.$$

 ISSN 0572-2691

Теорема 1. Пусть $f(x)$ — плотность распределения величины иска $f(x)=F'(x)$, $f(0)=f'(0)=0$, $f''(z)$ непрерывна. Тогда $\varphi(x)$ — вероятность неразорения страховой компании — имеет производные $\varphi'(x), \varphi''(x)$ и удовлетворяет уравнению

$$\lambda(1+\psi(\delta))\varphi(x)=\lambda(1+\psi(\delta))\int_0^x \varphi(x-y)g(y)dy+$$

$$+[x(u\mu-ur+r-\delta)+c(1+\psi_1(\delta))]\varphi'(x)+\frac{u^2\sigma^2x^2}{2}\varphi''(x). \quad (5)$$

Стохастические премии

Пусть цена рискового актива также описывается моделью Самуэльсона

$$P(t)=P(0)\exp\left\{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W(t)\right\},\ t\geq 0,$$

и по формуле Ито

$$dP(t)=P(t)(\mu\, dt+\sigma dW(t)).$$

Рассмотрим модель Крамера–Лундберга, работающую на (B,S)-рынке, т.е. когда она имеет возможность вкладывать имеющиеся средства как в безрисковый актив — банковский счет или облигации, так и в рисковый актив — акции. Пусть $\xi_x(t)$ — капитал компании в момент времени t, а в начальный момент времени $\xi_x(0)=x$. Поступающие премии теперь образуют сложный пуассоновский процесс с параметром λ_1. На рекламу также отчуждается часть средств компании.

В данном случае соотношение, описывающее эволюцию капитала страховой компании, очевидно, примет вид

$$\xi_x(t+\Delta t)=\sum_{i=Z_1(t)}^{Z_1(t+\Delta t)}\gamma_i-$$

$$-\sum_{k=Z(t)}^{Z(t+\Delta t)}\eta_k+(1-u)(1-\delta\Delta t)\xi_x(t)(1+r\Delta t)+u(1-\delta\Delta t)\xi_x(t)(1+\mu\Delta t+\sigma\Delta W(t)),$$

где η_k — величины исков $P(\eta_k<x)=F(x)$; γ_i — величины премий $P(\gamma_i<x)=H(x)$. Количество поступающих исков подчиняется пуассоновскому закону распределения $Z(t)$, а количество поступающих премий — пуассоновскому закону распределения $Z_1(t)$.

Суммарные иски составляют сложный пуассоновский процесс с новым параметром $\lambda(1+\psi(\delta))$, он представим в виде стохастического интеграла $\int_0^t\int_0^{+\infty}\alpha\nu(d\alpha,ds)$ [18], где $\nu(d\alpha,ds)$ — пуассоновская мера, а

$$M\nu(d\alpha,ds)=\lambda(1+\psi(\delta))F(d\alpha)ds,$$

где $F(d\alpha)$ — мера интервала $(\alpha,\alpha+d\alpha)$.

Аналогично суммарные премии представляют собой сложный пуассоновский процесс с новым параметром $\lambda_1(1+\psi_1(\delta))$, он представим в виде стохастического интеграла $\int_0^t\int_0^{+\infty}\beta\nu_1(d\beta,ds)$ [18], где $\nu_1(d\beta,ds)$ — пуассоновская мера, а

$$M\nu_1(d\beta,ds)=\lambda_1(1+\psi_1(\delta))H(d\beta)ds,$$

где $H(d\beta)$ — мера интервала $(\beta,\beta+d\beta)$.

Раскрыв скобки и приведя подобные, перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$ в выражении

$$\xi_x(t+\Delta t) = \int_0^{t+\Delta t}\int_0^{+\infty} \beta \nu_1(d\beta, ds) - \int_0^{t+\Delta t}\int_0^{+\infty} \alpha \nu(d\alpha, ds) +$$

$$+(1-u)(1-\delta\Delta t)\,\xi_x(t)(1+r\Delta t) + u(1-\delta\Delta t)\,\xi_x(t)(1+\mu\Delta t + \sigma\Delta W(t)),$$

получим

$$d\xi_x(t) = \xi_x(t)(u\mu - ur + r - \delta)\,dt + u\sigma\xi_x(t)\,dW(t) +$$

$$+\int_0^{+\infty} \beta\nu_1(d\beta, dt) - \int_0^{+\infty} \alpha\nu(d\alpha, dt).$$

Воспользуемся идеями и методами работ [15–17]. Пусть первый скачок процесса исков происходит в момент времени $\tau = s$. До этого момента уравнение капитала имело вид

$$d\xi_x(t) = \xi_x(t)(u\mu - ur + r - \delta)\,dt + u\sigma\xi_x(t)\,dW(t),$$

где $\xi_x(0) = x$, тогда

$$a(t, x) = x(u\mu - ur + r - \delta), \;\; \sigma(t, x) = u\sigma x.$$

Пусть $P(x, t, A) = P\{\xi_x(t) \in A\}$ — вероятность перехода процесса из состояния x в состояние A.

По формуле полной вероятности выведем уравнение для вероятности неразорения страховой компании на бесконечном интервале времени:

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-[\lambda_1(1+\psi_1(\delta))+\lambda(1+\psi(\delta))]\,s} \int_0^{+\infty} P(x, s, dz) \times$$

$$\times\left(\lambda(1+\psi(\delta))\int_0^z \varphi(z-y)\,f(y)\,dy + \lambda_1(1+\psi_1(\delta))\int_0^{+\infty} \varphi(z+y)\,h(y)\,dy\right)ds,$$

где $f(y)$ — плотность распределения величины иска; $h(y)$ — плотность распределения величины премии.

Пусть $f(0) = f'(0) = 0,$ $f''(z)$ непрерывна, тогда

$$G(z) = \int_0^z \varphi(z-y)\,f(y)\,dy = \int_0^z \varphi(y)\,f(z-y)\,dy,$$

$$G'(z) = \varphi(z)\,f(0) + \int_0^z \varphi(y)\,f'(z-y)\,dy,$$

$$G''(z) = \varphi(z)\,f'(0) + \int_0^z \varphi(y)\,f''(z-y)\,dy.$$

Пусть $h(0) = h'(0) = 0,$ $h''(z)$ непрерывна, тогда

$$Q(z) = \int_0^{+\infty} \varphi(z+y)\,h(y)\,dy = \int_z^{+\infty} \varphi(y)\,h(y-z)\,dy,$$

$$Q'(z) = -\varphi(z)\,h(0) + \int_z^{+\infty} \varphi(y)\,h'(y-z)\,dy,$$

$$Q''(z) = -\varphi(z)\, h'(0) + \int_z^{+\infty} \varphi(y)\, h''(y-z)\, dy.$$

Пусть

$$V(s, x) = \int_0^{+\infty} Q(z) P(x, s, dz),$$

$V(s, x)$ имеет производные [19]

$$\frac{\partial V}{\partial s}(s, x), \frac{\partial V}{\partial x}(s, x), \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(s, x),$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial V}{\partial s}(s, x) = [x(u\mu - ur + r - \delta)] \frac{\partial V}{\partial x}(s, x) + \frac{u^2 \sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(s, x) \tag{6}$$

и граничному условию

$$\lim_{s \to +0} V(s, x) = Q(x).$$

Тогда имеем

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-[\lambda_1(1+\psi_1(\delta)) + \lambda(1+\psi(\delta))]\, s} [\lambda_1(1+\psi_1(\delta)) V(s, x) + \lambda(1+\psi(\delta)) U(s, x)]\, ds. \tag{7}$$

Проинтегрируем по частям выражение (7):

$$\varphi(x) = \frac{\lambda_1(1+\psi_1(\delta)) V(0, x) + \lambda(1+\psi(\delta)) U(0, x)}{\lambda_1(1+\psi_1(\delta)) + \lambda(1+\psi(\delta))} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-[\lambda_1(1+\psi_1(\delta)) + \lambda(1+\psi(\delta))]s}}{\lambda_1(1+\psi_1(\delta)) + \lambda(1+\psi(\delta))} \times$$

$$\times \left[\lambda_1(1+\psi_1(\delta)) \frac{\partial V}{\partial s}(s, x) + \lambda(1+\psi(\delta)) \frac{\partial U}{\partial s}(s, x) \right] ds.$$

Воспользуемся уравнениями (3) и (6) для того, чтобы выразить $\frac{\partial U}{\partial s}(s, x)$, $\frac{\partial V}{\partial s}(s, x)$:

$$\varphi(x) = \frac{\lambda_1(1+\psi_1(\delta))\, Q(x) + \lambda(1+\psi(\delta))\, G(x)}{\lambda_1(1+\psi_1(\delta)) + \lambda(1+\psi(\delta))} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-[\lambda_1(1+\psi_1(\delta)) + \lambda(1+\psi(\delta))]s}}{\lambda_1(1+\psi_1(\delta)) + \lambda(1+\psi(\delta))} \times$$

$$\times \left([x(u\mu - ur + r - \delta)] \left[\lambda_1(1+\psi_1(\delta)) \frac{\partial V}{\partial x}(s, x) + \lambda(1+\psi(\delta)) \frac{\partial U}{\partial x}(s, x) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{u^2 \sigma^2 x^2}{2} \left[\lambda_1(1+\psi_1(\delta)) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(s, x) + \lambda(1+\psi(\delta)) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(s, x) \right] \right) ds,$$

$$\varphi(x) = \frac{\lambda_1(1+\psi_1(\delta))\, Q(x) + \lambda(1+\psi(\delta))\, G(x)}{\lambda_1(1+\psi_1(\delta)) + \lambda(1+\psi(\delta))} + [x(u\mu - ur + r - \delta)] \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-[\lambda_1(1+\psi_1(\delta)) + \lambda(1+\psi(\delta))]s}}{\lambda_1(1+\psi_1(\delta)) + \lambda(1+\psi(\delta))} [\lambda_1(1+\psi_1(\delta)) V(s, x) + \lambda(1+\psi(\delta)) U(s, x)] ds +$$

$$+ \frac{u^2 \sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-[\lambda_1(1+\psi_1(\delta)) + \lambda(1+\psi(\delta))]s}}{\lambda_1(1+\psi_1(\delta)) + \lambda(1+\psi(\delta))} \times$$

$$\times [\lambda_1(1+\psi_1(\delta)) V(s, x) + \lambda(1+\psi(\delta)) U(s, x)]\, ds.$$

Теорема 2. Пусть $f(x)$ — плотность распределения величины иска $f(x) = F'(x)$, $f(0) = f'(0) = 0$, $f''(z)$ непрерывна. Пусть $h(x)$ — плотность распределения величины премии $h(x) = H'(x)$, $h(0) = h'(0) = 0$, $h''(z)$ непрерывна, тогда $\varphi(x)$ — вероятность неразорения страховой компании — имеет производные $\varphi'(x), \varphi''(x)$ и удовлетворяет уравнению

$$[\lambda_1(1+\psi_1(\delta)) + \lambda(1+\psi(\delta))]\varphi(x) = \lambda(1+\psi(\delta))\int_0^x \varphi(x-y) f(y)\,dy +$$

$$+ \lambda_1(1+\psi_1(\delta))\int_0^{+\infty} \varphi(x+y)\,h(y)\,dy + [x(u\mu - ur + r - \delta)]\varphi'(x) + \frac{(u\sigma x)^2}{2}\varphi''(x).$$

Заключение

Одной из важнейших проблем при составлении уравнений для вероятности неразорения (разорения) страховой компании, работающей на (B, S)-рынке, является выяснение достаточных условий для существования производных у вероятности неразорения, как функции начального капитала. Здесь предложен метод, в котором при составлении задействованы обратные уравнения Колмогорова. Рассмотрен бесконечный интервал функционирования страховой компании. В качестве рискового актива взята модель Самуэльсона. Случаи конечного интервала и других моделей рисковых активов будут изложены в следующих публикациях авторов. Также будут изложены методы нахождения приближенных решений найденных уравнений.

Б.В. Бондарев, В.О. Болдирєва

РІВНЯННЯ ДЛЯ ЙМОВІРНОСТІ НЕРОЗОРЕННЯ СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ, ЩО ПРАЦЮЄ НА (B, S)-РИНКУ З УРАХУВАННЯМ РЕКЛАМНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Розглядається діяльність страхової компанії, що працює на (B, S)-ринку, коли за ризиковий актив взято модель Самуельсона, а інтервал часу — від 0 до $+\infty$. Знайдено достатні умови для існування похідних у ймовірності нерозорення як функції початкового капіталу. Виведено інтегродиференціальні рівняння з частинними похідними для ймовірності нерозорення страхової компанії.

B.V. Bondarev, V.O. Boldyreva

EQUATIONS FOR THE SURVIVAL PROBABILITY OF INSURANCE COMPANY WORKING ON (B, S)-MARKET WITH THE COST OF ADVERTISING

This paper deals with the activities of insurance company operating in the (B, S)-market where the risky asset is Samuelson's model, and the time interval is from 0 to $+\infty$. Sufficient conditions for the existence of derivatives of survival probability as function of the initial capital are found. The integral-differential equations with partial derivatives of the survival probability of insurance company are derived.

 ISSN 0572-2691

1. *Бойков А.В.* Модель Крамера–Лундберга со стохастическими премиями // Теория вероятностей и ее применения. — 2002. — **47**, вып. 3. — С. 549–553.
2. *Бондарев Б.В., Жмыхова Т.В.* Математическая теория страхования. — Донецк : Юго-Восток, 2010. — 278 с.
3. *Ахмедова Д.Д., Терпугов А.Ф.* Математическая модель функционирования страховой компании с учетом расходов на рекламу // Изв. вузов. Физика. — 2001. — № 1. — С. 25–28.
4. *Ахмедова Д.Д., Змеев О.А., Терпугов А.Ф.* Оптимизация деятельности страховой компании с учетом расходов на рекламу // Вест. Томского гос. ун-та. — 2002. — № 275. — С. 181–184.
5. *Жмихова Т.В.* Керування накопичувально-споживчим фондом з можливістю інвестицій в фінансовий (*B*, *S*)-ринок та витратами на рекламу // Вісн. Київського нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Сер: Фізико-математичні науки. — 2011. — № 3. — С. 149–152.
6. *Жмихова Т.В.* Керування накопичувально-споживчим фондом з можливістю інвестицій в фінансовий (*B*, *S*)-ринок та витратами на рекламу за умови, що премії є випадковими // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика. — 2011. — № 1–2. — С. 21–26.
7. *Кац В.М.* Моделирование работы страховой компании с учетом расходов на рекламу в рамках классической модели // Изв. ТПУ. — 2007. — № 6. — С. 16–18.
8. *Кац В.М., Лившиц К.И.* Оптимальное управление расходами на рекламу страховой компании // Вест. Томского гос. пед. ун-та. — 2003. — № 5. — С. 62–64.
9. *Терпугов А.Ф., Щирова Н.П.* Математическая модель влияния рекламы на продажу однородных товаров // Статистическая обработка данных и управление в сложных системах. — Томск : Изд-во Томского ун-та, 2001. — Вып. 3. — С. 156–162.
10. *Терпугов А.Ф., Щирова Н.П.* Математическая модель оптимального вложения средств в рекламную компанию // Вест. Томского гос. ун-та. — 2002. — № 275. — С. 224–227.
11. *Бондарев Б.В., Жмыхова Т.В.* Вероятность неразорения страховой компании для модели Крамера–Лундберга и Г-распределенных выплат // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика. — 2005. — № 1–2. — С. 54–70.
12. *Бондарев Б.В., Жмыхова Т.В.* Ймовірність банкрутства страхової компанії для узагальненої моделі Крамера–Лундберга за умови розміщення капіталу на фінансовому (*B*, *S*)-ринку // Там же. — № 1–2. — С. 24–62.
13. *Бондарев Б.В., Жмыхова Т.В.* Модель Крамера–Лундберга зі стохастичними преміями за умови розміщення капіталу на банківському депозиті // Пр. Ін-ту прикладної математики і механіки НАН України. — 2008. — **16**. — С. 55–62.
14. *Бондарев Б.В., Рагулина Е.Ю.* О вероятности неразорения страховой компании на конечном интервале времени при инвестировании капитала на финансовом (*B*, *S*)-рынке // Кибернетика и системный анализ. — 2012. — № 5. — С. 112–124.
15. *Леоненко М.М., Мішура Ю.С., Пархоменко В.М., Ядренко М.Й.* Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці. — Київ : Інформтехніка, 1995. — 380 с.
16. *Рагуліна О.Ю.* Про диференційовність імовірності небанкрутства страхової компанії в моделях зі сталою відсотковою ставкою // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика. — 2010. — № 1–2. — С. 82–116.
17. *Pervozvansky A.A., Jr.* Equation for survival probability in a finite time interval in case of non-zero real interest force // Insurance: Mathematics and Economics. — 1998. — **23**, N 3. — P. 287–295.
18. *Бондарев Б.В.* Математические модели в страховании. — Донецк : АПЕКС, 2002. — 117 с.
19. *Гихман И.И., Скороход В.И.* Стохастические дифференциальные уравнения. — Киев : Наук. думка, 1968. — 357 с.

Получено 30.05.2013

Статья представлена к публикации чл.-корр. НАН Украины П.С. Кноповым.