УДК 62-502

В.Б. Ларин

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА ШУРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОСТОРОННЕГО КВАДРАТНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ

Введение

Различные прикладные задачи [1–3] связаны с теорией колебаний. Здесь следует отметить теорию сильно демпфированных систем [4], в которой центральное место занимают вопросы нахождения корней матричного (или операторного [4]) уравнения

$$A_2 X^2 + A_1 X + A_0 = 0. \tag{1}$$

В [5] матричное уравнение (1) называется односторонним квадратным матричным уравнением (ОКМУ). Естественно, что в разных задачах могут представлять интерес те или иные решения (1). В связи с этим, как и в [4], сопоставим уравнению (1) матричный пучок

$$L(\lambda) = A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0. \tag{2}$$

Пусть $A_2 = I,$ где I — единичная матрица соответствующего размера. Корень (X_1) уравнения (1) позволяет разложить пучок (2) на множители:

$$L(\lambda) = (I\lambda - \widehat{X}_1)(I\lambda - X_1). \tag{3}$$

Как отмечено в [4], при рассмотрении сильно демпфированных пучков матрица $\widehat{X}_1 = -A_1 - X_1$ уже не будет корнем уравнения (1). Однако если $A_0 = A_0^{\mathrm{T}} > 0,$ $A_1 = A_1^{\mathrm{T}} > 0,$ то вместе с матрицей X_1 корнем уравнения (1) будет и матрица $X_2 = -A_1 - X_1^{\mathrm{T}},$ т.е. имеет место соотношение

$$A_1 + X_1 + X_2^{\mathrm{T}} = 0. \tag{4}$$

Здесь и далее верхний индекс «Т» означает транспонирование. Как показано в [4], в рассматриваемом случае справедливо и соотношение

$$A_0 - X_2^{\mathrm{T}} X_1 = 0. \tag{5}$$

В [4] отмечается, что соотношения (4), (5) можно интерпретировать как аналог теоремы Виета для скалярного квадратного уравнения.

Рассмотрим случай [6], когда матрицы в (1) действительные и $A_2 = I,$ $A_0 = A_0^{\mathrm{T}} > 0,$ но $A_1 = -A_1^{\mathrm{T}}.$ Кроме того, предположим, что пучок (2) не имеет действительных собственных значений. Покажем, что пучок (2) можно факторизовать относительно действительной оси следующим образом:

$$L_1(\lambda) = (I\lambda + X_2^{*})(I\lambda - X_1). \tag{6}$$

В (6) матрица X_1 является корнем уравнения (1) и ее собственные значения расположены в верхней полуплоскости (как будет показано ниже, матрица X_2 также является корнем (1)), верхний индекс «*» означает операцию Эрмитового сопряжения (транспонирование и переход к комплексно-сопряженным величинам). Отметим, что, вследствие свойств матрицы A_1, пучок (2) не изменить, если заменить λ на $-\lambda$, а матрицы A_1, A_0 — на матрицы A_1^*, A_0^*:

$$L(\lambda) = I\lambda^2 + A_1\lambda + A_0 = I\lambda^2 + A_1^*(-\lambda) + A_0^* = I\lambda^2 + A_1\lambda + A_0. \tag{7}$$

Таким образом, согласно (6), (7)

$$L(\lambda) = (I\lambda + X_2^*)(I\lambda - X_1) = (I\lambda + X_1^*)(I\lambda - X_2). \tag{8}$$

Сравнивая (8) с (2), можно получить следующие соотношения [6]:

$$\begin{aligned} &A_1 + X_1 - X_2^* = 0, \\ &A_0 + X_2^* X_1 = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Легко убедиться в том, что матрица X_2 является корнем (1). Согласно (9) имеем

$$\begin{aligned} &X_1^* X_1 + A_0 = 0, \\ &X_1^* = X_2 + A_1. \end{aligned} \tag{10}$$

Подставив выражение для X_1^* из второго соотношения (10) в первое, получим

$$X_2^2 + A_1 X_2 + A_0 = 0,$$

т.е. X_2 является корнем (1). Поэтому соотношение (9), как и соотношения (4), (5), можно рассматривать как некоторые аналоги соответствующих равенств для скалярного квадратного уравнения, составляющих содержание теоремы Виета. Эти соотношения, в частности, могут использоваться для оценки точности вычисления корней уравнения (1) (см. [6, пример 1], [7, табл. 2]).

В [5] описывается широкий круг задач управления, в которых необходимо найти решение ОКМУ. В частности, в [5] показано, что нахождение решения несимметричного матричного алгебраического уравнения Риккати (НАУР)

$$YDY \stackrel{\wedge}{-} BY - YA + Q = 0 \tag{11}$$

может быть сведено к нахождению решения (1), в котором

$$A_0 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ Q & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -I & -D \\ 0 & -B \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix},$$

так как в этом случае решения (1), (11) связаны следующим соотношением:

$$X = \begin{bmatrix} A - DY & 0 \\ Y & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь и далее 0 — нулевая матрица соответствующего размера. Отметим, что согласно [5] заслуживают внимания решения (11), при которых соответственные значения матрицы $A - DY$ расположены в правой полуплоскости.

Для нахождения решения (1) предложен ряд алгоритмов [5–13]. Так, в [11] для нахождения решения (1) используется метод Шура [14–16]. Однако в [11] предполагается, что в (1) матрица A_2 имеет обратную. Ниже будет использовано преобразование Кэли матричного пучка [17], что позволит снять требование обратимости матрицы A_2. Предположим, что все собственные значения пучка (2) действительные (этот случай имеет место, например, в важной прикладной задаче (см. лемму 1.2 [18])). В соответствии со сделанным выше замечанием, при построении решения (11) отыщем то решение (1), при котором собственные значения матрицы $A - DY$ расположены в правой полуплоскости.

 ISSN 0572-2691

Метод Шура

Ряд алгоритмов нахождения корней (матриц X размера $n \times n$) матричных уравнений сводится к построению решения следующей системы:

$$M \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} S. \tag{12}$$

В (12) матрицы M, F (размера $2n \times 2n$) определяются коэффициентами этих матричных уравнений. Спектр матрицы S (размера $n \times n$) определяется тем или иным набором n из $2n$ собственных значений матричного пучка

$$M - \lambda F. \tag{13}$$

Другими словами, предполагается, как и в [5], что инвариантное подпространство пучка (13), соответствующее собственным значениям матрицы S, определяется столбцами матрицы $\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}$.

Перепишем уравнение (1) в виде, аналогичном (12):

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A_0 & -A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Здесь и далее 0 — нулевая матрица соответствующего размера. Таким образом, в обозначениях (12) имеем

$$M = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A_0 & -A_1 \end{bmatrix}, \; F = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \; S = X. \tag{15}$$

Пусть в (13) матрицы M, F определяются (15).

Отметим, что если матрица A_2 обратима, то для решения (1) можно использовать метод Шура [14–16]. В этом случае соотношение (14) можно записать так:

$$\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} X = H \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}, \; H = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A_2^{-1} A_0 & -A_2^{-1} A_1 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Пусть ортогональная матрица U приводит матрицу H к верхней треугольной форме (форме Шура), т.е.

$$T = U^{\mathrm{T}} H U, \tag{17}$$

где T — верхняя треугольная матрица. Для нахождения того или иного решения (1) необходимо, чтобы диагональные элементы матрицы T были упорядочены тем или иным способом, например по убыванию модуля (элемент $T(1,1)$ матрицы T имеет максимальный модуль). Разобьем матрицы U, T на квадратные блоки:

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}, \; T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ 0 & t_{22} \end{bmatrix}.$$

В соответствии с (17), приняв во внимание, что $U^{\mathrm{T}} U = I$, имеем

$$H \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{bmatrix} t_{11}$$

или

$$\begin{bmatrix} I \\ U_{21} U_{11}^{-1} \end{bmatrix} U_{11} t_{11} U_{11}^{-1} = H \begin{bmatrix} I \\ U_{21} U_{11}^{-1} \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Сравнивая (16) и (18), получим соотношения, позволяющие находить решения (1):

$$X = U_{21} U_{11}^{-1}, \tag{19}$$

$$X = U_{11} t_{11} U_{11}^{-1}. \tag{20}$$

Отметим, что только (19) соответствует известному соотношению, которое используется для нахождения решения алгебраического уравнения Риккати [14]. Для нахождения матриц из (19) в (20) можно использовать процедуры schur.m, schord.m пакета MATLAB.

Случай вырожденной матрицы A_2

Если предположить, что матрица A_2 не имеет обратной, то для использования метода Шура необходимо подвергнуть матричный пучок (13) преобразованию Кэли [17]. Предположим, что среди собственных значений $(\lambda_1,\ldots,\lambda_{2n})$ пучка (13) нет комплексных. Построим преобразование Кэли пучка (13) с параметром μ:

$$Z = (M - \mu F)^{-1}(M + \mu F). \tag{21}$$

Параметр μ в (21) удовлетворяет соотношению $\lambda < \mu > 0,$ где λ — максимальное конечное собственное значение пучка (13). Отметим, что при таком выборе параметра μ $(\mu > \lambda)$ матрица $(M - \mu F)$ имеет обратную. Таким образом, z_i, собственные значения матрицы Z, связаны с λ_i, собственными значениями матричного пучка (13), следующим образом:

$$z_i = \frac{\lambda_i + \mu}{\lambda_i - \mu}. \tag{22}$$

Отметим, что если собственные значения λ_i (исключая лежащие на бесконечности) упорядочены так, что $\lambda_{i+1} \geq \lambda_i$, то этой последовательности λ_i будет соответствовать последовательность z_i, такая что $z_{i+1} \leq z_i$. Другими словами, если, например, последовательность z_i упорядочена с помощью процедуры sort(real).m пакета MATLAB так, что $z_{i+1} \leq z_i$, то можно утверждать, что этой последовательности будет соответствовать последовательность $\lambda_{i+1} \geq \lambda_i$.

Отметим, что в соотношении (19) используется только информация о собственных векторах, определяющих искомое подпространство, но не применяется информация о соответствующих собственных значениях. Это делает возможным использование (19) в нашей задаче, поскольку собственные значения матрицы Z и пучка (13) не совпадают.

Такого рода сортировка собственных значений будет использована ниже для нахождения решения (1) с помощью метода Шура, в частности, для нахождения решения (11), при котором собственное значение матрицы $A - DY$ лежит в правой полуплоскости.

Таким образом, можно сформулировать алгоритм нахождения решения (1).

1. Формирование, согласно (15), из матричных коэффициентов (1) матриц F, M.
2. Выбор величины параметра μ $(\mu > \lambda)$.
3. Вычисление матрицы Z согласно (21).
4. Нахождение решения (1) с помощью метода Шура (соотношение (19)), описанного в предыдущем разделе (матрице H соответствует матрица Z и т.д.). Для упорядочения диагональных элементов верхней треугольной матрицы (аналог матрицы T в (17)) можно использовать процедуру sort(real).m пакета MATLAB (см. таблицу из примера 1).

Примеры

Пример 1. Матрицы из (1) вырожденные:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_0 = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}.$$

 ISSN 0572-2691

При этих исходных данных, использовав для построения решения (1) описанный выше алгоритм, который базируется на методе Шура, получим следующее:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения матрицы X таковы:

$$\lambda_1 = 3{,}6180; \ \lambda_2 = 1{,}3820.$$

Найденному решению соответствует следующее значение нормы невязки:

$$\text{nev} = \frac{\| A_2 X^2 + A_1 X + A_0 \|}{\| X \|} = 1{,}6 \cdot 10^{-15}.$$

Для иллюстрации описанного выше процесса сортировки собственных значений в таблице приведены собственные значения пучка (13) (E_m), матрицы Z (E_z) и результат (E_u) сортировки последовательности E_z процедуры sort(real).m пакета MATLAB (значение параметра μ принято равным 5). Отметим, что, как следствие сингулярности матриц A_1 в (1), использование традиционных алгоритмов [5] в этом примере проблематично.

Таблица

E_m	E_z	E_u
1,3820	1	– 6,2361
3,6180	– 6,2361	– 1,7639
inf	– 1,7639	– 1
0	– 1	1

Пример 2 (Test 2 [8]). Матрицы из (11) имеют такой вид:

$$A = 10^{-3} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \ B = A, \ D = 10^{-3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \ Q = D. \tag{23}$$

Как отмечено во введении, матрицы из (1) через исходные данные (23) выражаются следующим образом:

$$A_0 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ Q & 0 \end{bmatrix}, \ A_1 = \begin{bmatrix} -I & -D \\ 0 & -B \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}.$$

Собственные значения пучка (13) таковы:

$$\text{Inf}, \text{Inf}, 4 \cdot 10^{-3}, \ -4 \cdot 10^{-3}, \ 0, 0, 0, 0.$$

В этом и последующих примерах принимается, что $\mu = 1{,}2\lambda$, где λ — максимальное (конечное) собственное значение пучка (13), т.е. в данном примере принято, что $\mu = 4{,}8 \cdot 10^{-3}$.

Использовав описанный выше алгоритм, получим следующее выражение для матрицы Y:

$$Y = \begin{bmatrix} 0{,}500 & 0{,}500 \\ 0{,}500 & 0{,}500 \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Собственные значения $(\lambda_1 = 0{,}000, \ \lambda_2 = 0{,}0040)$ матрицы

$$A - DY = \begin{bmatrix} 0{,}0020 & -0{,}0020 \\ -0{,}0020 & 0{,}0020 \end{bmatrix}$$

расположены в правой полуплоскости. Решению (24) соответствует величина невязки $\text{nev} = 1{,}6 \cdot 10^{-9}$, которая в этом и последующих примерах определяется, как и в [5], следующим соотношением:

$$\text{nev} = \frac{\| YBY - BY - YA + Q \|_\infty}{\| YDY + Q \|_\infty + \| BY + YA \|_\infty}.$$

Как отмечено в [9], при использовании традиционных алгоритмов для решения этого примера, может потребоваться значительное число итераций (согласно [9, табл. 5.2] число итераций может достигать $5\cdot 10^4$).

Пример 3 (Test 3 [8]). Исходные данные определяются матрицами (23), за исключением матрицы *B*, которая принимается в таком виде:

$$B=\begin{bmatrix}100{,}002 & -100\\ -100 & 100{,}002\end{bmatrix}.$$

Результаты аналогичны полученным в примере 2. Так, полученному решению соответствует $\mathrm{nev}=1{,}3\cdot 10^{-9}$.

Пример 4 (Test 1 [5]). Матрицы $A, B, D, Q\in R^{n\times n}$, фигурирующие в (11), определяются следующими соотношениями:

$$A=\overline{D}-qe^{\mathrm{T}},\ \ B=\Delta-eq^{\mathrm{T}},\ \ D=qq^{\mathrm{T}},\ \ Q=ee^{\mathrm{T}},$$

$$e=(1,1,\ldots,1)^{\mathrm{T}},\ \ q=(q_1,q_2,\ldots,q_n)^{\mathrm{T}},\ \ q_i=\frac{c_i}{2\omega_i},$$

$$\begin{cases}\Delta=\mathrm{diag}\,(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n),\ \ \text{где } \delta_i=\dfrac{1}{c\omega_i(1+\alpha)},\\ D=\mathrm{diag}\,(d_1,d_2,\ldots,d_n),\ \ \text{где } d_i=\dfrac{1}{c\omega_i(1-\alpha)}.\end{cases}$$

Предполагается, что $0<c\le 1,\ 0\le\alpha<1,\ \ 0<\omega_n<\cdots<\omega_2<\omega_1<1,$

$$\sum_{i=1}^{n}c_i=1,\ \ c_i>0,\ \ i=1,2,\ldots,n.$$

Как и в [5], выбираем $\alpha=10^{-10}$, $c=1-10^{-8}$. Принимаем $n=15$, $c_i=\dfrac{1}{n}$, $\omega_i=\Omega^{i-1}\omega$, $\omega=0{,}8$, $\Omega=0{,}7$, $i=\overline{1,n}$. При этих исходных данных, используя метод Шура, получим решение (11), которому соответствует $\mathrm{nev}=3\cdot 10^{-9}$. Отметим, что использование в этом примере алгоритма [19] потребовало $5\cdot 10^4$ итераций для получения решения, которому соответствует $\mathrm{nev}=5\cdot 10^{-10}$.

Заключение

Предложен алгоритм решения ОКМУ, который базируется на преобразовании Кэли матричного пучка и алгоритме Шура, обычно используемом для нахождения решения алгебраического уравнения Риккати. В отличие от метода Шура [11], данный алгоритм позволяет находить решения ОКМУ в случае вырожденной матрицы, являющейся коэффициентом при старшей степени ОКМУ. Как показано на примере, предложенный алгоритм позволяет находить решения ОКМУ и в случае, когда все матричные коэффициенты ОКМУ являются вырожденными. Эффективность алгоритма демонстрируется на примерах, которые рассматривались другими авторами.

В.Б. Ларін

ПРО ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ ШУРА ДЛЯ ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКУ ОДНОСТОРОННЬОГО КВАДРАТНОГО МАТРИЧНОГО РІВНЯННЯ

Запропоновано алгоритм побудови розв'язку одностороннього квадратного матричного рівняння. Алгоритм базується на перетворенні Келі матричної в'язки і алгоритмі Шура, який використовується для знаходження розв'язку алгебраїчного рівняння Ріккаті. Даний алгоритм дозволяє знаходити розв'язок і у випадку виродженої матриці, яка є коефіцієнтом при старшому степені цього рівняння.

Як показано на прикладі, запропонований алгоритм ефективний і у випадку, коли всі матричні коефіцієнти цього рівняння є виродженими. Ефективність алгоритму демонструється на прикладах, які розглядалися іншими авторами.

V.B. Larin

ON THE USE OF SCHUR METHOD FOR SOLVING THE UNILATERAL QUADRATIC MATRIX EQUATION

The algorithm for solving the unilateral quadratic matrix equation is offered. The algorithm is based on the Cayley transformation of the matrix pencil and Schur method, usually used for finding solution of the algebraic Riccati equation. The given algorithm allows to find solution also in the case of singular matrix, which is coefficient at the higher degree of this equation. As shown, by example, the offered algorithm is effective also in the case when all coefficients of this equation are singular matrices. Efficiency of algorithm is shown on the examples which were considered by other authors.

1. *Barsegyan V.P., Movsisyan L.A.* Optimal control of the vibration of elastic systems described by the wave equation // Int. Appl. Mech. — 2012. — **48**, N 2. — P. 234–240.
2. *Kirichok I.F.* Forced resonant vibrations and self-heating of a flexible circular plate with piezoactuators // Ibid. — 2012. — **48**, N 5. — P. 583–591.
3. *Shui'ga N.A., Levchenko V.V., Makievskii O.I.* Nonaxisymmetric electroelastic vibrations of piezoceramic ring plates with radially cut electrodes // Ibid. — 2012. — **48**, N 4. — P. 438–446.
4. *Крейн М.Г.* Введение в геометрию индефинитных *J*-пространств и теорию операторов в этих пространствах // Вторая летняя математическая школа. — 1965. — Вып. I. — С. 15–92.
5. *Bini D.A., Meini B., Poloni F.* Transforming algebraic Riccati equations into unilateral quadratic matrix equations // Numer. Math. — 2010. — **116**. — P. 553–578.
6. *Ларин В.Б.* Решения одностороннего квадратного матричного уравнения в случае комплексных значений соответствующего матричного пучка // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2013. — № 3. — С. 5–15.
7. *Ларин В.Б.* О нахождении решения одностороннего квадратного матричного уравнения // Там же. — 2011. — № 6. — С. 16–24.
8. *Bini D., Iannazzo D., Latouche G., Mein D.* On the solution of algebraic Riccati equations arising in fluid queues // Linear Algebra and its Applications. — 2006. — **413**. — P. 474–494.
9. *Kitching C.* Return probabilities for stochastic fluid flows / The University of Melbourne, Department of Mathematics and Statistics, Honours Thesis, November — 2006. — 132 p.
10. *Larin V.B.* The unilateral quadratic matrix equation and problem of updating of parameters of model // TWMS Journ. Pure Appl. Math. — 2012. — **3**, N 2. — P. 202–209.
11. *Larin V.B.* The unilateral quadratic matrix equation and problem of eigensensitivities of matrices // Appl. Comput. Math. — 2012. — **11**, N 3. — P. 337–347.
12. *Алиев Ф.А., Ларин В.Б.* Алгоритм решения одностороннего квадратного матричного уравнения, базирующийся на соотношении Баса // Докл. НАН Азербайджана. — 2012. — № 5. — С. 19–25.
13. *Aliev F.A., Larin V.B.* Algorithm based on the Bass relation for solving the unilateral quadratic matrix equation // Appl. Comput. Math. — 2013. — **12**, N 1. — P. 3–7.
14. *Laub A.J.* A Schur method for solving algebraic Riccati equations // IEEE Trans. Automat. Contr. — 1979. — **24**. — P. 913–921.
15. *Aliev F.A., Bordyug B.A., Larin V.B.* Comments on a stability-enhancing scaling procedure for Schur–Riccati solvers // Systems & Control Letters. — 1990. — **14**. — 453 p.
16. *Aliev F.A., Larin V.B.* Optimization of linear control systems: analytical methods and computational algorithms. — Amsterdam : Gordon and Breach Science Publishers, 1998. — 261 p.
17. *Алиев Ф.А., Бордюг Б.А., Ларин В.Б.* Вычисление оптимального стационарного регулятора // Технич. кибернетика. — 1985. — № 2. — С. 143–151.
18. *Juang J., Li W.-W.* Nonsymmetric algebraic Riccati equations and Hamiltonian-like matrices // SIAM J. Matrix Anal. Appl. — 1998. — **20**, N 1. — P. 228–243.
19. *Lu Lin-Zhang.* Solution form and simple iteration of a nonsymmetric algebraic Riccati equation arising in transport theory // Ibid. — 2005. — **26**, N 3. — P. 679–685.

Получено 26.09.2013