УДК 519.233.2

А.Г. Наконечный, С.В. Демиденко

ГАРАНТИРОВАННЫЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НАБЛЮДЕНИЯХ

Задачи анализа и прогнозирования процессов, которые описываются линейными уравнениями, обуславливают необходимость исследования проблем оценки параметров таких уравнений при известных наблюдениях по некоторым функциям их решений. Гарантированные методы оценки параметров линейных операторных уравнений рассматривались в работах [1–5], где при определенных допущениях оценки получены в явном виде. В статье исследуются новые задачи оценивания для линейных алгебраических уравнений при нестационарных наблюдениях.

Постановка задачи

Пусть известна скалярная функция $y(t), t \in T$, где T — измеримое множество, $\mathcal{B}$ — σ-алгебра подмножеств множества T, причем $y(t)$ имеет вид

$$y(t) = (g(t), x) + \xi(t), \tag{1}$$

где $g(t)$, $t \in T$, — известная функция, значения которой принадлежат R^n, $\xi(t)$ — реализация скалярного случайного процесса, $x \in R^n$ — решение линейного уравнения

$$Ax = Bf + b. \tag{2}$$

Здесь A, B — матрицы размерности $m \times n$ и $m \times s$ соответственно, f — некоторый неизвестный вектор размерности R^s, $b \in R^m$ — известный вектор.

Допустим, что $E\xi(t) = 0$ и известна корреляционная функция $R(t, s) = E\xi(t)\xi(s)$. Пусть X — множество решений уравнения (2) при фиксированном векторе f, а F — множество из пространства R^s, которому принадлежит вектор f. Обозначим $L_k(x, f)$ величину $L_k(x, f) = (v_k^{(1)}, x) + (v_k^{(2)}, f)$, а $L(x, f)$ — вектор $L(x, f) = (L_1(x, f),.., L_r(x, f))^{\mathrm{T}}$.

Допустим также, что $g(t)$ — измеримая функция, $\mu(\cdot)$ — мера, заданная на $\mathcal{B}$, причем $\int_T |g(t)|^2 \mu(dt) < \infty$.

Определение 1. Линейной оценкой вектора $L(x, f)$ называется вектор $\hat{L}(x, f)$, который имеет вид

$$\hat{L}(x, f) = \int_T u(t) y(t) \mu(dt) + c, \tag{3}$$

где $u(t) = (u_1(t),.., u_r(t))^{\mathrm{T}}$, $\int_T |u(t)|^2 \mu(dt) < \infty$, c — некоторый вектор пространства R^r.

Определение 2. Оценка $\hat{\hat{L}} = \hat{\hat{L}}(x, f) = \int_T \hat{u}(t) y(t) \mu(dt) + \hat{c}$, для которой пара $(\hat{u}, \hat{c})$ определяется из условия $(\hat{u}, \hat{c}) \in \arg\min \sigma(u, c)$, где

$$\sigma(u,c) = \sup_{x \in X,\ f \in F} \{E \left| L(x, f) - \hat{L}(x, f) \right|^2 \}^{1/2}, \tag{4}$$

называется гарантированной линейной среднеквадратической (ГЛСК) оценкой, а величина $\sigma(\hat{u}, \hat{c})$ — гарантированной среднеквадратической (ГСК) ошибкой соответствующей оценки.

Таким образом, поставим задачу нахождения ГЛСК оценки и ГСК ошибки для вектора $L(x, f)$ при упомянутых допущениях и на основе нестационарных наблюдений вида (2).

Прямое представление и единственность оценки

Для вычисления данных оценок необходимо существование решений уравнения (2). Приведем известные условия, когда уравнение (2) будет иметь непустое множество решений. Обозначим $N(A) := \{x \in R^n : Ax = 0\}$ ядро матрицы A. Для того чтобы множество X было непустым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $Bf + b \perp N(A^{\mathrm{T}})$ [6]. Далее допустим, что $b \perp N(A^{\mathrm{T}})$ и $Bf \perp N(A^{\mathrm{T}})$.

Введем множество

$$U = \left\{ u(\cdot) : (v_j^{(1)} - \int_T u_j(t) g(t) \mu(dt), \psi) = 0,\ j = 1,.., r,\ \forall \psi \in N(A) \right\}$$

и векторы z_j как решения уравнений

$$A^{\mathrm{T}} z_j = v_j^{(1)} - \int_T u_j(t) g(t) \mu(dt), \quad j = 1,.., r. \tag{5}$$

Лемма 1. Пусть $U \neq \varnothing$, z_j — решения уравнений (5). Тогда имеет место равенство

$$\sup_{x \in X} E \left| L(x, f) - \hat{L}(x, f) \right|^2 = \begin{cases} \infty, & u \notin U, \\ \sigma_1(u, c), & u \in U, \end{cases}$$

где

$$\sigma_1(u,c) = \sum_{j=1}^{r} [(z_j, Bf + b) + (v_j^{(2)}, f) - c_j]^2 + \Phi(u),$$

$$\Phi(u) = \int_T \int_T (u(t), u(s)) R(t,s) \mu(dt) \mu(ds).$$

Доказательство. Имеет место равенство

$$E \left| L(x, f) - \hat{L}(x, f) \right|^2 = E \left| L(x, f) - E\hat{L}(x, f) \right|^2 + E \left| \hat{L}(x, f) - E\hat{L}(x, f) \right|^2 =$$

$$= E \left| L(x, f) - E\hat{L}(x, f) \right|^2 + E \left| \int_T u(t) \xi(t) \mu(dt) \right|^2 =$$

$$= E \left| L(x, f) - E\hat{L}(x, f) \right|^2 + \Phi(u).$$

Заметим, что

$$E \left| L(x, f) - E\hat{L}(x, f) \right|^2 = \sum_{j=1}^{r} \left[L_j(x, f) - \left(\int_T u_j(t) g(t) \mu(dt), x \right) - c_j \right]^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{r}\left[\left(\left(v_j^{(1)} - \int_T u_j(t)g(t)\mu(dt)\right), x\right) + (v_j^{(2)}, f) - c_j\right]^2.$$

Так как $x = x_0 + v,$ где x_0 — решение уравнения (1), а $v \in N(A)$, то при условии $u(\cdot) \in U$ получим

$$E\left|L(x, f) - E\hat{L}(x, f)\right|^2 = \sum_{j=1}^{r}\left[\left(\left(v_j^{(1)} - \int_0^T u_j(t)g(t)\mu(dt)\right), x_0\right) + (v_j^{(2)}, f) - c_j\right]^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{r}[(z_j, Bf + b) + (v_j^{(2)}, f) - c_j]^2 = \sum_{j=1}^{r}[(B^{\mathrm{T}} z_j + v_j^{(2)}, f) + (z_j, b) - c_j]^2,$$

откуда следует требуемое соотношение.

Лемма доказана.

Следствие 1. Для упрощения выкладок положим $v_j^{(2)} = 0.$ Пусть F — выпуклое ограниченное центрально-симметрическое относительно нуля множество. Тогда

$$\sup_{f \in F} \sigma_1(u, c) = \max_{\sum_{j=1}^{r}\alpha_j^2 = 1}\left[\max_{f \in F}\left(\sum_{j=1}^{r}\alpha_j z_j, Bf\right) + \left|\sum_{j=1}^{r}\alpha_j((z_j, b) - c_j)\right|\right]^2 + \Phi(u),$$

$$\min_c \sup_{f \in F} \sigma_1(u, c) = \max_{\sum_{j=1}^{r}\alpha_j^2 = 1}\max_{f \in F}\left(\sum_{j=1}^{r}\alpha_j z_j, Bf\right)^2 + \Phi(u).$$

Доказательство. Требуемые соотношения получим из равенств

$$\sum_{j=1}^{r}[(z_j, Bf + b) - c_j]^2 = \max_{\sum_{j=1}^{r}\alpha_j^2 = 1}\left(\sum_{j=1}^{r}\alpha_j((z_j, Bf + b) - c_j)\right)^2,$$

$$\max_{f \in F}\max_{\sum_{j=1}^{r}\alpha_j^2 = 1}\left(\sum_{j=1}^{r}\alpha_j((z_j, Bf + b) - c_j)\right)^2 =$$

$$= \max_{\sum_{j=1}^{r}\alpha_j^2 = 1}\left[\max_{f \in F}\left(\sum_{j=1}^{r}\alpha_j z_j, Bf\right) + \left|\sum_{j=1}^{r}\alpha_j((z_j, b) - c_j)\right|\right]^2.$$

Лемма 2. Пусть U — непустое множество, а совокупность F имеет вид $F = \{f : (Qf, f) \le 1\},$ Q — положительно-определенная симметрическая матрица размерности $s \times s.$ Тогда если $u \in U,$ то имеет место равенство

$$\min_c \sup_{f \in F} \sigma_1(u, c) = \sup_{f \in F} \sigma_1(u, \hat{c}) = \lambda_{\max}(Z) + \Phi(u),$$

где $\hat{c}_j = (z_j, b),$ Z — матрица с элементами $(\tilde{Q}z_i, z_j),$ $i, j = \overline{1, r},$ $\tilde{Q} = BQ^{-1}B^{\mathrm{T}},$ $\lambda_{\max}(Z)$ — максимальное собственное число матрицы Z.

Доказательство. Так как

$$\left(\sum_{j=1}^{r}\alpha_j z_j, Bf\right)^2 \le (Qf, f)\left(Q^{-1}\sum_{j=1}^{r}\alpha_j B^{\mathrm{T}} z_j, \sum_{j=1}^{r}\alpha_j B^{\mathrm{T}} z_j\right),$$

причем знак равенства достигается на векторе $\hat{f} = \dfrac{Q^{-1}\sum_{j=1}^{r}\alpha_j B^{\mathrm{T}} z_j}{\left(Q^{-1}\sum_{j=1}^{r}\alpha_j B^{\mathrm{T}} z_j, \sum_{j=1}^{r}\alpha_j B^{\mathrm{T}} z_j\right)^{1/2}}$,

то $\max\limits_{F}\left(\sum_{j=1}^{r}\alpha_j z_j, Bf\right)^2 = (Z\alpha, \alpha)$, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)^{\mathrm{T}}$.

Отсюда $\max\limits_{|\alpha|=1}(Z\alpha, \alpha) = \lambda_{\max}(Z)$, что и доказывает справедливость леммы.

Замечание. Поскольку z_j, $j = \overline{1, r}$, — любые решения уравнений (5), то можно выбрать подмножество для решений, исходя из условия $(\tilde{Q}z_j, \varphi) = 0 \quad \forall\varphi \in N(A^{\mathrm{T}})$. При условии $b \perp N(A^{\mathrm{T}})$ $B\hat{f} \perp N(A^{\mathrm{T}})$, а значит, $B\hat{f} + b \perp N(A^{\mathrm{T}})$ и уравнение (2) при такой правой части имеет решение.

Пусть $r = 1$, а $v_1^{(2)} = 0$. Тогда множество U запишем

$$U = \left\{u_1(\cdot): \left(v_1^{(1)} - \int_T u_1(t)g(t)\mu(dt), \psi_j\right) = 0, \psi_j \in N(A), j = 1, \ldots, n_1\right\},$$

где ψ_j — линейно независимые векторы, а n_1 — размерность подпространства $N(A)$.

Лемма 3. Множество U является непустым для любого вектора v_1, если матрица G с элементами $g_{ij} = \int_T (g(t), \psi_i)(g(t), \psi_j)\mu(dt)$ невырождена.

Доказательство. Будем искать решения уравнений $(v_i^{(1)}, \psi_j) = \int_T u_1(t)(g(t), \psi_j)\mu(dt)$ в виде

$$u_1(t) = \sum_{i=1}^{n_1}\beta_i(g(t), \psi_i).$$

Тогда получим систему уравнений для β_i, которая имеет единственное решение при невырожденной матрице G.

Лемма доказана.

Пусть выполняются условия леммы 3, а $r = 1$. Тогда имеет место следующее утверждение.

Лемма 4. ГЛСК оценка будет иметь вид $\widehat{(v_1^{(1)}, x)} = \int_T \hat{u}_1(t)y(t)\mu(dt) + \hat{c}_1$, где $\hat{u}_1 \in \operatorname{argmin}\sigma^2(u)$,

$$\sigma^2(u) = (\tilde{Q}z_1, z_1) + \int_T u_1(t)u_1(s)R(t,s)\,\mu(dt)\mu(ds),$$

а z_1 — решение уравнения

$$A^{\mathrm{T}} z_1 = v_1^{(1)} - \int_T u_1(t)g(t)\,\mu(dt), \tag{6}$$

$$(\tilde{Q}z_1, \varphi) = 0, \ \forall\varphi \in N(A^{\mathrm{T}}),$$

$$\hat{c} = (b, z_1).$$

При этом $\inf\limits_{u,c}\sup\limits_{x,F} E\left|\widehat{(v_1^{(1)}, x)} - (v_1^{(1)}, x)\right|^2 = \sigma^2(\hat{u})$.

ISSN 0572-2691

Доказательство. Доказательство является следствием предыдущих утверждений и определения ГЛСК. Заметим только, что если матрица Z состоит из одного элемента $(\tilde{Q}z_1, z_1)$, то $\lambda_{\max}(Z) = (\tilde{Q}z_1, z_1)$.

Найдем уравнения, из которых определяется $\hat{u}_1(t)$. Сначала сформулируем условия, при которых $\hat{u}_1(t)$ будет единственной.

Лемма 5. Допустим, что $R(t, s)$ такова, что выполняется условие

$$\int_T \int_T u(t)u(s)R(t, s)\,dt\,ds \geq \gamma^2 \int_T u^2(t)\mu(dt) \tag{7}$$

для любой функции $u(t)$ такой, что $\int_T u^2(t)\mu(dt) < \infty$. Тогда существует единственная (по мере μ) функция $\hat{u}_1(t)$.

Доказательство. Пусть вектор z_0 с минимальной нормой удовлетворяет соотношениям (6) и имеет вид $z_0 = (A^{\mathrm{T}})^+ v_1^{(1)} - (A^{\mathrm{T}})^+ \int_T u_1(t)g(t)\mu(dt)$, где A^+ — псевдообратная матрица. Квадратический функционал вида

$$\sigma^2(u) =$$

$$= \left(\tilde{Q}((A^{\mathrm{T}})^+ v_1^{(1)} - (A^{\mathrm{T}})^+ \int_T u_1(t)g(t)\mu(dt),\ (A^{\mathrm{T}})^+ v_1^{(1)} - (A^{\mathrm{T}})^+ \int_T u_1(t)g(t)\mu(dt)\right) + \Phi(u)$$

в пространстве измеримых функций таких, что $\int_T u_1^2(t)\mu(dt) < \infty$, является сильно выпуклым ввиду соотношения (7), полунепрерывным снизу на замкнутом выпуклом множестве, а значит, существует единственная точка минимума, что и требовалось показать.

Введем векторы $z, p, \hat{u}_1$ как решения системы уравнений

$$\begin{cases} A^{\mathrm{T}} z = v_1^{(1)} - \int_T \hat{u}_1(t)g(t)\mu(dt), \\ (\tilde{Q}z, \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in N(A^{\mathrm{T}}), \\ Ap = \tilde{Q}z, \\ \int_T R(t,s)\hat{u}_1(s)\mu(ds) = (g(t), p), \\ \int_T \hat{u}_1(t)(g(t),\psi)\mu(dt) = (v_1^{(1)}, \psi), \quad \forall \psi \in N(A). \end{cases} \tag{8}$$

Тогда имеет место следующее утверждение.

Лемма 6. Пусть векторная функция $\hat{u}_1(t)$ определяется из системы уравнений (8). Тогда ГЛСК оценка скалярного произведения $(v_1^{(1)}, x)$ имеет вид

$$\widehat{\widehat{(v_1^{(1)}, x)}} = \int_T \hat{u}_1(t)y(t)\mu(dt) + \hat{c},$$

где $\hat{c} = (z, b)$. При этом $\sup\limits_{x, f} E((v_1^{(1)}, x) - \widehat{\widehat{(v_1^{(1)}, x)}})^2 = (v_1^{(1)}, p)$.

Доказательство. Пусть $u_1(t) \in U$. Тогда $u_1(t)$ имеет вид $u_1(t) = u_0(t) + u(t)$, где $u_0(t)$ — фиксированное решение уравнения

$$(v_1^1, \psi) = \int_T u_1(t)(g(t), \psi)\mu(dt) \quad \forall \psi \in N(A),$$

а $u(t)$ принадлежит линейному подпространству и удовлетворяет уравнению

$$\int_T u(t)(g(t),\psi)\mu(dt) = 0.$$

Соответствующее множество функций обозначим U_1. Очевидно, что

$$\hat{u}_1(t) = u_0(t) + \hat{u}(t),$$

где $\hat{u} \in \arg\min_{u \in U_1} \sigma^2(u_0 + u)$, т.е. $\hat{u}$ определяется из соотношения

$$\frac{d}{d\tau}\sigma^2(u_0 + \hat{u} + \tau v)\Big|_{\tau=0} \equiv 0.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\sigma^2(u_0 + \hat{u} + \tau v)\Big|_{\tau=0} = (\tilde{Q}z_0, \tilde{z}_0) + \int_T \int_T R(t,s)(u_0(s) + \hat{u}(s))v(t)\mu(dt)\mu(ds),$$

где $z_0 = A^+ v_1^{(1)} - A^+ \int_T (u_0(t) + \hat{u}(t))g(t)\mu(dt)$, $\tilde{z}_0 = -A^+ \int_T v(t)g(t)\mu(dt)$.

Введем вектор p как решение уравнения $Ap = \tilde{Q}z_0$. Тогда

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\sigma^2(u_0 + \hat{u} + \tau v)\Big|_{\tau=0} = \int_T \left(\int_T R(t,s)(u_0(s) + \hat{u}(s))\mu(ds) - (g(t), p) \right) v(t)\mu(dt) \equiv 0.$$

Положим

$$v(t) = \int_T R(t,s)(u_0(s) + \hat{u}(s))\mu(ds) - (g(t), p).$$

Покажем, что вектор p можно выбрать так, что функция $v(t)$ будет принадлежать множеству U_1.

Заметим, что вектор p имеет вид $p = p_0 + p_1$, где $p_1 \in N(A)$, а p_0 — любое решение уравнения $Ap = \tilde{Q}z_0$. Для того чтобы функция v принадлежала множеству U_1, вектор p_1 нужно выбирать из условия

$$\int_T (g(t), p_1)(g(t),\psi)\mu(dt) = d(\psi),$$

где $d(\psi)$ — некоторое число. Представив p_1 в виде $p_1 = \sum_{j=}^{n_1} \lambda_j \psi_j$, где ψ_j — линейно независимые векторы из $N(A)$, получим систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{n_1} \lambda_j \int_T (g(t),\psi_j)(g(t),\psi_i)\mu(dt) = d(\psi_i), \quad i = \overline{1, n_1},$$

относительно чисел λ_j, которая имеет хотя бы одно решение. Таким образом, из условия

$$\frac{d}{d\tau}\sigma^2(u_0 + \hat{u} + \tau v)\Big|_{\tau=0} \equiv 0$$

получим соотношение

$$\int_T \left[\int_T R(t,s)(u_0(s) + \hat{u}(s))\mu(ds) - (g(t), p) \right]^2 \mu(dt) \equiv 0.$$

Отсюда следует, что функция $\hat{u}(s)$ должна удовлетворять интегральному уравнению

$$\int_T R(t,s)(u_0(s)+\hat{u}(s))\mu(ds) = (g(t),p).$$

Далее найдем выражение для гарантированной ошибки. Получим

$$\sigma^2 = \sup_{x,f} E\left|(v_1^{(1)},x) - \widehat{\widehat{(v_1^{(1)},x)}}\right|^2 = (\tilde{Q}z,z) + \int_T\int_T R(t,s)\hat{u}_1(t)\hat{u}_1(s)\mu(dt)\mu(ds) =$$

$$= (Ap,z) + \int_T (g(t),p)\hat{u}_1(t)\mu(dt) = (p,v_1^{(1)}) - \int_T (g(t),p)\hat{u}_1(t)\mu(dt) +$$

$$+ \int_T (g(t),p)\hat{u}_1(t)\mu(dt) = (p,v_1^{(1)}),$$

т.е. $\sigma^2 = (v_1^{(1)},p)$, что и требовалось доказать.

Альтернативное представление оценки и вычислительные аспекты

Введем далее векторы $\hat{x}$, $\hat{p}$, $\hat{\psi}(t)$ как решения для системы уравнений

$$\begin{cases} A^{\mathrm{T}}\hat{p} = \int_T \hat{\psi}(t)g(t)\mu(dt), \\ (\tilde{Q}\hat{p},\varphi) = 0, \quad \forall\varphi\in N(A^{\mathrm{T}}), \\ A\hat{x} = \tilde{Q}\hat{p} + b, \\ \int_T \hat{\psi}(t)(g(t),\psi)\mu(dt) = 0, \quad \forall\psi\in N(A), \\ \int_T R(t,s)\hat{\psi}(s)\mu(ds) = y(t) - (g(t),\hat{x}). \end{cases} \tag{9}$$

Лемма 7. Пусть вектор $\hat{\varphi}$ определяется как решение системы уравнений (9). Тогда имеет место равенство

$$\widehat{\widehat{(v_1^{(1)},x)}} = \widehat{(v_1^{(1)},x)}.$$

Доказательство. Так как $\widehat{\widehat{(v_1^{(1)},x)}} = \int_T \hat{u}_1(t)y(t)\mu(dt) + \hat{c}$, то, учитывая систему уравнений (9), получим

$$\int_T \hat{u}_1(t)y(t)\mu(dt) = \int_T\int_T R(t,s)\hat{\psi}(s)\hat{u}_1(t)\mu(ds)\mu(dt) + \int_T (g(t),\hat{x})\hat{u}_1(t)\mu(dt).$$

Отсюда

$$\int_T (g(t),\hat{x})\hat{u}_1(t)\mu(dt) = (v_1^{(1)},\hat{x}) - (A^{\mathrm{T}}z,\hat{x}) = (v_1^{(1)},\hat{x}) - (z,A\hat{x}) = (v_1^{(1)},\hat{x}) - (\tilde{Q}\hat{p},z) - (b,z),$$

$$(\tilde{Q}\hat{p},z) = (\hat{p},\tilde{Q}z) = (\hat{p},Ap) = (A^{\mathrm{T}}\hat{p},p) = \int_T \hat{\psi}(t)(g(t),p)\mu(dt) =$$

$$= \int_T\int_T R(t,s)\hat{u}_1(s)\hat{\psi}(t)\mu(ds)\mu(dt).$$

Учитывая эти соотношения, получим нужное равенство.

Лемма доказана.

Очевидным преимуществом альтернативного представления является то, что $\hat{x}$ входит в систему (9) явным образом. Кроме того, для приложений особенно важным представляется случай, когда мера μ сосредоточена в некотором конечном наборе точек, а векторы $v_1^{(1)},\ j=\overline{1,n},$ являются ортами в соответствующем пространстве.

Следствие 1. Пусть $T=\{t_1,\ldots,t_N\},\ t_1<\ldots<t_N$, где $t_i\in R^1$, а мера μ сосредоточена в точках t_i так, что $\int\limits_T l(t)\mu(dt)=\sum\limits_{j=1}^N l(t_j)$, где $l(t)$ — функция, определенная на множестве *T*. Тогда для нахождения функций $\hat u_1(t_j)$, $\hat\psi(t_j)$ получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^N R(t_i,t_j)\hat u_1(t_j)=(g(t_j),p),\quad j=\overline{1,N},$$

$$\sum_{j=1}^N R(t_i,t_j)\hat\psi(t_j)=y(t_j)-(g(t_j),\hat x),\quad j=\overline{1,N},$$

соответственно. При условии, что матрица $R=(R(t_i,t_j))$, $i,j=\overline{1,N}$, невырождена, имеем

$$\hat u_1(t_j)=\left(\sum_{k=1}^N \tilde R(t_j,t_k)g(t_k),\ p\right),$$

$$\hat\psi(t_j)=\sum_{k=1}^N \tilde R(t_j,t_k)y(t_k)-\left(\sum_{k=1}^N \tilde R(t_j,t_k)g(t_k),\ \hat x\right),$$

где $\tilde R(t_j,t_k)$ — элементы обратной матрицы. Таким образом, системы уравнений (8), (9) будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} A^{\mathrm T}z=v_1^{(1)}-\sum\limits_{j=1}^N \hat u_1(t_j)g(t_j),\\ (\tilde Qz,\varphi)=0,\quad \forall\varphi\in N(A^{\mathrm T}),\\ Ap=\tilde Qz,\\ \sum\limits_{j=1}^N \hat u_1(t_j)(g(t_j),\psi)=(v_1^{(1)},\psi),\quad \forall\psi\in N(A); \end{cases}$$

$$\begin{cases} A^{\mathrm T}p=\sum\limits_{j=1}^N \hat\psi(t_j)g(t_j),\\ (\tilde Q\hat p,\varphi)=0,\quad \forall\varphi\in N(A^{\mathrm T}),\\ A\hat x=\tilde Q\hat p+b,\\ \sum\limits_{j=1}^N \hat\psi(t_j)(g(t_j),\psi)=0,\quad \forall\psi\in N(A). \end{cases}$$

Следствие 2. Положим в системе уравнений (8) $v_1^{(1)}=e_j,\ j=\overline{1,n},$ где e_j — j-й орт, а соответствующую оценку обозначим $\widehat{(e_j,x)}=\int\limits_T \hat u_{1,j}(t)y(t)\mu)(dt)+\hat c_j$, $j=\overline{1,N}$. Введем также вектор $\hat x=(\widehat{(e_1,x)},\ldots,\widehat{(e_N,x)})^{\mathrm T}$. Тогда имеет место равенство

$$\sigma^2=\sup_{x,f}E\left|x-\hat x\right|^2=\lambda_{\max}(Z)+\int\limits_T\int\limits_T R(t,s)(\hat u_1(t),\hat u_1(s))\,\mu(dt)\,\mu(ds),$$

где $Z=((z_i,z_j)),\ i,j=\overline{1,n},\ \ z_i$ — решение системы уравнений (8) при $v_1^{(1)}=e_i$, $\hat u_1(t)=(\hat u_{11}(t),\ldots,\hat u_{1n}(t))^{\mathrm T}$.

В настоящей публикации рассмотрена задача оценивания параметров линейных алгебраических уравнений при нестационарных наблюдениях. Получены условия единственности, прямое и альтернативное представления оценки.

О.Г. Наконечний, С.В. Демиденко

ГАРАНТОВАНІ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ ПРИ НЕСТАЦІОНАРНИХ СПОСТЕРЕЖЕННЯХ

Розглянуто оцінки розв'язків лінійних алгебраїчних рівнянь з виродженими матрицями та невідомими правими частинами. За нестаціонарними спостереженнями розв'язків рівнянь з похибками, які є випадковими процесами із заданими першим та другим моментами, досліджуються задачі представлення гарантованих середньоквадратичних оцінок через розв'язки систем алгебраїчних рівнянь.

A.G. Nakonechnyi, S.V. Demydenko

GUARANTEED ESTIMATION OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS PARAMETERS IN CASE OF NONSTATIONARY OBSERVATION

Minimax estimations for solutions of linear algebraic equations under uncertainties are considered. Different representations of guaranteed estimation in the case of nonstationary observations of solutions with noise represented by stochastic process with defined first and second moments are obtained.

1. *Наконечний О.Г.* Оцінювання параметрів в умовах невизначеності // Наукові записки КНУ імені Тараса Шевченка. — 2004. — **7**. — С. 78–81.
2. *Наконечный А.Г.* Минимаксное оценивание функционалов от решений вариационных уравнений в гильбертовых пространствах. — Киев : КГУ, 1985. — 82 с.
3. *Кунцевич В.М.* Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. — Киев : Наук. думка, 2006. — 264 с.
4. *Жук С.М., Наконечний О.Г.* Оцінювання розв'язків алгебраїчно-диференціальних рівнянь в умовах невизначеності. — Рівне : НУВГП, 2009. — 120 с.
5. *Демиденко С.В., Наконечний О.Г., Жук С.М.* До проблеми мінімаксного оцінювання розв'язків одновимірних крайових задач // Таврический вестник информатики и математики. — Симферополь, 2007. — № 1. — С. 7–24.
6. *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. — М. : Наука, 1977. — 224 с.

Получено 30.08.2013

Статья представлена к публикации членом редколлегии доктором техн. наук Ф.Г. Гаращенко.