УДК 517.977.56

М.М. Копец

МАТРИЧНОЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ РИККАТИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В теории оптимального управления линейно-квадратическая задача играет весьма существенную роль. Она возникает при построении оптимального управления по принципу обратной связи [1], при нахождении оптимальных фильтров Калмана–Бьюси [2], в теории дифференциальных игр [3]. С каждой такой задачей непосредственно связано матричное дифференциальное или алгебраическое уравнение Риккати. В случае когда исследуются системы с сосредоточенными параметрами, это уравнение изучено достаточно полно. Для систем с распределенными параметрами ситуация не столь однозначна. Например, в [4] рассматриваются операторные уравнения Риккати, исследуемые методами функционального анализа. В работах [5, 6] данный вопрос не рассматривается. Линейно-квадратической задаче оптимального управления процессом, описываемым системой линейных дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа, посвящена настоящая статья. Предполагается, что управления являются как распределенными, так и граничными (посредством граничных условий). С помощью метода множителей Лагранжа для рассматриваемой задачи оптимизации получено матричное интегродифференциальное уравнение Риккати с частными производными.

Постановка задачи

Пусть управляемый процесс описывается следующей системой дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\frac{\partial \mathbf{z}(t,x)}{\partial t} = \mathbf{A}\frac{\partial^2 \mathbf{z}(t,x)}{\partial x^2} + \mathbf{B}\frac{\partial \mathbf{z}(t,x)}{\partial x} + \mathbf{C}\mathbf{z}(t,x) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t,x), \tag{1}$$

где $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ — заданные квадратные матрицы размерности $n\times n$, $\mathbf{D}$ — известная прямоугольная матрица размерности $n\times m$, $\mathbf{z}(t,x)\in L_2^n(\Omega)$ и $\mathbf{u}(t,x)\in L_2^m(\Omega)$ — соответственно n- и m-мерная вектор-функции состояния и управления, подлежащие определению, множество Ω имеет вид $\Omega=\{(t,x): t\in[t_0,t_1],\ x\in[0,l]\}$, $\frac{\partial \mathbf{z}(t,x)}{\partial t}\in L_2^n(\Omega)$, $\frac{\partial \mathbf{z}(t,x)}{\partial x}\in L_2^n(\Omega)$, $\frac{\partial^2 \mathbf{z}(t,x)}{\partial x^2}\in L_2^n(\Omega)$. Для системы уравнений (1) заданы начальное условие

$$\mathbf{z}(t_0,x)=\mathbf{f}(x) \tag{2}$$

и граничные условия

$$\frac{\partial \mathbf{z}(t,0)}{\partial x} + \mathbf{E}\mathbf{z}(t,0) = \mathbf{F}\mathbf{v}(t),\quad \frac{\partial \mathbf{z}(t,l)}{\partial x} + \mathbf{G}\mathbf{z}(t,l) = \mathbf{H}\mathbf{w}(t), \tag{3}$$

где $\mathbf{E}$, $\mathbf{G}$ — заданные квадратные матрицы размерности $n\times n$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{H}$ — заданные прямоугольные матрицы размерностей $n\times m_1$ и $n\times m_2$ соответственно, $\mathbf{f}(x)\in L_2^n(0,l)$, $\mathbf{v}(t)\in L_2^{m_1}(t_0,t_1)$ — m_1-мерная вектор-функция и $\mathbf{w}(t)\in L_2^{m_2}(t_0,t_1)$ — m_2-мерная вектор-функция (граничные управления), их также необходимо найти. Переменная t обозначает время $(t_0\le t\le t_1)$, x — пространственная переменная

 ISSN 0572-2691

$(0 \le x \le l)$, действительные числа $t_0 \ge 0$, $t_1 \succ 0$ и $l \succ 0$ заданы. Рассмотрим следующий функционал:

$$I(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{v}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{K}\mathbf{v}(t) + \mathbf{w}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{L}\mathbf{w}(t)]\,dt + \frac{1}{2}\int_0^l \mathbf{z}^{\mathrm{T}}(t_1, x)\mathbf{M}(x)\,\mathbf{z}(t_1, x)\,dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l [\mathbf{z}^{\mathrm{T}}(t, x)\mathbf{N}(t, x)\mathbf{z}(t, x) + \mathbf{u}^{\mathrm{T}}(t, x)\,\mathbf{Q}(t, x)\mathbf{u}(t, x)]\,dx\,dt. \qquad (4)$$

Здесь $\mathbf{K}$, $\mathbf{L}$ — заданные квадратные симметрические положительно-определенные матрицы размерностей $m_1 \times m_1$ и $m_2 \times m_2$ соответственно, $\mathbf{M}(x)$ и $\mathbf{N}(t, x)$ — известные квадратные симметрические неотрицательно определенные матрицы размерности $n \times n$, $\mathbf{Q}(t, x)$ — заданная квадратная симметрическая положительно-определенная матрица размерности $m \times m$. Функции $\mathbf{u}(t, x) \in L_2^m(\Omega)$, $\mathbf{v}(t) \in L_2^{m_1}(t_0, t_1)$, $\mathbf{w}(t) \in L_2^{m_2}(t_0, t_1)$ называются допустимыми управлениями. Для фиксированных допустимых управлений под решением краевой задачи (1)–(3) понимаем ее обобщенное решение. Задача оптимального управления (1)–(4) состоит в определении допустимых управлений $\mathbf{u}(t, x)$, $\mathbf{v}(t)$, $\mathbf{w}(t)$ и соответствующего им решения $\mathbf{z}(t, x)$ задачи (1)–(3), на которых функционал (4) принимает наименьшее возможное значение.

Необходимые условия оптимальности

Решение сформулированной выше задачи оптимального управления (1)–(4) ищем с помощью метода множителей Лагранжа [7, с. 31]. Согласно этому методу рассматривается вспомогательный функционал

$$J(\mathbf{p}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{v}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{K}\mathbf{v}(t) + \mathbf{w}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{L}\mathbf{w}(t)]\,dt + \frac{1}{2}\int_0^l \mathbf{z}^{\mathrm{T}}(t_1, x)\mathbf{M}(x)\,\mathbf{z}(t_1, x)\,dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l [\mathbf{z}^{\mathrm{T}}(t, x)\mathbf{N}(t, x)\mathbf{z}(t, x) + \mathbf{u}^{\mathrm{T}}(t, x)\,\mathbf{Q}(t, x)\mathbf{u}(t, x)]\,dx\,dt +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t, x)\left[\mathbf{A}\frac{\partial^2 \mathbf{z}(t, x)}{\partial x^2} + \mathbf{B}\frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + \mathbf{C}\mathbf{z}(t, x) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t, x) - \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial t}\right]dx\,dt +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{p}^{T}(t, 0)\mathbf{A}\left[\frac{\partial \mathbf{z}(t, 0)}{\partial x} + \mathbf{E}\mathbf{z}(t, 0) - \mathbf{F}\mathbf{v}(t)\right]dt +$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t, l)\mathbf{A}\left[\frac{\partial \mathbf{z}(t, l)}{\partial x} + \mathbf{G}\mathbf{z}(t, l) - \mathbf{H}\mathbf{w}(t)\right]dt, \qquad (5)$$

где $\mathbf{p}(t, x)$ — неизвестная n-мерная вектор-функция, именуемая множителем Лагранжа. Такой прием дает возможность свести задачу (1)–(4) на условный экстремум к задаче минимизации функционала (5) с учетом условия (2). Затем следует найти выражение ΔJ для приращения функционала (5)

$$\Delta J = J(\mathbf{p} + \varepsilon\delta\mathbf{p}, \mathbf{u} + \varepsilon\delta\mathbf{u}, \mathbf{v} + \varepsilon\delta\mathbf{v}, \mathbf{w} + \varepsilon\delta\mathbf{w}, \mathbf{z} + \varepsilon\delta\mathbf{z}) - J(\mathbf{p}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}).$$

В развернутом виде последнее соотношение запишем следующим образом:

$$\Delta J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} [[\mathbf{v}^{\mathrm{T}}(t) + \varepsilon\delta\mathbf{v}^{\mathrm{T}}(t)]\mathbf{K}[\mathbf{v}(t) + \varepsilon\delta\mathbf{v}(t)] + [\mathbf{w}^{\mathrm{T}}(t) + \varepsilon\delta\,\mathbf{w}^{\mathrm{T}}(t)]\mathbf{L}[\mathbf{w}(t) + \varepsilon\delta\mathbf{w}(t)]]\,dt +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^l[\mathbf{z}^{\mathrm{T}}(t_1,x)+\varepsilon\delta\mathbf{z}^{\mathrm{T}}(t_1,x)]\mathbf{M}(x)[\mathbf{z}(t_1,x)+\varepsilon\delta\mathbf{z}(t_1,x)]dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l[[\mathbf{z}^{\mathrm{T}}(t,x)+\varepsilon\delta\mathbf{z}^{\mathrm{T}}(t,x)]\mathbf{N}(t,x)[\mathbf{z}(t,x)+\varepsilon\delta\mathbf{z}(t,x)]+$$

$$+[\mathbf{u}^{\mathrm{T}}(t,x)+\varepsilon\delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}(t,x)]\mathbf{Q}(t,x)[\mathbf{u}(t,x)+\varepsilon\delta\mathbf{u}(t,x)]]dxdt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l[\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,x)+\varepsilon\delta\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,x)]\left[\mathbf{A}\left[\frac{\partial^2\mathbf{z}(t,x)}{\partial x^2}+\varepsilon\frac{\partial^2\delta\mathbf{z}(t,x)}{\partial x^2}\right]+\right.$$

$$+\mathbf{B}\left[\frac{\partial\mathbf{z}(t,x)}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial\delta\mathbf{z}(t,x)}{\partial x}\right]+C[\mathbf{z}(t,x)+\varepsilon\delta\mathbf{z}(t,x)]+$$

$$\left.+\mathbf{D}[\mathbf{u}(t,x)+\varepsilon\delta\mathbf{u}(t,x)]-\left[\frac{\partial\mathbf{z}(t,x)}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial\delta\mathbf{z}(t,x)}{\partial t}\right]\right]dxdt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}[\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,0)+\varepsilon\delta\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,0)]\mathbf{A}\left[\left[\frac{\partial\mathbf{z}(t,0)}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial\delta\mathbf{z}(t,0)}{\partial x}\right]+\mathbf{E}[\mathbf{z}(t,0)+\varepsilon\delta\mathbf{z}(t,0)]-\mathbf{F}]\right]dt+$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}[\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,l)+\varepsilon\delta\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,l)]\mathbf{A}\left[\left[\frac{\partial\mathbf{z}(t,l)}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial\delta\mathbf{z}(t,l)}{\partial x}\right]+\right.$$

$$\left.+\mathbf{G}[\mathbf{z}(t,l)+\varepsilon\delta\mathbf{z}(t,l)]-\mathbf{H}[\mathbf{w}(t)+\varepsilon\delta\mathbf{w}(t)]\right]dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}[\mathbf{v}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{K}\mathbf{v}(t)+\mathbf{w}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{L}\mathbf{w}(t)]dt-\frac{1}{2}\int_0^l\mathbf{z}^{\mathrm{T}}(t_1,x)\mathbf{M}(x)\mathbf{z}(t_1,x)dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l[\mathbf{z}^{\mathrm{T}}(t,x)\mathbf{N}(t,x)\mathbf{z}(t,x)+\mathbf{u}^{\mathrm{T}}(t,x)\mathbf{Q}(t,x)\mathbf{u}(t,x)]dxdt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,x)\left[\mathbf{A}\frac{\partial^2\mathbf{z}(t,x)}{\partial x^2}+\mathbf{B}\frac{\partial\mathbf{z}(t,x)}{\partial x}+\mathbf{C}z(t,x)+\mathbf{D}\mathbf{u}(t,x)-\frac{\partial\mathbf{z}(t,x)}{\partial t}\right]dxdt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,0)\mathbf{A}\left[\frac{\partial\mathbf{z}(t,0)}{\partial x}+\mathbf{E}\mathbf{z}(t,0)-\mathbf{F}\mathbf{v}(t)\right]dt-\int_{t_0}^{t_1}\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,l)\mathbf{A}\left[\frac{\partial\mathbf{z}(t,l)}{\partial x}+\mathbf{G}\mathbf{z}(t,l)-\mathbf{H}\mathbf{w}(t)\right]dt. \quad (6)$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов соотношение (6) примет следующий вид:

$$\Delta J=\frac{\varepsilon}{2}\int_{t_0}^{t_1}[\mathbf{v}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{K}\delta\mathbf{v}(t)+\delta\mathbf{v}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{K}\mathbf{v}(t)]dt+\frac{\varepsilon}{2}\int_{t_0}^{t_1}[\mathbf{w}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{L}\delta\mathbf{w}(t)+\delta\mathbf{w}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{L}\mathbf{w}(t)]dt+$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}\int_0^l[\mathbf{z}^{\mathrm{T}}(t_1,x)\mathbf{M}(x)\delta\mathbf{z}(t_1,x)+\delta\mathbf{z}^{\mathrm{T}}(t_1,x)\mathbf{M}(x)\mathbf{z}(t_1,x)]dx+\frac{\varepsilon}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l[\mathbf{z}^{\mathrm{T}}(t,x)\mathbf{N}(t,x)\delta\mathbf{z}(t,x)+$$

$$+\delta\mathbf{z}^{\mathrm{T}}(t,x)\mathbf{N}(t,x)\mathbf{z}(t,x)+\mathbf{u}^{\mathrm{T}}(t,x)\mathbf{Q}(t,x)\delta\mathbf{u}(t,x)+\delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}(t,x)\mathbf{Q}(t,x)\mathbf{u}(t,x)]dxdt+$$

$$+\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,x)\left[\mathbf{A}\frac{\partial^2\delta\mathbf{z}(t,x)}{\partial x^2}+\mathbf{B}\frac{\partial\delta\mathbf{z}(t,x)}{\partial x}+\mathbf{C}\delta\mathbf{z}(t,x)+\mathbf{D}\delta\mathbf{u}(t,x)-\frac{\partial\delta\mathbf{z}(t,x)}{\partial t}\right]dxdt+$$

 ISSN 0572-2691

$$+\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \delta\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,x)\left[\mathbf{A}\frac{\partial^2\mathbf{z}(t,x)}{\partial x^2}+\mathbf{B}\frac{\partial\mathbf{z}(t,x)}{\partial x}+\mathbf{C}\mathbf{z}(t,x)+\mathbf{D}\mathbf{u}(t,x)-\frac{\partial\mathbf{z}(t,x)}{\partial t}\right]dxdt+$$

$$+\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,0)\mathbf{A}\left[\frac{\partial\delta\mathbf{z}(t,0)}{\partial x}+\mathbf{E}\delta\mathbf{z}(t,0)-\mathbf{F}\delta\mathbf{v}(t)\right]dt+$$

$$+\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\delta\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,0)\mathbf{A}\left[\frac{\partial\mathbf{z}(t,0)}{\partial x}+\mathbf{E}\mathbf{z}(t,0)-\mathbf{F}\mathbf{v}(t)\right]dt-$$

$$-\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,l)\mathbf{A}\left[\frac{\partial\delta\mathbf{z}(t,l)}{\partial x}+\mathbf{G}\delta\mathbf{z}(t,l)-\mathbf{H}\delta\mathbf{w}(t)\right]dt-$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{t_0}^{t_1}[\delta\mathbf{v}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{K}\delta\mathbf{v}(t)+\delta\mathbf{w}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{L}\delta\mathbf{w}(t)]dt+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^l\delta\mathbf{z}^{\mathrm{T}}(t_1,x)\mathbf{M}(x)\delta\mathbf{z}(t_1,x)\,dx+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l[\delta\mathbf{z}^{\mathrm{T}}(t,x)\mathbf{N}(t,x)\delta\mathbf{z}(t,x)+\delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}(t,x)\mathbf{Q}(t,x)\delta\mathbf{u}(t,x)]\,dx\,dt+$$

$$+\varepsilon^2\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\delta\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,x)\left[\mathbf{A}\frac{\partial^2\delta\mathbf{z}(t,x)}{\partial x^2}+\mathbf{B}\frac{\partial\delta\mathbf{z}(t,x)}{\partial x}+\mathbf{C}\delta\mathbf{z}(t,x)+\mathbf{D}\delta\mathbf{u}(t,x)-\frac{\partial\delta\mathbf{z}(t,x)}{\partial t}\right]dxdt+$$

$$+\varepsilon^2\int_{t_0}^{t_1}\delta\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,0)\mathbf{A}\left[\frac{\partial\delta\mathbf{z}(t,0)}{\partial x}+\mathbf{E}\delta\mathbf{z}(t,0)-\mathbf{F}\delta\mathbf{v}(t)\right]dt-$$

$$-\varepsilon^2\int_{t_0}^{t_1}\delta\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,l)\mathbf{A}\left[\frac{\partial\delta\mathbf{z}(t,l)}{\partial x}+\mathbf{G}\delta\mathbf{z}(t,l)-\mathbf{H}\mathbf{w}(t)\right]dt. \qquad (7)$$

Соотношение (7) можно упростить следующим образом. Поскольку справедливо равенство

$$\mathbf{A}\left[\frac{\partial^2\mathbf{z}(t,x)}{\partial x^2}+\varepsilon\frac{\partial^2\delta\mathbf{z}(t,x)}{\partial x^2}\right]+\mathbf{B}\left[\frac{\partial\mathbf{z}(t,x)}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial\delta\mathbf{z}(t,x)}{\partial x}\right]+$$

$$+\mathbf{C}[\mathbf{z}(t,x)+\varepsilon\delta\mathbf{z}(t,x)]+\mathbf{D}[\mathbf{u}(t,x)+\varepsilon\delta\mathbf{u}(t,x)]-\left[\frac{\partial\mathbf{z}(t,x)}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial\delta\mathbf{z}(t,x)}{\partial t}\right]=\mathbf{0},$$

то, принимая во внимание уравнение (1), приходим к очевидному соотношению:

$$\mathbf{A}\frac{\partial^2\delta\mathbf{z}(t,x)}{\partial x^2}+\mathbf{B}\frac{\partial\delta\mathbf{z}(t,x)}{\partial x}+\mathbf{C}\delta\mathbf{z}(t,x)+\mathbf{D}\delta\mathbf{u}(t,x)-\frac{\partial\delta\mathbf{z}(t,x)}{\partial t}=\mathbf{0}. \qquad (8)$$

Аналогично устанавливаем справедливость равенств

$$\frac{\partial\delta\mathbf{z}(t,0)}{\partial x}+\mathbf{E}\delta\mathbf{z}(t,0)-\mathbf{F}\delta\mathbf{v}(t)=\mathbf{0},\quad \frac{\partial\delta\mathbf{z}(t,l)}{\partial x}+\mathbf{G}\delta\mathbf{z}(t,l)-\mathbf{H}\delta\mathbf{w}(t)=\mathbf{0}. \qquad (9)$$

Дважды применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,x)\,\mathbf{A}\frac{\partial^2\delta\mathbf{z}(t,x)}{\partial x^2}dxdt=\int_{t_0}^{t_1}\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,l)\,\mathbf{A}\frac{\partial\delta\mathbf{z}(t,l)}{\partial x}dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,0)\,\mathbf{A}\frac{\partial\delta\,\mathbf{z}(t,0)}{\partial x}dt-\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\frac{\partial\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,x)}{\partial x}\mathbf{A}\frac{\partial\delta\,\mathbf{z}(t,x)}{\partial x}dx\,dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,l)\mathbf{AH}\delta\,\mathbf{w}(t)\,dt-\int_{t_0}^{t_1}\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,0)\mathbf{AF}\delta\,\mathbf{v}(t)\,dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,l)\mathbf{AG}\delta\,\mathbf{z}(t,l)dt+\int_{t_0}^{t_1}\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,0)\mathbf{AE}\delta\,\mathbf{z}(t,0)dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,l)}{\partial x}\mathbf{A}\delta\,\mathbf{z}(t,l)\,dt+\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,0)}{\partial x}\mathbf{A}\delta\,\mathbf{z}(t,0)\,dt+\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\frac{\partial^2\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,x)}{\partial x^2}\mathbf{A}\delta\,\mathbf{z}(t,x)dx\,dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,l)\mathbf{AH}\delta\mathbf{w}(t)\,dt-\int_{t_0}^{t_1}\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,0)\mathbf{AF}\delta\,\mathbf{v}(t)\,dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,l)}{\partial x}\mathbf{A}+\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,l)\mathbf{AG}\right]\delta\,\mathbf{z}(t,l)\,dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,0)}{\partial x}\mathbf{A}+\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,0)\mathbf{AE}\right]\delta\,\mathbf{z}(t,0)\,dt+\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\frac{\partial^2\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,x)}{\partial x^2}\mathbf{A}\delta\mathbf{z}(t,x)dx\,dt.\qquad(10)$$

Подобным образом после однократного применения формулы интегрирования по частям имеем

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,x)\mathbf{B}\frac{\partial\delta\mathbf{z}(t,x)}{\partial x}dxdt=\int_{t_0}^{t_1}\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,l)\mathbf{B}\delta\,\mathbf{z}(t,l)dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,0)\mathbf{B}\delta\,\mathbf{z}(t,0)dt-\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\frac{\partial\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,x)}{\partial x}\mathbf{B}\delta\,\mathbf{z}(t,x)dxdt.\qquad(11)$$

Поскольку $\delta\,\mathbf{z}(t_0,x)=\mathbf{f}(x)-\mathbf{f}(x)=\mathbf{0}$, аналогично приходим к следующему равенству:

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,x)\frac{\partial\delta\mathbf{z}(t,x)}{\partial t}dxdt=\int_0^l\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t_1,x)\delta\,\mathbf{z}(t_1,x)dx-$$

$$-\int_0^l\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t_0,x)\delta\mathbf{z}(t_0,x)dx-\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\frac{\partial\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,x)}{\partial t}\delta\,\mathbf{z}(t,x)dxdt=$$

$$=\int_0^l\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t_1,x)\;\delta\,\mathbf{z}(t_1,x)dx-\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\frac{\partial\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,x)}{\partial t}\;\delta\,\mathbf{z}(t,x)dxdt.\qquad(12)$$

Кроме того, очевидны такие равенства:

$$\mathbf{z}^{\mathrm{T}}(t_1,x)\mathbf{M}(x)\delta\mathbf{z}(t_1,x)+\delta\,\mathbf{z}^{\mathrm{T}}(t_1,x)\mathbf{M}(x)\mathbf{z}(t_1,x)=2\mathbf{z}^{\mathrm{T}}(t_1,x)\mathbf{M}(x)\delta\,\mathbf{z}(t_1,x),\qquad(13)$$

$$\mathbf{z}^{\mathrm{T}}(t,x)\mathbf{N}(t,x)\delta\mathbf{z}(t,x)+\delta\,\mathbf{z}^{\mathrm{T}}(t,x)\mathbf{N}(t,x)\mathbf{z}(t,x)=2\mathbf{z}^{\mathrm{T}}(t,x)\mathbf{N}(t,x)\,\delta\mathbf{z}(t,x),\qquad(14)$$

$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}}(t,x)\mathbf{Q}(t,x)\delta\mathbf{u}(t,x)+\delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}(t,x)\mathbf{Q}(t,x)\mathbf{u}(t,x)=2\mathbf{u}^{\mathrm{T}}(t,x)\mathbf{Q}(t,x)\delta\mathbf{u}(t,x),\qquad(15)$$

$$\mathbf{v}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{K}\delta\mathbf{v}(t)+\delta\mathbf{v}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{K}\mathbf{v}(t)=2\mathbf{v}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{K}\delta\mathbf{v}(t),\qquad(16)$$

$$\mathbf{w}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{L}\delta\mathbf{w}(t)+\delta\mathbf{w}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{L}\mathbf{w}(t)=2\mathbf{w}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{L}\delta\mathbf{w}(t).\qquad(17)$$

 ISSN 0572-2691

С учетом соотношений (8)–(17) выражение (7) примет вид

$$\Delta J = \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} [[\mathbf{v}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{K} - \mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,0)\mathbf{AF}]\delta\mathbf{v}(t) + [\mathbf{w}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{L} + \mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,l)\mathbf{AH}]\delta w(t)]dt +$$

$$+\varepsilon \int_0^l [\mathbf{z}^{\mathrm{T}}(t_1,x)\mathbf{M}(x) - \mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t_1,x)\delta\mathbf{z}(t_1,x)]dx +$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \left[\mathbf{z}^{\mathrm{T}}(t,x)\mathbf{N}(t,x) + \mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,x)\mathbf{C} - \frac{\partial \mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,x)}{\partial x}\mathbf{B} + \frac{\partial^2 \mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,x)}{\partial x^2}\mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,x)}{\partial t}\right]\delta\mathbf{z}(t,x) +$$

$$+[\mathbf{u}^{\mathrm{T}}(t,x)\mathbf{Q}(t,x) + \mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,x)\mathbf{D}]\delta\mathbf{u}(t,x)]\,dxdt +$$

$$+\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \delta\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,x)\left[\mathbf{A}\frac{\partial^2\mathbf{z}(t,x)}{\partial x^2} + \mathbf{B}\frac{\partial\mathbf{z}(t,x)}{\partial x} + \mathbf{Cz}(t,x) + \mathbf{Du}(t,x) - \frac{\partial\mathbf{z}(t,x)}{\partial t}\right]dxdt +$$

$$-\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,l))}{\partial x}\mathbf{A} + \mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,l)\mathbf{AG} - \mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,l)\mathbf{B}\right]\delta\mathbf{z}(t,l)\,dt +$$

$$+\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,0)}{\partial x}\mathbf{A} + \mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,0)\mathbf{AE} - \mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,0)\mathbf{B}\right]\delta\mathbf{z}(t,0)\,dt +$$

$$+\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\delta\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,0)\mathbf{A}\left[\frac{\partial\mathbf{z}(t,0)}{\partial x} + \mathbf{Ez}(t,0) - \mathbf{Fv}(t)\right]dt -$$

$$-\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\delta\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,l)\mathbf{A}\left[\frac{\partial\mathbf{z}(t,l)}{\partial x} + \mathbf{Gz}(t,l) - \mathbf{Hw}(t)\right]dt +$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{t_0}^{t_1}[\delta\mathbf{v}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{K}\delta\mathbf{v}(t) + \delta\mathbf{w}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{L}\delta\mathbf{w}(t)]dt + \frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^l \delta\mathbf{z}^{\mathrm{T}}(t_1,x)\mathbf{M}(x)\delta\mathbf{z}(t_1,x)\,dx +$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l [\delta\mathbf{z}^{\mathrm{T}}(t,x)\mathbf{N}(t,x)\delta\mathbf{z}(t,x) + \delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}(t,x)\mathbf{Q}(t,x)\delta\mathbf{u}(t,x)]dx\,dt. \quad (18)$$

На основании соотношения (18) можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 1. Единственные оптимальные управления $\mathbf{u}(t,x)$, $\mathbf{v}(t)$ и $\mathbf{w}(t)$ определяются из системы соотношений:

$$\frac{\partial\mathbf{z}(t,x)}{\partial t} = \mathbf{A}\frac{\partial^2\mathbf{z}(t,x)}{\partial x^2} + \mathbf{B}\frac{\partial\mathbf{z}(t,x)}{\partial x} + \mathbf{Cz}(t,x) + \mathbf{Du}(t,x), \quad (19)$$

$$\mathbf{z}(t_0,x) = \mathbf{f}(x),\ \ \frac{\partial\mathbf{z}(t,0)}{\partial x} + \mathbf{Ez}(t,0) = \mathbf{Fv}(t),\ \ \frac{\partial\mathbf{z}(t,l)}{\partial x} + \mathbf{Gz}(t,l) = \mathbf{Hw}(t), \quad (20)$$

$$\frac{\partial\mathbf{p}(t,x)}{\partial t} = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2\mathbf{p}(t,x)}{\partial x^2} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\frac{\partial\mathbf{p}(t,x)}{\partial x} - \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}(t,x) - \mathbf{N}(t,x)\mathbf{z}(t,x), \quad (21)$$

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\frac{\partial\mathbf{p}(t,0)}{\partial x}=[\mathbf{B}^{\mathrm{T}}-\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}]\mathbf{p}(t,0),\ \ \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\frac{\partial\mathbf{p}(t,l))}{\partial x}=[\mathbf{B}^{\mathrm{T}}-\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}]\mathbf{p}(t,l),\tag{22}$$

$$\mathbf{Kv}(t)-\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}(t,0)=\mathbf{0},\ \ \mathbf{Lw}(t)+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}(t,l)=\mathbf{0},\tag{23}$$

$$\mathbf{M}(x)\mathbf{z}(t_1,x)-\mathbf{p}(t_1,x)=\mathbf{0},\ \mathbf{Q}(t,x)\mathbf{u}(t,x)+\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}(t,x)=\mathbf{0}.\tag{24}$$

Доказательство. Равенство нулю первой вариации функционала (5) является необходимым условием экстремума этого функционала. Очевидно, что такое условие будет выполнено, если коэффициенты при $\delta\mathbf{v}(t)$, $\delta\mathbf{w}(t)$, $\delta\mathbf{z}(t_1,x)$, $\delta\mathbf{z}(t,x)$, $\delta\mathbf{u}(t,x)$, $\delta\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,x)$, $\delta\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,0)$, $\delta\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t,l)$, $\delta\mathbf{z}(t,0)$ и $\delta\mathbf{z}(t,l)$ равны нулю одновременно. Присоединяя к этим равенствам начальное условие (2) и краевые условия (3), получим систему соотношений (19)–(24). В случае выполнения равенств (19)–(24) выражение (18) примет вид

$$\Delta J=\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{t_0}^{t_1}[\delta\mathbf{v}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{K}\delta\mathbf{v}(t)+\delta\mathbf{w}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{L}\delta\mathbf{w}(t)]\,dt+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^l\delta\mathbf{z}^{\mathrm{T}}(t_1,x)\,\mathbf{M}(x)\,\delta\mathbf{z}(t_1,x)\,dx+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l[\delta\mathbf{z}^{\mathrm{T}}(t,x)\,\mathbf{N}(t,x)\delta\mathbf{z}(t,x)+\delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}(t,x)\mathbf{Q}(t,x)\delta\mathbf{u}(t,x)]\,dx\,dt.\tag{25}$$

При условии, что $\delta\mathbf{u}(t,x)$, $\delta\mathbf{v}(t)$, $\delta\mathbf{w}(t)$ не равны нулю одновременно, в силу свойств матриц $\mathbf{K}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{Q}(t,x)$ имеем $\Delta J\succ 0$. Это означает, что на управлениях $\mathbf{u}(t,x)$, $\mathbf{v}(t)$ и $\mathbf{w}(t)$ реализуется минимум функционала (4). Предположим, что управления $\bar{\mathbf{u}}(t,x)=\mathbf{u}(t,x)+\varepsilon\delta\mathbf{u}(t,x)$, $\bar{\mathbf{v}}(t,x)=\mathbf{v}(t,x)+\varepsilon\delta\mathbf{v}(t,x)$ и $\bar{\mathbf{w}}(t,x)=\mathbf{w}(t,x)+$ $+\varepsilon\delta\mathbf{w}(t,x)$ также являются оптимальными управлениями. Тогда они также должны удовлетворять соотношениям (19) и, кроме того, должно выполняться равенство $\Delta J=0$. Но из соотношения (20) следует, что это равенство возможно только тогда, когда одновременно $\delta\mathbf{u}(t,x)=\mathbf{0}$, $\delta v(t)=\mathbf{0}$ и $\delta\mathbf{w}(t)=\mathbf{0}$. Отсюда следует, что $\bar{\mathbf{u}}(t,x)=\mathbf{u}(t,x)$, $\bar{\mathbf{v}}(t,x)=\mathbf{v}(t,x)$, и $\bar{\mathbf{w}}(t,x)=\mathbf{w}(t,x)$, и теорема 1 полностью доказана.

Вывод матричного интегродифференциального уравнения Риккати

На основании равенства $\mathbf{p}(t_1,x)=\mathbf{M}(x)\mathbf{z}(t_1,x)$ можно предположить существование следующей зависимости между $\mathbf{p}(t,x)$ и $\mathbf{z}(t,x)$:

$$\mathbf{p}(t,x)=\int_0^l\mathbf{R}(t,x,y)\mathbf{z}(t,y)\,dy,\tag{26}$$

где матричнозначную функцию $\mathbf{R}(t,x,y)$ требуется найти. Непосредственно из (26) имеем

$$\frac{\partial^2\mathbf{p}(t,x)}{\partial x^2}=\int_0^l\frac{\partial^2\mathbf{R}(t,x,y)}{\partial x^2}\mathbf{z}(t,y)\,dy,\tag{27}$$

$$\frac{\partial\mathbf{p}(t,x)}{\partial t}=\int_0^l\left[\frac{\partial\mathbf{R}(t,x,y)}{\partial t}\mathbf{z}(t,y)+\mathbf{R}(t,x,y)\frac{\partial\mathbf{z}(t,y)}{\partial t}\right]dy.\tag{28}$$

Поскольку справедливо соотношение $\mathbf{Q}(t,\ x)\mathbf{u}(t,\ x)+\ \mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}(t,\ x)\ =\ \mathbf{0},$ имеем

$$\mathbf{u}(t, x) = -\mathbf{Q}^{-1}(t, x)\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}(t, x). \tag{29}$$

С учетом соотношений (19), (26) и (29) получаем равенство

$$\frac{\partial \mathbf{z}(t, y)}{\partial t} = \mathbf{A}\frac{\partial^2 \mathbf{z}(t, y)}{\partial y^2} + \mathbf{B}\frac{\partial \mathbf{z}(t, y)}{\partial y} + \mathbf{C}\mathbf{z}(t, y) - \mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1}(t, y)\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\int_0^l \mathbf{R}(t, y, s)\,\mathbf{z}(t, s)\,ds.$$

Поэтому равенство (28) примет вид

$$\frac{\partial \mathbf{p}(t,\ x)}{\partial t} = \int_0^l \left[\frac{\partial \mathbf{R}(t,\ x,\ y)}{\partial t}\mathbf{z}(t,\ y) + \mathbf{R}(t,\ x,\ y)\mathbf{A}\frac{\partial^2 \mathbf{z}(t,\ y)}{\partial y^2} + \mathbf{R}(t,\ x,\ y)\mathbf{B}\frac{\partial \mathbf{z}(t,\ y)}{\partial y} + \right.$$

$$\left. + \mathbf{R}(t, x, y)\mathbf{C}\mathbf{z}(t, y) - \mathbf{R}(t, x, y)\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1}(t, y)\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\int_0^l \mathbf{R}(t, y, s)\mathbf{z}(t, s)\,ds\right] dy. \tag{30}$$

После двукратного применения формулы интегрирования по частям находим

$$\int_0^l \mathbf{R}(t, x, y)\mathbf{A}\frac{\partial^2 \mathbf{z}(t, y)}{\partial y^2}dy = \mathbf{R}(t, x, l)\,\mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{z}(t, l)}{\partial y} - \mathbf{R}(t, x, 0)\,\mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{z}(t, 0)}{\partial y} -$$

$$-\int_0^l \frac{\partial \mathbf{R}(t, x, y)}{\partial y}\mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{z}(t, y)}{\partial y}dy = \mathbf{R}(t, x, l)\mathbf{A}\mathbf{H}\mathbf{w}(t) - \mathbf{G}\mathbf{z}(t, l)[\mathbf{H}\mathbf{w}(t) - \mathbf{G}\mathbf{z}(t, l)] -$$

$$-\mathbf{R}(t, x, 0)\mathbf{A}[\mathbf{F}\mathbf{v}(t) - \mathbf{E}\mathbf{z}(t, 0)] - \frac{\partial \mathbf{R}(t, x, l)}{\partial y}\mathbf{A}\mathbf{z}(t, l) + \frac{\partial \mathbf{R}(t, x, 0)}{\partial y}\mathbf{A}\mathbf{z}(t, 0) +$$

$$+\int_0^l \frac{\partial^2 \mathbf{R}(t, x, y)}{\partial y^2}\mathbf{A}\mathbf{z}(t, y)\,dy = \mathbf{R}(t, x, y)\mathbf{A}\mathbf{H}\mathbf{w}(t) -$$

$$-\left[\frac{\partial \mathbf{R}(t, x, l)}{\partial y}\mathbf{A} + \mathbf{R}(t, x, l)\mathbf{A}\mathbf{G}\right]\mathbf{z}(t, l) - \mathbf{R}(t, x, 0)\mathbf{A}\mathbf{F}\mathbf{v}(t) +$$

$$+\left[\frac{\partial \mathbf{R}(t, x, 0)}{\partial y}\mathbf{A} + \mathbf{R}(t, x, 0)\mathbf{A}\mathbf{E}\right]\mathbf{z}(t, 0) + \int_0^l \frac{\partial^2 \mathbf{R}(t, x, y)}{\partial y^2}\mathbf{A}\mathbf{z}(t, y)\,dy. \tag{31}$$

Аналогично получаем следующее соотношение:

$$\int_0^l \mathbf{R}(t,\ x,\ y)\mathbf{B}\frac{\partial \mathbf{z}(t,\ y)}{\partial y}dy = \mathbf{R}(t,\ x,\ l)\mathbf{B}\mathbf{z}(t,\ l) -$$

$$-\mathbf{R}(t,\ x,\ 0)\mathbf{B}\mathbf{z}(t,\ 0) - \int_0^l \frac{\partial \mathbf{R}(t,\ x,\ y)}{\partial y}\mathbf{B}\mathbf{z}(t,\ y)\,dy. \tag{32}$$

После этого в двойном интеграле $\int_0^l \mathbf{R}(t,\ x,\ y)\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1}(t,\ y)\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\int_0^l \mathbf{R}(t,\ y,\ s)\mathbf{z}(t,\ s)\,ds\,dy$ сначала меняем порядок интегрирования, затем переобозначаем переменные интегрирования y на s и, наоборот, s на y. В результате получаем

$$\int_0^l \mathbf{R}(t,\,x,\,y)\mathbf{DQ}^{-1}(t,\,y)\,\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\int_0^l \mathbf{R}(t,\,y,\,s)\mathbf{z}(t,\,s)\,ds\,dy =$$

$$= \int_0^l\int_0^l \mathbf{R}(t,\,x,\,y)\mathbf{DQ}^{-1}(t,\,y)\,\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}(t,\,y,\,s)\mathbf{z}(t,\,s)\,dy\,ds =$$

$$= \int_0^l\int_0^l \mathbf{R}(t,x,s)\mathbf{DQ}^{-1}(t,s)\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathrm{P}(t,s,y)\,ds\,\mathbf{z}(t,y)dy. \qquad (33)$$

Поскольку $\mathbf{p}(t,\,0) = \int_0^l \mathbf{R}(t,\,0,\,y)\mathbf{z}(t,\,y)\,dy$ и $\mathbf{p}(t,\,l) = \int_0^l \mathbf{R}(t,\,l,\,y)\mathbf{z}(t,\,y)\,dy,$ то на основании равенств $\mathbf{v}(t) = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}(t,\,0)$ и $\mathbf{w}(t) = -\mathbf{L}^{-1}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}(t,\,l)$ имеем $\mathbf{v}(t) = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\int_0^l \mathbf{R}(t,\,0,\,y)\mathbf{z}(t,\,y)\,dy$ и $\mathbf{w}(t) = -\mathbf{L}^{-1}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\int_0^l \mathbf{R}(t,\,l,\,y)\mathbf{z}(t,\,y)\,dy$ соответственно. С учетом этих замечаний получаем такие соотношения:

$$\mathbf{R}(t,\,x,\,0)\mathbf{AFv}(t) = \int_0^l \mathbf{R}(t,\,x,\,0)\mathbf{AFK}^{-1}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}(t,\,0,\,y)\,\mathbf{z}(t,\,y)\,dy, \qquad (34)$$

$$\mathbf{R}(t,\,x,\,l)\mathbf{AHw}(t) = -\int_0^l \mathbf{R}(t,\,x,\,l)\mathbf{AHL}^{-1}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}(t,\,l,\,y)\mathbf{z}(t,\,y)\,dy. \qquad (35)$$

Принимая во внимание соотношения (31)–(35), имеем возможность переписать равенство (30) следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{p}(t,\,x)}{\partial t} = \int_0^l \left[\frac{\partial \mathbf{R}(t,\,x,\,y)}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{R}(t,\,x,\,y)}{\partial y^2}\mathbf{A} - \frac{\partial \mathbf{R}(t,\,x,\,y)}{\partial y}\mathbf{B} + \mathbf{R}(t,\,x,\,y)\mathbf{C} -\right.$$

$$- \mathbf{R}(t,\,x,\,0)\mathbf{AFK}^{-1}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}(t,\,0,\,y) - \mathbf{R}(t,\,x,\,l)\mathbf{AHL}^{-1}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}(t,\,l,\,y) -$$

$$\left. - \int_0^l \mathbf{R}(t,\,x,\,s)\mathbf{DQ}^{-1}(t,\,s)\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}(t,\,s,\,y)\,ds\right]\mathbf{z}(t,\,y)\,dy +$$

$$+ \left[\frac{\partial \mathbf{R}(t,\,x,\,0)}{\partial y}\mathbf{A} - \mathbf{R}(t,\,x,\,0)\mathbf{B} + \mathbf{R}(t,\,x,\,0)\mathbf{AE}\right]\mathbf{z}(t,\,0) -$$

$$- \left[\frac{\partial \mathbf{R}(t,\,x,\,l)}{\partial y}\mathbf{A} - \mathbf{R}(t,\,x,\,l)\mathbf{B} + \mathbf{R}(t,\,x,\,l)\mathbf{AG}\right]\mathbf{z}(t,\,l). \qquad (36)$$

С другой стороны, на основании равенств (19), (21) и (22) имеем

$$\frac{\partial \mathbf{p}(t,\,x)}{\partial t} = \int_0^l \left[-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 \mathbf{R}(t,\,x,\,y)}{\partial x^2} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \mathbf{R}(t,\,x,\,y)}{\partial x} -\right.$$

$$\left. - \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}(t,\,x,\,y) - \delta(x-y)\mathbf{N}(t,\,y)\right]\mathbf{z}(t,\,y)\,dy, \qquad (37)$$

 ISSN 0572-2691

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Сравнивая соотношения (36) и (37), получаем

$$\frac{\partial \mathbf{R}(t, x, y)}{\partial t} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \frac{\partial^2 \mathbf{R}(t, x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{R}(t, x, y)}{\partial y^2} \mathbf{A} - \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \mathbf{R}(t, x, y)}{\partial x} -$$

$$- \frac{\partial \mathbf{R}(t, x, y)}{\partial y} \mathbf{B} + \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \mathbf{R}(t, x, y) + \mathbf{R}(t, x, y)\mathbf{C} -$$

$$- \mathbf{R}(t, x, 0)\mathbf{AFK}^{-1}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}(t, 0, y) - \mathbf{R}(t, x, l)\mathbf{AHL}^{-1}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}(t, l, y) -$$

$$- \delta(x-y)\mathbf{N}(t, y) - \int_0^l \mathbf{R}(t, x, s)\mathbf{DQ}^{-1}(t, s)\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}(t, s, y)\, ds = \mathbf{0}, \qquad (38)$$

$$\left[\frac{\partial \mathbf{R}(t, x, 0)}{\partial y}\mathbf{A} - \mathbf{R}(t, x, 0)\mathbf{B} + \mathbf{R}(t, x, 0)\mathbf{AE}\right]\mathbf{z}(t, 0) = \mathbf{0},$$

$$\left[\frac{\partial \mathbf{R}(t, x, l)}{\partial y}\mathbf{A} - \mathbf{R}(t, x, l)\mathbf{B} + \mathbf{R}(t, x, l)\mathbf{AG}\right]\mathbf{z}(t, l) = \mathbf{0},$$

которые приводят к граничным условиям для матричнозначной функции $\mathbf{R}(t, x, y)$:

$$\frac{\partial \mathbf{R}(t, x, 0)}{\partial y}\mathbf{A} - \mathbf{R}(t, x, 0)\mathbf{B} + \mathbf{R}(t, x, 0)\mathbf{AE} = \mathbf{0}, \qquad (39)$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}(t, x, l)}{\partial y}\mathbf{A} - \mathbf{R}(t, x, l)\mathbf{B} + \mathbf{R}(t, x, l)\mathbf{AG} = \mathbf{0}. \qquad (40)$$

Из условия $\mathbf{p}(t_1, x) = \mathbf{M}(x)\mathbf{z}(t_1, x)$ и соотношения (26) получим равенство

$$\mathbf{R}(t_1, x, y) = \delta(x-y)\mathbf{M}(y). \qquad (41)$$

В результате изложенного выше приходим к такому утверждению.

Теорема 2. Матричнозначная функция $\mathbf{R}(t, x, y)$ является решением матричного интегродифференциального уравнения (38), удовлетворяет граничным условиям (39), (40) и дополнительному условию (41). Если известна функция $\mathbf{R}(t, x, y)$, то для нахождения оптимальных управлений $\mathbf{u}(t, x)$, $\mathbf{v}(t)$ и $\mathbf{w}(t)$ используем следующие формулы:

$$\mathbf{u}(t, x) = -\mathbf{Q}^{-1}(t, x)\mathbf{D}^{\mathrm{T}} \int_0^l \mathbf{R}(t, x, y)\mathbf{z}(t, y)\, dy,$$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \int_0^l \mathbf{R}(t, 0, y)\mathbf{z}(t, y)\, dy, \quad \mathbf{w}(t) = -\mathbf{L}^{-1}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \int_0^l \mathbf{R}(t, l, y)\mathbf{z}(t, y)\, dy.$$

Основные результаты настоящей статьи могут использоваться при исследовании задач оптимального управления процессами, описываемыми системами линейных дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа. Особый интерес представляет численная реализация полученных алгоритмов.

М.М. Копець

МАТРИЧНЕ ІНТЕГРОДЕФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ РІККАТІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ

Розглянуто проблему мінімізації квадратичного функціонала на розв'язках системи лінійних параболічних рівнянь. Одночасно керування входять як в праві частини рівнянь системи, так і в крайові умови. Для дослідження сформульованої задачі оптимізації застосовано метод множників Лагранжа. Такий підхід сприяв отриманню необхідних умов оптимальності. На основі цих умов виведено матричне інтегродиференціальне рівняння Ріккаті з частинними похідними.

M.M. Kopets

MATRIX INTEGRO-DIFFERENTIAL RICCATI EQUATION FOR PARABOLIC SYSTEM

The minimization problem of the quadratic functional on solutions of the system of linear parabolic equations is considered. Simultaneosly the controls are included both into the right parts of equations of the system, and in the boundary conditions. The method of Lagrange multipliers is applied to research of the formulated optimization problem. Such approach enables one to obtain the necessary optimality conditions. On the basis of these conditions the matrix integro-differential Riccati equation with the partial derivatives is deduced.

1. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. — М. : Наука, 1976. — 424 с.
2. *Ройтенберг Я.Н.* Автоматическое управление. — М. : Наука, 1971. — 396 с.
3. *Жуковский В.И., Чикрий А.А.* Линейно-квадратичные дифференциальные игры. — Киев : Наук. думка, 1994 — 320 с.
4. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М. : Мир, 1972. — 414 с.
5. *Бутковский А.Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. — М. : Наука, 1965 — 476 с.
6. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. — М. : Наука, 1975 — 568 с.
7. *Сиразетдинов Т.К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. — М. : Наука, 1977 — 480 с.

Получено 09.07.2013

Статья представлена к публикации членом редколлегии чл.-корр. НАН Украины А.А. Чикрием.