УДК 519.8

*В.А. Емеличев, В.М. Котов, К.Г. Кузьмин,
Т.Т. Лебедева, Н.В. Семенова, Т.И. Сергиенко*

УСТОЙЧИВОСТЬ И ЭФФЕКТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С МНОГИМИ КРИТЕРИЯМИ И НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ*

Введение

При формализации целенаправленного поведения человека в различных сферах его деятельности, как, например, проектирование технических систем, планирование и управление в экономике, нередко возникает необходимость отыскания решений, оптимальных не по одному, а по нескольким критериям одновременно. В задачах оптимизации многокритериальность появляется вследствие того, что построение однокритериальной модели требует конструирования обобщенной функции полезности, что при наличии противоречивых критериев представляет собой весьма сложную, а в ряде случаев и неразрешимую проблему. Однако даже в хорошо формализованной задаче может возникнуть вопрос о правдоподобности результатов, полученных при ее решении, поскольку, как правило, не исключена погрешность исходных данных задачи. Эта погрешность может быть связана с ошибками измерений или округлений, неточностью численных методов, неадекватностью используемых математических моделей и иными факторами. В этих условиях представляется актуальным проведение анализа чувствительности решений задачи к изменениям входных параметров.

Важное место в исследованиях, осуществляемых в последние десятилетия специалистами в области дискретной оптимизации, в частности научными сотрудниками Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины и Белорусского государственного университета, занимает проблема устойчивости многокритериальных (векторных) задач [1–20]. Неослабевающее внимание к этой проблеме в значительной степени объясняется необходимостью при решении многих прикладных задач, которые могут быть формализованы с помощью дискретных оптимизационных моделей, учитывать факторы неопределенности и случайности, связанные с неточностью исходной информации, несоответствием математических моделей реальным процессам, ошибками округления, погрешностями вычислений и др. Современные исследования вопросов устойчивости векторных задач дискретной оптимизации осуществляются, в основном, в двух направлениях: качественном (см., например, [1–13]) и количественном (см., например, [14–20]). Первое из них ориентировано на получение результатов «ка-

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (проект Ф 54.1/039) и Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф11К-095).

чественного» характера, а именно на определение и исследование условий, при выполнении которых множеству оптимальных решений (множеству Парето, Слейтера или Смейла) присуще некоторое наперед заданное свойство, характеризующее устойчивость задачи к малым возмущениям исходных данных. Второе направление ставит своей целью — нахождение числовых оценок, характеризующих меру устойчивости оптимальных решений, т.е. получение и изучение количественных характеристик допустимых возмущений в исходных данных, в частности радиуса устойчивости.

1. Исследование устойчивости векторных задач дискретной оптимизации с различными принципами оптимальности

Работы, проведенные специалистами Института кибернетики, главным образом принадлежат первому из указанных направлений. В русле этих работ рассмотрены разные типы устойчивости задач целочисленной оптимизации. Исследована проблема регуляризации неустойчивых задач. Выяснена взаимосвязь устойчивости задачи векторной целочисленной оптимизации на конечном множестве допустимых решений с устойчивостью ее оптимальных и неоптимальных решений. Определены понятия, которые могут составить общую основу для описания разных типов устойчивости, для формулировки необходимых и достаточных условий устойчивости. Полученные результаты касаются устойчивости как относительно возмущений всех исходных данных задачи, так и относительно возмущений исходных данных, необходимых для представления ее векторного критерия или ограничений, что является важным, поскольку задача, устойчивая к возмущениям некоторой части своих исходных данных, может быть неустойчивой относительно возмущений другой их части.

Опишем некоторые полученные результаты. Рассмотрим векторную задачу дискретной оптимизации

$$Z(M(F, X)) : \max\{F(x) \mid x \in X\},$$

состоящую в поиске элементов некоторого множества оптимальных решений $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} = \{Sl(F, X), P(F, X), Sm(F, X)\}$, $P(F, X)$ — множество парето-оптимальных (эффективных) решений задачи, $Sl(F, X)$ — множество оптимальных по Слейтеру (слабо эффективных) решений, $Sm(F, X)$ — множество оптимальных по Смейлу (строго эффективных) решений. Согласно [2, 21, 22] справедливы соотношения:

$$M(F, X) = \{x \in X \mid \omega(x, M(F, X)) = \varnothing\},$$

$$\omega(x, P(F, X)) = \{z \in X \mid F(z) \ge F(x),\ F(z) \ne F(x)\},$$

$$\omega(x, Sl(F, X)) = \{z \in X \mid F(z) > F(x)\},$$

$$\omega(x, Sm(F, X)) = \{z \in X \mid z \ne x, F(z) \ge F(x)\},$$

$F = (f_1, f_2, \ldots, f_\ell)$ — векторный критерий, $f_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^1$, $i \in N_\ell$, — частные критерии, $N_\ell = \{1, 2, \ldots, \ell\}$, ℓ — количество частных критериев, $\ell \ge 2$, $X \subset \mathbf{Z}^n$, $\mathbf{Z}^n$ — множество всех целочисленных векторов в $\mathbf{R}^n$, $2 \le |X| < \infty$.

Пусть $u = (u_1, u_2)$ — набор исходных данных задачи $Z(M(F, X))$, являющийся элементом некоторого пространства U всех исходных данных задачи. Это пространство можно представить как декартово произведение $U = U_1 \times U_2$ пространства U_1 исходных данных, необходимых для описания векторного критерия F, и пространства U_2 тех исходных данных, которые описывают допустимое множество X. Например, если частные критерии задачи представлены квадратичными функциями

$f_i(x) = \langle x, D_i x\rangle + \langle c_i, x\rangle$, $i \in N_\ell$, то положим $u_1 = (D, C) \in U_1 = \mathbf{R}^{n\times n\times \ell} \times \mathbf{R}^{\ell\times n}$, где $D = (D_1, D_2, ..., D_\ell) \in R^{n\times n\times \ell}$, $D_i \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $C = [c_{ij}] \in \mathbf{R}^{\ell\times n}$, $c_i = (c_{i1}, c_{i2}, ..., c_{in}) \in \mathbf{R}^n$.

Если же допустимая область X задачи — непустое конечное множество вида $X_G = G(Q, p, h) \bigcap \mathbf{Z}^n$, где $G(Q, p, h) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid g_i(x) \le 0, i \in N_m\}$ — выпуклое множество, $g_i(x) = \langle x, Q_i x\rangle + \langle p_i, x\rangle + h_i$, $p_i \in \mathbf{R}^n$, $h_i \in R$, $Q_i \in \mathbf{R}^{n\times n}$ — симметричная неотрицательно определенная матрица, $i \in N_m$, $Q = (Q_1, ..., Q_m) \in \mathbf{R}^{n\times n\times m}$, $p = [p_{ij}] \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $h = (h_1, ..., h_m) \in \mathbf{R}^m$, то положим $u_2 = (Q, p, h) \in U_2 = \mathbf{R}^{m\times m\times n} \times \mathbf{R}^{m\times n} \times \mathbf{R}^m$.

Исследовано пять типов устойчивости задачи $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, относительно возмущений ее исходных данных. При этом рассмотрено три возможных варианта учета таких возмущений, а именно:

1) берутся во внимание только возмущения в исходных данных для векторного критерия;

2) учитываются возмущения только в исходных данных, необходимых для описания ограничений задачи;

3) рассматриваются возмущения во всех исходных данных, которые привлекаются к описанию задачи.

Термины «устойчивость», «устойчивая задача», «устойчиво принадлежит» используем далее при любом из указанных трех вариантов учета возмущений в исходных данных. Тем не менее при необходимости отдельно рассмотреть первый вариант пользуемся термином «устойчивость по векторному критерию», а для второго варианта — термином «устойчивость по ограничениям».

Для набора $u = (u_1, u_2) \in U$ исходных данных задачи $Z(M(F, X))$ и любого числа $\delta > 0$ определим множество $O_\delta(u)$ возмущенных исходных данных согласно одной из следующих формул:

$$O_\delta(u) = \{u(\delta) = (u_1(\delta), u_2(\delta)) \mid u_1(\delta) \in O_\delta(u_1), u_2(\delta) = u_2\},$$

если учитываются возмущения данных только в векторном критерии;

$$O_\delta(u) = \{u(\delta) = (u_1(\delta), u_2(\delta)) \mid u_1(\delta) = u_1, u_2(\delta) \in O_\delta(u_2)\},$$

когда рассматриваются возмущения исходных данных только в ограничениях;

$$O_\delta(u) = \{u(\delta) = (u_1(\delta), u_2(\delta)) \mid u_1(\delta) \in O_\delta(u_1), u_2(\delta) \in O_\delta(u_2)\},$$

если речь идет о возмущении всех исходных данных задачи. Здесь $O_\delta(u_i) = \{u_i(\delta) \in U_i \mid \|u_i(\delta) - u_i\|_i < \delta\}$, $\|\cdot\|_i$ — норма в пространстве U_i, $i = 1, 2$. Символы $F_{u_1(\delta)}$ и $X_{u_2(\delta)}$ обозначают соответственно векторный критерий и допустимую область задачи при возмущенных начальных данных $u(\delta) = (u_1(\delta), u_2(\delta)) \in O_\delta(u)$.

Задача $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, является T_1-устойчивой, если $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall (u_1(\delta), u_2(\delta)) \in O_\delta(u): M(F, X) \bigcap M(F_{u_1(\delta)}, X_{u_2(\delta)}) \ne \varnothing$.

Задача $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, является T_2-устойчивой, если $\exists \delta > 0$ и $\exists x \in M(F, X)$ такие, что $\forall (u_1(\delta), u_2(\delta)) \in O_\delta(u): x \in M(F_{u_1(\delta)}, X_{u_2(\delta)})$.

Задача $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, является T_3-устойчивой, если $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall (u_1(\delta), u_2(\delta)) \in O_\delta(u): M(F_{u_1(\delta)}, X_{u_2(\delta)}) \subseteq M(F, X)$.

Задача $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, является T_4-устойчивой, если $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall (u_1(\delta), u_2(\delta)) \in O_\delta(u): M(F, X) \subseteq M(F_{u_1(\delta)}, X_{u_2(\delta)})$.

Задача $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, является T_5-устойчивой, если $\exists\delta > 0$ такое, что $\forall(u_1(\delta), u_2(\delta)) \in O_\delta(u) : M(F, X) = M(F_{u_1(\delta)}, X_{u_2(\delta)})$.

Очевидно, что из устойчивости определенного типа относительно возмущений всех исходных данных задачи следует ее устойчивость этого же типа относительно возмущений исходных данных для векторного критерия и возмущений исходных данных, необходимых для описания ограничений. В общем случае обратное утверждение ошибочно.

Относительно устойчивости типа T_1 отметим, в частности, что задача $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, со всеми линейными и квадратичными частными критериями всегда T_1-устойчива по векторному критерию [5]. Для задачи $Z(M(F, X))$, в которой $X = X_G$, понятие T_1- и T_2-устойчивости по ограничениям эквивалентны. Понятие T_1-устойчивости к возмущениям всех начальных данных задачи $Z(P(F, X))$ с квадратичными частными критериями и допустимым множеством $X = X_G$ эквивалентно понятию T_2-устойчивости по ограничениям.

Установлены необходимые и достаточные условия T_2-, T_3-, T_4- и T_5-устойчивости задачи $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$ [5, 8–10]. Показано, что понятие устойчивости этих типов можно свести к двум более очевидным определенным ниже понятиям, которые касаются устойчивости допустимых решений и помогают раскрыть природу действия возмущений в исходных данных на множества допустимых, оптимальных и неоптимальных решений задачи.

Обозначим $\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M} \bigcup \{X, X \setminus P(F, X), X \setminus Sl(F, X), X \setminus Sm(F, X)\}$ совокупность подмножеств множества X. Пусть $\mathcal{M}$ — любой элемент из $\overline{\mathfrak{M}}$. Выберем произвольно число $\delta > 0$ и набор возмущенных исходных данных $u(\delta) = (u_1(\delta), u_2(\delta)) \in O_\delta(u)$. Обозначим $\mathcal{M}_{u(\delta)}$ подмножество возмущенного допустимого множества $X_{u_2(\delta)}$, соответствующее множеству $\mathcal{M}$ как подмножеству допустимого множества X. Например, если $\mathcal{M} = X \setminus P(F, X)$, то $\mathcal{M}_{u(\delta)} =$ $= X_{u_2(\delta)} \setminus P(F_{u_1(\delta)}, X_{u_2(\delta)})$.

Полагаем, что точка $x \in \mathcal{M} \in \overline{\mathfrak{M}}$ устойчиво принадлежит множеству $\mathcal{M}$, если $\exists\delta > 0$ такое, что $\forall u(\delta) \in O_\delta(u)$: $x \in \mathcal{M}_{u(\delta)}$, и неустойчиво принадлежит множеству $\mathcal{M}$ в противном случае. Множество $\mathrm{Ker}(\mathcal{M})$ всех точек, которые устойчиво принадлежат множеству $\mathcal{M} \in \overline{\mathfrak{M}}$, составляет ядро устойчивости множества $\mathcal{M}$:

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{M}) = \{x \in \mathcal{M} \mid \exists\delta > 0 \, \forall u(\delta) \in O_\delta(u) \, (x \in \mathcal{M}_{u(\delta)})\}.$$

Очевидно, из включения $\mathcal{M}' \subset M$, где $\mathcal{M}, \mathcal{M}' \in \overline{\mathfrak{M}}$, следует включение $\mathrm{Ker}(\mathcal{M}') \subset \mathrm{Ker}(\mathcal{M})$.

Полагаем, что точка $x \in X$ устойчиво не принадлежит множеству $\mathcal{M} \in \overline{\mathfrak{M}} \setminus \{X\}$, если $\exists\delta > 0$ такое, что $\forall u(\delta) \in O_\delta(u) : x \notin \mathcal{M}_{u(\delta)}$. Обозначим $\Omega(\mathcal{M})$ множество всех точек $x \in X$, устойчиво не принадлежащих множеству $\mathcal{M}$:

$$\Omega(\mathcal{M}) = \{x \in X \mid \exists\delta > 0 \, \forall u(\delta) \in O_\delta(u) \, (x \notin \mathcal{M}_{u(\delta)})\}.$$

Очевидно, $\forall \mathcal{M} \in \overline{\mathfrak{M}} \setminus \{X\} : \mathrm{Ker}(X \setminus \mathcal{M}) \subseteq \Omega(\mathcal{M}) \subseteq X \setminus \mathcal{M}$.

В случае, когда рассматриваются вопросы устойчивости по векторному критерию задачи $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, каждое ее решение $x \in X$, которое устойчиво не принадлежит множеству $M(F, X)$, будет устойчиво принадлежать его дополнению $X \setminus M(F, X)$ и $\mathrm{Ker}(X \setminus M(F, X)) = \Omega(M(F, X))$.

 ISSN 0572-2691

Очевидна справедливость следующих утверждений, которые связывают понятия T_2- и T_4-устойчивости задачи $Z(M(F, X))$ с понятием ее допустимого решения, которое устойчиво принадлежит множеству $M(F, X)$.

Теорема 1. Задача $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, T_2-устойчива тогда и только тогда, когда среди ее допустимых решений существует хотя бы одно, которое устойчиво принадлежит множеству $M(F, X)$, т.е. $\mathrm{Ker}(M(F, X)) \neq \varnothing$.

Теорема 2. Задача $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, T_4-устойчива тогда и только тогда, когда все ее оптимальные решения устойчиво принадлежат множеству $M(F, X)$, т.е.

$$\mathrm{Ker}(M(F, X)) = M(F, X). \tag{1}$$

Следующей теоремой понятие T_3-устойчивости задачи $Z(M(F, X))$ связывается с понятием допустимого решения, которое устойчиво не принадлежит множеству $M(F, X)$.

Теорема 3. Пусть $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, $M(F, X) \neq X$. Необходимым условием T_3-устойчивости задачи $Z(M(F, X))$ является

$$X \setminus M(F, X) = \Omega(M(F, X)). \tag{2}$$

Если $X = X_G$, то (2) является также и достаточным условием T_3-устойчивости задачи $Z(M(F, X))$.

Очевидно, что при условии $M(F, X) = X$ задача $Z(M(F, X))$ является T_3-устойчивой по векторному критерию. Если, кроме того, $X = X_G$, то такая задача T_3-устойчива относительно любого из трех рассмотренных здесь вариантов учета возмущений в исходных данных.

Из приведенных выше определений различных типов устойчивости следует, что задача $Z(M(F, X))$ T_5-устойчива тогда и только тогда, когда она одновременно T_3-устойчива и T_4-устойчива. Сформулируем необходимые и достаточные условия T_5-устойчивости задачи $Z(M(F, X))$, которые указывают на взаимосвязь этого типа устойчивости с устойчивостью решений, принадлежащих множествам $M(F, X)$ и $X \setminus M(F, X)$.

Теорема 4. Пусть $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, $M(F, X) \neq X$ и $X = X_G$. Задача $Z(M(F, X))$ T_5-устойчива тогда и только тогда, когда выполняются условия (1) и (2).

Если $M(F, X) = X$, то задача $Z(M(F, X))$ T_5-устойчива по векторному критерию тогда и только тогда, когда выполняется условие (1). Если, кроме того, $X = X_G$, то это условие является также необходимым и достаточным для T_5-устойчивости относительно возмущений всех исходных данных задачи.

Таким образом, изучение проблемы устойчивости относительно возмущений исходных данных задачи $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, может основываться на результатах исследования ядра устойчивости $\mathrm{Ker}(M(F, X))$, решения вопросов о его непустоте и о его совпадении со всем оптимальным множеством $M(F, X)$, о равенстве множества неоптимальных допустимых решений $X \setminus M(F, X)$ и множества $\Omega(M(F, X))$ тех допустимых решений задачи, которые устойчиво не принадлежат оптимальному множеству $M(F, X)$.

Приведем формулы, которые описывают множества $\mathrm{Ker}(M(F, X)))$ и $\Omega(M(F, X))$ в некоторых частных случаях.

При исследовании устойчивости задачи $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, к возмущениям векторного критерия $F = (f_1, ..., f_\ell)$, где $f_i : R^n \to R^1$, $i \in N_\ell$, — квадратичные функции, получены следующие соотношения:

$$\operatorname{Ker}(Sl(F, X)) = \operatorname{Ker}(P(F, X)) = \operatorname{Ker}(Sm(F, X)) = Sm(F, X),$$

$$\Omega(Sl(F, X)) = \Omega(P(F, X)) = \Omega(Sm(F, X)) = X \setminus S\ell(F, X).$$

Для задачи $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, в которой учитываются возмущения исходных данных лишь в ограничениях, описывающих допустимое множество $X = X_G$, справедливы такие соотношения:

$$\operatorname{Ker}(Sl(F, X)) = Sl(F, X) \bigcap \operatorname{int} G(Q, p, h),$$

$$\operatorname{Ker}(P(F, X)) = P(F, X) \bigcap \operatorname{int} G(Q, p, h),$$

$$\operatorname{Ker}(Sm(F, X)) = Sm(F, X) \bigcap \operatorname{int} G(Q, p, h).$$

Если, кроме того, все частные критерии, составляющие векторный критерий $F = (f_1, f_2, ..., f_\ell)$ этой задачи, являются вогнутыми непрерывно дифференцируемыми функциями, то имеют место и такие формулы:

$$\Omega(Sl(F, X)) = \{x \in X \setminus Sl(F, X) \,|\, \omega(x, Sl(F, X)) \bigcap \operatorname{int} G(Q, p, h) \neq \varnothing\},$$

$$\Omega(P(F, X)) = \{x \in X \setminus P(F, X) \,|\, \omega(x, P(F, X)) \bigcap \operatorname{int} G(Q, p, h) \neq \varnothing\},$$

$$\Omega(Sm(F, X)) = \{x \in X \setminus Sm(F, X) \,|\, \omega(x, Sm(F, X)) \bigcap \operatorname{int} G(Q, p, h) \neq \varnothing\}.$$

При изучении устойчивости задачи $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, с учетом возмущений, которым подвергаются все ее исходные данные, необходимые для описания и частных критериев $f_1, f_2, ..., f_\ell$, заданных в виде вогнутых квадратичных функций, и допустимого множества $X = X_G$, получены соотношения:

$$\operatorname{Ker}(Sl(F, X)) = \operatorname{Ker}(P(F, X)) = \operatorname{Ker}(Sm(F, X)) = Sm(F, X) \bigcap \operatorname{int} G(Q, p, h),$$

$$\Omega(P(F, X)) = \{x \in X \setminus Sl(F, X) \,|\, \omega(x, Sl(F, X)) \bigcap \operatorname{int} G(Q, p, h) \neq \varnothing\}.$$

2. Устойчивость решений многокритериальных булевых задач с нелинейными критериями

В основу количественного подхода, характеризующего устойчивость задачи к малым возмущениям исходных данных, положено ключевое понятие радиуса устойчивости, под которым понимается предельный уровень возмущений параметров задачи, сохраняющих некоторые свойства оптимальных решений. Ниже приведен обзор последних результатов, касающихся оценок радиуса устойчивости решений многокритериальных булевых задач с нелинейными критериями.

Инвестиционные задачи с критериями Сэвиджа и Вальда. Рассмотрим многокритериальный дискретный вариант задачи управления инвестициями Марковица [23]. Для этого введем ряд обозначений:

$N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ — альтернативные инвестиционные проекты (активы);

N_m — возможные состояния рынка (рыночные ситуации, сценарии развития);

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \in X \subseteq \mathbf{E}^n$ — инвестиционный портфель, где $\mathbf{E} = \{0, 1\}$,

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{если проект } j \text{ реализуется,} \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

r_{ijk} (e_{ijk}) — мера риска (ожидаемая оценка экономической эффективности) вида k инвестиционного проекта $j \in N_n$ в случае, когда рынок находится в состоянии $i \in N_m$.

Для упрощения изложения будем считать, что количество видов рисков и видов эффективности одно и то же, т.е. $k \in N_s$.

Оптимальность выбираемого портфеля $x \in X$ будем оценивать либо векторной целевой функцией $f(x) = (f_1(x), f_2(x),\ldots, f_s(x))$, состоящей из минимаксных критериев рисков Сэвиджа [24]

$$f_k(x) = f_k(x, R_k) = \max_{i \in N_m} R_{ik} x \to \min_{x \in X}, \; k \in N_s, \tag{3}$$

либо векторной функцией $g(x) = (g_1(x), g_2(x),\ldots, g_s(x))$, состоящей из максиминных критериев эффективности Вальда [25]

$$g_k(x) = g_k(x, E_k) = \min_{i \in N_m} E_{ik} x \to \max_{x \in X}, \; k \in N_s. \tag{4}$$

Здесь $R_{ik} = (r_{i1k}, r_{i2k},\ldots, r_{ink})$, $E_{ik} = (e_{i1k}, e_{i2k},\ldots, e_{ink})$ — i-е строки k-х сечений $R_k, E_k \in \mathbf{R}^{m \times n}$ матриц $R = [r_{ijk}] \in \mathbf{R}^{m \times n \times s}$ и $E = [e_{ijk}] \in \mathbf{R}^{m \times n \times s}$.

Очевидно, следуя этим критериям, инвестор, предвидя непредсказуемость сценария событий, проявляет крайнюю осторожность, оптимизируя свой выбор в самом невыгодном для него состоянии. Подобный пессимистический подход в оценке рыночной ситуации целесообразно использовать тогда, когда речь идет о необходимости достижения гарантированного результата.

Обозначим $Z_P(R)$ $(Z_P(E))$ многокритериальную инвестиционную булеву задачу с критериями Сэвиджа (Вальда), состоящую в нахождении множества парето-оптимальных инвестиционных портфелей $P(R)$ $(P(E))$, а $Z_L(R)$ $(Z_L(E))$ — лексикографическую инвестиционную булеву задачу с критериями Сэвиджа (Вальда), состоящую в поиске множества лексикографических оптимумов $L(R)$ $(L(E))$.

Пусть $V = [v_{ijk}] \in \mathbf{R}^{m \times n \times s}$ — любая из матриц R или E, и пусть $p, q, r \in [1, \infty]$. В каждом из пространств $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^m$ и $\mathbf{R}^s$ зададим соответственно метрики Гельдера l_p, l_q и l_r, т.е. под нормой матрицы $V \in \mathbf{R}^{m \times n \times s}$ будем понимать число

$$\|V\|_{pqr} = \|(\|V_1\|_{pq}, \|V_2\|_{pq}, \ldots, \|V_s\|_{pq})\|_r,$$

где $\|V_k\|_{pq} = \|(\|V_{1k}\|_p, \|V_{2k}\|_p, \ldots, \|V_{mk}\|_p)\|_q$, $k \in N_s$.

Радиусом устойчивости парето-оптимального инвестиционного портфеля $x^0 \in P(V)$ назовем число $\rho_P(x^0, p, q, r) = \sup\{\varepsilon > 0 : \forall V' \in \Omega(\varepsilon) \; (x^0 \in P^s(V + V'))\}$, если множество, по которому берется супремум, не пусто. В противном случае радиус полагается равным нулю. Здесь $\Omega(\varepsilon) = \{V' \in \mathbf{R}^{m \times n \times s} : \|V'\|_{pqr} < \varepsilon\}$ — множество возмущающих матриц. Аналогично определяется и радиус устойчивости $\rho_L(x^0, p, q, r)$ лексикографического оптимума $x^0 \in L(V)$.

Для вектора $a = (a_1, a_2,\ldots, a_s) \in \mathbf{R}^s$ введем оператор положительной срезки $[a]^+ = (a_1^+, a_2^+,\ldots, a_s^+)$, где $a_k^+ = \max\{0, a_k\}$, $k \in N_s$.

В работах [26–31] получены следующие достижимые оценки радиуса устойчивости портфелей $x^0 \in L(R)$ и $x^0 \in P(R)$ соответствующих задач с критериями Сэвиджа (3):

$$\min_{x\in X\setminus\{x^0\}}(f_1(x)-f_1(x^0)) \le \rho_L(x^0,1,1,1) \le m \min_{x\in X\setminus\{x^0\}}(f_1(x)-f_1(x^0)),$$

$$\frac{1}{2}\min_{x\in X\setminus\{x^0\}}(f_1(x)-f_1(x^0)) \le \rho_L(x^0,1,\infty,\infty) \le \min_{x\in X\setminus\{x^0\}}(f_1(x)-f_1(x^0)),$$

$$\min_{x\in X\setminus\{x^0\}}\frac{f_1(x)-f_1(x^0)}{\|x+x^0\|_1} \le \rho_L(x^0,\infty,\infty,\infty) \le \min_{x\in X\setminus\{x^0\}}\frac{f_1(x)-f_1(x^0)}{\|x-x^0\|_1},$$

$$\frac{1}{2}\min_{x\in X\setminus\{x^0\}}\|[f(x)-f(x^0)]^+\|_\infty \le \rho_P(x^0,1,\infty,\infty) \le \min_{x\in X\setminus\{x^0\}}\|[f(x)-f(x^0)]^+\|_\infty,$$

$$\min_{x\in X\setminus\{x^0\}}\|[f(x)-f(x^0)]^+\|_\infty \le \rho_P(x^0,1,1,\infty) \le 2\min_{x\in X\setminus\{x^0\}}\|[f(x)-f(x^0)]^+\|_\infty,$$

$$\min_{x\in X\setminus\{x^0\}}\frac{\|[f(x)-f(x^0)]^+\|_\infty}{\|x+x^0\|_1} \le \rho_P(x^0,\infty,\infty,\infty) \le \min_{x\in X\setminus\{x^0\}}\frac{\|[f(x)-f(x^0)]^+\|_\infty}{\|x-x^0\|_1}.$$

Приведем также аналогичные оценки радиуса устойчивости оптимального портфеля x^0 задач $Z_L(E)$ и $Z_P(E)$ с критериями Вальда (4), установленные в [32, 33]:

$$\min_{x\in X\setminus\{x^0\}}(g_1(x^0)-g_1(x)) \le \rho_L(x^0,1,1,1) \le 2\min_{x\in X\setminus\{x^0\}}(g_1(x^0)-g_1(x)),$$

$$\min_{x\in X\setminus\{x^0\}}\frac{\|[g(x^0)-g(x)]^+\|_p}{\|(\|x^0\|_{p'},\|x\|_{p'})\|_{p'}} \le \rho_P(x^0,p,p,p) \le m^{1/p}\min_{x\in X\setminus\{x^0\}}\frac{\|[g(x^0)-g(x)]^+\|_p}{\|x^0-x\|_{p'}}.$$

Здесь $l_{p'}$ — норма, сопряженная с нормой l_p.

Отметим также работу [34], где аналогичные оценки получены для радиуса устойчивости парето-оптимального портфеля бикритериальной инвестиционной задачи с критериями Сэвиджа и Вальда. Кроме того, в работах [35, 36] установлены достижимые оценки радиуса устойчивости многокритериальной инвестиционной задачи $Z_P(R)$, под которым, как обычно, понимается предельный уровень возмущений параметров задачи, не приводящих к появлению новых парето-оптимальных портфелей.

Квадратичная задача на узкие места. Пусть $A=[a_{ijk}]\in\mathbf{R}^{m\times n\times s}$, $x=(x_1,x_2,\ldots$ $\ldots,x_n)^{\mathrm{T}}\in X\subseteq\mathbf{E}^n$, $y=(y_1,y_2,\ldots,y_m)^{\mathrm{T}}\in Y\subseteq\mathbf{E}^m$, $A_k\in\mathbf{R}^{m\times n}$ — k-е сечение матрицы A, $k\in N_s$. На множестве булевых векторов (решений) X зададим вектор-функцию $f(x)=(f_1(x),f_2(x),\ldots,f_s(x))$, компонентами которой являются минимаксные критерии квадратичных форм с распадающимися переменными

$$f_k(x)=f_k(x,A_k)=\max_{y\in Y}\langle A_kx,y\rangle\to\min_{x\in X},\ k\in N_s.$$

Очевидно, что в частном случае, когда множество векторов Y состоит из всех столбцов единичной матрицы E порядка m, эти критерии превращаются в критерии минимаксного риска Сэвиджа.

ISSN 0572-2691

Под многокритериальной квадратичной задачей на узкие места будем понимать задачу $Z_P(A)$ $(Z_L(A))$ нахождения множества парето-оптимальных решений (лексикографических оптимумов).

Теорема 5 [37]. Пусть

$$\xi(x^0) = \min_{x \in X \setminus \{x^0\}} \frac{\|[f_k(x) - f_k(x^0)]^+\|_\infty}{\|x + x^0\|_1}, \quad \zeta(x^0) = \min_{x \in X \setminus \{x^0\}} \frac{\|[f_k(x) - f_k(x^0)]^+\|_\infty}{\|x - x^0\|_1},$$

$$\mu_{\max} = \max\{\|y\|_1 : y \in Y\}, \ \mathbf{E}^m(\mu) = \{y \in \mathbf{E}^m : \|y\|_1 = \mu\}, \ \mu \in N_{m-1}.$$

Тогда для радиуса устойчивости $\rho_P(x^0, \infty, \infty, \infty)$ любого парето-оптимального решения x^0 квадратичной задачи $Z_P(A)$ справедливо неравенство $\rho_P(x^0, \infty, \infty, \infty) \geq \xi(x^0)/\mu_{\max}$, а в случае, когда $Y \subseteq \mathbf{E}^m(\mu)$, верны следующие достижимые оценки:

$$\xi(x^0)/\mu \leq \rho_P(x^0, \infty, \infty, \infty) \leq \zeta(x^0)/\mu, \quad \mu \in N_{m-1}.$$

В работе [38] получены аналогичные оценки радиуса устойчивости лексикографического оптимума x^0 квадратичной задачи $Z_L(A)$.

3. Построение расписаний для идентичных процессоров при известной сумме длительностей выполнения работ

Другим перспективным направлением исследований, проводимых в рамках совместного Украино-Белорусского проекта фундаментальных исследований «Корректность и эффективные алгоритмы решения задач дискретной оптимизации с многими критериями и неполной информацией», является разработка алгоритмов для версий задач с неполной информацией. Особенность таких моделей заключается в том, что решения принимаются с учетом доступной информации и не могут быть изменены при получении дополнительных данных. Это так называемые онлайн и семи-онлайн-версии. Для таких версий наиболее актуальной является проблема построения детерминированного алгоритма, результатом которого является решение, не сильно отличающееся от решения версии задачи, когда все данные задачи заранее известны. В монографии [39] заложены основы семи-онлайн моделей, для которых предложены новые подходы и техники разработки и анализа онлайн алгоритмов.

Построение расписаний на m идентичных процессорах, когда требуется распределить работы таким образом, чтобы время завершения последней работы было минимально, является классической задачей теории расписаний [40]. Хорошо известно, что эта задача является NP-трудной. Для ее решения предложено множество приближенных алгоритмов.

В последнее время большой интерес вызывают версии задачи с неполной информацией, так называемые онлайн и семи-онлайн. В онлайн-версии нет никакой информации о количестве работ, длительности их выполнения на процессоре. Работы поступают одна за другой, и, прежде чем поступит информация о длительности следующей работы или об ее отсутствии, текущая работа должна быть назначена на конкретный процессор, причем это назначение окончательное, т.е. не может быть изменено в дальнейшем. Для оценки качества работы алгоритмов решения различных версий задач с неполной информацией обычно используется сравнительный анализ. Сравниваются значения решений, получаемых алгоритмом для онлайн-версии, с оптимальными значениями соответствующей офлайн-версии (когда все данные заранее известны) и устанавливается гарантированная оценка алгоритма [41, 42]. Следует отметить, что при анализе алгоритмов для задач с неполной информацией используются так называемые нижние границы для гарантированных оценок для задач с неполной информацией [43, 44]. Наличие нижней границы означает принципиальную невозможность построения алгоритма с гарантированной оценкой, лучшей, чем нижняя граница.

Семи-онлайн-версия задач предполагает наличие дополнительной информации общего характера [45]. Для рассматриваемой задачи известно несколько семи-онлайн-версий: работы поступают в отсортированном порядке, известны оптимальное значение решения (задача 1) [46] и общая сумма длительностей выполнения (задача 2) [47].

Групповые технологии для задачи с известной суммарной длительностью всех работ. Будем считать, что S — общая сумма длительностей выполнения работ для семи-онлайн-версий задачи. Тогда нижнюю границу LB для оптимального значения функционала определим как среднюю загрузку процессоров S/m.

Будем считать, что $LB = 1$. Этого можно добиться, пронормировав все величины (поделив на значение LB).

В работе [48] доказано, что нижняя граница для семи-онлайн-версии, когда известна общая сумма процессорных времен, не меньше 1,585.

Определим параметр $\alpha = 0{,}59$ и, используя этот параметр, опишем алгоритм, гарантированная оценка которого будет 1,59.

Разобьем поступающие работы на классы в соответствии с их процессорным временем.

В класс A определим работы, у которых процессорное время больше чем 0,86.

В класс B определим работы, у которых процессорное время больше α, но не больше чем 0,86.

В класс C определим работы, у которых процессорное время не больше чем α. Добавление таких работ на процессор с загрузкой меньше LB приведет к тому, что загрузка процессора может превысить 1, но не превысит $(1 + \alpha)$.

Основная идея алгоритма состоит в специальным образом осуществляемой загрузке процессоров, чтобы для одного процессора или группы процессоров их средняя загрузка была не меньше 1, а максимальная загрузка любого из процессоров не превосходила более чем в $(1 + \alpha)$ раз величину оптимального значения целевой функции.

Ключевым моментом данной схемы является выделение специальных типов процессоров:

— процессор относится к типу *Reduce_A*, если на него назначена одна работа из класса A и несколько других работ, причем общая загрузка процессора больше 1, но не превышает величины $(1 + \alpha)$;

— процессор относится к типу *Open_A*, если на него назначена одна работа из класса A и несколько работ из класса C, причем общая загрузка процессора не больше 1;

— процессор относится к типу *Open_B*, если на него назначена одна работа из класса B.

— процессор относится к типу *Open_C*1, если на него назначена одна или несколько работ из класса C, причем суммарная длительность работ лежит в интервале $[\alpha/2, \alpha]$.

— процессор относится к типу *Open_C*2, если на него назначена одна или несколько работ из класса C, причем суммарная длительность работ меньше $\alpha/2$.

Алгоритм построения расписания состоит из двух этапов. На первом этапе формируются процессоры описанных выше типов следующим образом.

Если поступает работа из класса A, то приоритетным процессором для нее является процессор типа *Open_C*1, затем *Open_C*2, затем пустой процессор. При этом получается либо процессор типа *Reduce_A*, причем его суммарная загрузка не превосходит $(1+\alpha)LB$, либо процессор типа *Open_A*.

Если поступает работа из класса *B*, то приоритетным для нее является пустой процессор. В этом случае получается процессор *Open_B*.

Если поступает работа *X* из класса *C*, то приоритетным для нее является процессор *Open_C*2. Если же $W(Open\_C2)+W(X)>4/7$, или процессоров типа *Open_C*2 нет, то работа назначается на пустой процессор.

Пусть *E*0 соответствует количеству пустых процессоров, а *K*0 — общему количеству процессоров типа *Open_C*, и *Open_C*2.

Первый этап алгоритма заканчивается, когда $3*E0\le K0\le 3*E0+3$.

В дальнейшем можно не рассматривать процессоры типа *Reduce*, которые редуцируют задачу.

Очевидно, что после первого этапа могут быть одновременно получены процессоры *Open_A*, *Open_B* , *Open_C*, и *Open_C*2. При этом если есть процессоры типа *Open_C*1 или *Open_C*2, то процессоров *Open_A* нет.

Отсортируем процессоры типа *Open_B* в порядке невозрастания загрузки и разобьем их на два класса: *Open_B*1 и *Open_B*2. В класс *Open_B*1 входят процессоры с загрузкой, большей, чем 0,795, а в класс *Open_B*2 входят процессоры с загрузкой в пределах (0,59, 0,795]. Пусть K1 соответствует количеству процессоров класса *Open_B*1, а *K*2 — количеству процессоров класса *Open_B*2.

Рассмотрим два возможных случая структуры распределения процессоров по типам после завершения первого этапа алгоритма.

Случай 1. Имеется хотя бы один процессор типа *Open_A*. Это означает, что групп процессоров типа *Open_C*, и *Open_C*2 нет, а могут быть только типа *Open_A* и *Open_B*.

Если в дальнейшем поступает работа, то она назначается, если возможно, на наиболее загруженный процессор типа *Open_A*. Если это возможно, то назначение происходит. Если в результате получился процессор типа *Reduce*, то он в дальнейшем не рассматривается.

Предположим, что очередная работа первый раз не может быть назначена на наиболее загруженный процессор типа *Open_A*. В этом случае можно пересчитать динамическую оценку *LB* следующим образом. Так как количество поступивших работ из классов A и B стало как минимум $m+1$, то две работы должны быть назначены на один процессор. Поэтому нижняя оценка *LB* может быть пересчитана как сумма двух последних процессоров из класса *Open_B*2. Поэтому $LB\ge 2*W(Open\_B2(K2))\ge 1{,}18$.

Учитывая тот факт, что если и в этом случае работа *X* не может быть назначена на наиболее загруженный процессор типа *Open_A*, ее длительность должна быть больше $1{,}59*1{,}18-1=0{,}8762$. Если ее длительность меньше 1, то назначаем ее на наиболее загруженный процессор из класса *Open_B*1, а если ее длительность больше 1, — на последний процессор из класса *Open_B*2. Нетрудно убедиться, что каждое из таких назначений возможно. Действительно, в первом случае загрузка процессора не превысит $W(X)+0{,}86=1{,}86$, а во втором будет $W(X)+W(Open\_B2(K2))$. Но $1{,}86/1{,}18<1{,}58$, а $W(X)+W(Open\_B2(K2))/\max\{W(X), LB\}<1{,}58$.

Таким образом, редуцируется один из классов *Open_B*1 и *Open_B*2.

Следует отметить, что при невозможности назначения более $K2/2$ работ на процессоры из класса *Open_A* оценка *LB* может быть вновь пересчитана. Действительно, при поступлении такой работы по крайней мере одна из работ из класса *Open_B*2 уже должна быть в паре с работой из класса *Open_B*1. Поэтому $LB\ge W(Open\_B2(K2))+W(Open\_B1(K1))\ge 0{,}59+0{,}795=1{,}385$.

В этом случае, если работа X не может быть назначена на наиболее загруженный процессор типа *Open_A*, ее длительность должна быть больше $1{,}59 * 1{,}385 - 1 > 1{,}2$.

Аналогично при невозможности назначения более $K1 + K2$ работ на процессоры из класса *Open_B*1 или *Open_B*2 оценка *LB* может быть вновь пересчитана, т.к. по крайней мере две работы, не назначенные на процессор из класса *Open_A*, или 2 работы из класса *A* должны быть в паре, поэтому $LB > 2 * 0{,}86 = 1{,}72$. Но тогда для любой работы *X*, назначенный на любой нередуцированный процессор, суммарная загрузка не превысит $1 + W(X)$. Поэтому справедливо неравенство $(1 + W(X)) / \max\{X\}, 1{,}72\} < 1{,}59$.

Случай 2. Имеются процессоры типа *Open_A*, *Open_C*1 и *Open_C*2.

На втором этапе из процессоров типа *Open_C*1 и *Open_C*2 формируются группы. В группу входит три процессора типа *Open_C*1 и один пустой процессор. При этом если был процессор *Open_C*2, то будем считать его первым процессором в первой группе. Отметим, что в последней группе может не быть пустого процессора.

Идея второго этапа алгоритма основывается на использовании резервного четвертого процессора группы, что позволяет гарантировать суммарную загрузку в каждой группе не меньше 4.

При поступлении работы *X*, у которой $W(X) \geq 0{,}795$, она сначала назначается на процессоры из последней группы. Нетрудно проверить, что такие работы редуцируют как полную, так и неполную группу.

Если поступает работа *X*, у которой $W(X) < 0{,}795$, то она назначается на первый процессор типа *Open_B* с учетом текущего значения *LB*. Если это невозможно, но возможно на второй процессор *Open_B*, то назначение происходит, при этом редуцируется два первых процессора типа *Open_B*.

В противном случае работа назначается на первый возможный процессор из первой группы.

Нетрудно убедиться, что если не удается назначить работу *X* на второй процессор типа *Open_B*, то $W(X) > 1{,}59 - 0{,}86 = 0{,}73$. При этом в первую группу можно добавить пять таких работ, что обеспечивает редуцирование группы.

Если на процессоры типа *Open_C*1 и *Open_C*2 было назначено *K*0 работ, то величина *LB* может быть пересчитана, как и в случае 1: $LB = 1{,}18$. После этого на процессоры типа *Open_B* может быть назначена любая работа.

Если же процессоры типа *Open_B* были редуцированы ранее, то при любой последовательности поступления работ будут редуцированы группы процессоров.

Для этого необходимо рассмотреть случай, когда осталась одна нередуцированная группа.

Из этих рассуждений вытекает следующее утверждение.

Теорема 6. Предложенная двухэтапная схема позволяет корректно решать задачу с известной общей суммой длительностей выполнения работ при $\alpha = 0{,}59$.

Заключение

Исследована проблема устойчивости векторных задач дискретной оптимизации с различными принципами оптимальности относительно возмущений всех исходных данных задачи на основе полученных результатов о свойствах ядра устойчивости и подмножества тех допустимых решений, которые устойчиво не принадлежат оптимальному множеству. Приведен обзор последних результатов, касающихся оценок радиуса устойчивости решений многокритериальных булевых задач с нелинейными критериями.

Для задачи с известным оптимальным значением целевой функции построен алгоритм с наилучшей известной гарантированной оценкой. В приведенной схеме использованы групповые технологии и динамические нижние оценки для оптимального значения целевого функционала, которые могут использоваться для различных версий задач с неполной информацией. Дальнейшим возможным направлением исследований представляется разработка модифицированных алгоритмов, которые будут учитывать специфику каждой из задач, что, возможно, позволит существенно улучшить гарантированные оценки приведенной общей схемы.

В.О. Ємелічев, В.М. Котов, К.Г. Кузьмин,
Т.Т. Лебєдєва, Н.В. Семенова, Т.І. Сергієнко

СТІЙКІСТЬ ТА ЕФЕКТИВНІ АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ З БАГАТЬМА КРИТЕРІЯМИ І НЕПОВНОЮ ИНФОРМАЦІЄЮ

Досліджено проблему стійкості векторних задач дискретної оптимізації з різними принципами оптимальності щодо збурень всіх вхідних даних задачі на основі отриманих результатів про властивості ядра стійкості та підмножини тих допустимих розв'язків, що стійко не належать оптимальній множині. Наведено огляд останніх результатів стосовно оцінок радіуса стійкості розв'язків багатокритеріальних булевих задач з нелінійними критеріями. Для задачі з відомим оптимальним значенням цільової функції побудовано алгоритм з найкращою відомою гарантованою оцінкою. У наведеній схемі використано групові технології і динамічні нижні оцінки для оптимального значення цільового функціонала, які можуть застосовуватись для різних версій задач з неповною інформацією.

V.A. Emelichev, V.M. Kotov, K.G. Kuzmin,
T.T. Lebedeva, N.V. Semenova, T.I. Sergienko

STABILITY AND EFFECTIVE ALGORITHMS FOR SOLVING MULTIOBJECTIVE DISCRETE OPTIMIZATION PROBLEMS WITH INCOMPLETE INFORMATION

The problem of stability of vector discrete optimization problems with different principles of optimality with respect to perturbations of all input data of the problem is investigated. The results are obtained on the basis of research of properties of kernel of stability and subset of those feasible solutions which steadily do not belong to the optimum set. It is given a review of the last results, in relation to the estimations of radius of solutions stability of Boole multicriteria problems with nonlinear criteria. We proposed parametric scheme for the semi online multiprocessor scheduling problem with given total processing time. We also provide the best known worst-case bounds algorithm for the problem. For a problem with the known optimum value of objective function an algorithm with the best known guaranteed estimation is built. In the resulted chart are used technologies of groups and dynamic lower estimations for the optimum value of objective functional, which can be used for the different versions of problems with incomplete information.

1. *Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И.* Исследование вопросов устойчивости задач дискретной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. — 1993. — № 3. — С. 78–93.

2. *Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т.* Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. — Киев : Наук. думка, 1995. — 170 с.
3. *Сергиенко И.В., Шило В.П.* Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования. — Киев : Наук. думка, 2003. — 261 с.
4. *Сергиенко И.В., Лебедева Т.Т., Семенова Н.В.* О существовании решений в задачах векторной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. — 2000. — № 6. — С. 39–46.
5. *Лебедева Т.Т., Семенова Н.В., Сергиенко Т.И.* Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальных решений // Там же. — 2005. — № 4. — С. 90–100.
6. *Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И.* Устойчивость по векторному критерию и ограничениям векторной целочисленной задачи квадратичного программирования // Там же. — 2006. — № 5. — С. 63–72.
7. *Семенова Н.В.* Устойчивость по ограничениям векторных задач целочисленной оптимизации с выпуклыми квадратичными функциями ограничений // Теорія оптимальних рішень. — Київ : Ін-т кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2007. — № 6. — С. 132–139.
8. *Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И.* Разные типы устойчивости векторной задачи целочисленной оптимизации: общий подход // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 3. — С. 142–148.
9. *Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И.* Условия устойчивости по векторному критерию и ограничениям многокритериальных задач целочисленной оптимизации // Доповіді НАН України. — 2011. — № 4. — С. 37–40.
10. *Лебедева Т.Т., Семенова Н. В., Сергиенко Т. И.* Исследование устойчивости векторных задач дискретной оптимизации с различными принципами оптимальности // Там же. — 2012. — № 11. — С. 34–39.
11. *Емеличев В.А., Кузьмин К.Г.* Критерии устойчивости векторных комбинаторных задач «на узкие места» в терминах бинарных отношений // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 3. — С. 103–111.
12. *Емеличев В.А., Коротков В.В., Кузьмин К.Г.* Постоптимальный анализ одной векторной минимаксной комбинаторной задачи // Там же. — 2011. — № 3. — С. 95–108.
13. *Emelichev V., Karelkina O.* Postoptimal analysis of the multicriteria combinatorial median location problem // Optimization. — 2012. — **61**, N 9. — P. 1151–1167.
14. *Emelichev V.A., Karelkina O.V., Kuzmin K.G.* Qualitative stability analysis of multicriteria combinatorial minimin problem // Control and Cybernetics. — 2012. — **41**, N 1. — P. 57–79.
15. *Emelichev V.A., Girlich E., Nikulin Yu.V., Podkopaev D.P.* Stability and regularization of vector problems of integer linear programming // Optimization. — 2002. — **51**, N 4. — P. 645–676.
16. *Libura M., Nikulin Yu.* Stability and accuracy functions in multicriteria combinatorial optimization problem with Σ-MINMAX and Σ-MINMIN partial criteria // Control and Cybernetics. — 2004. — **33**, N 3. — P. 511–524.
17. *Емеличев В.А., Кузьмин К.Г.* О радиусе устойчивости эффективного решения векторной задачи целочисленного линейного программирования в метрике Гельдера // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 4. — С. 175–181.
18. *Емеличев В.А., Кузьмин К.Г.* Общий подход к исследованию устойчивости парето-оптимального решения векторной задачи целочисленного линейного программирования // Дискретная математика. — 2007. — **19**, вып. 3. — С. 79–83.
19. *Емеличев В.А., Кузьмин К.Г.* О радиусе устойчивости векторной задачи целочисленного линейного программирования в случае регулярности нормы в критериальном пространстве // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 1. — С. 82–89.
20. *Emelichev V., Podkopaev D.* Quantitative stability analysis for vector problems of 0-1 programming // Discrete Optimization. — 2010. — **7**, N 1–2. — P. 48–63.
21. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — М. : Наука, 1982. — 256 с.
22. *Smale S.* Global analysis and economics, V. Pareto theory with constraints // J. Math. Econ. — 1974. — N 1. — P. 213–221.
23. *Markowitz H.M.* Portfolio selection: efficient diversification of investments. — Oxford : Blackwell Publ., 1991. — 310 p.
24. *Savage L.J.* The foundations of statistics. — New York : Dover Publ., 1972. — 384 p.
25. *Wald A.* Statistical decision functions. — New York : John Wiley, 1950. — 179 p.
26. *Емеличев В.А., Коротков В.В.* Постоптимальный анализ многокритериальной инвестиционной задачи Марковица // Информатика. — 2011. — № 4. — С. 5–14.

27. *Емеличев В.А., Коротков В.В.* Оценки радиуса устойчивости лексикографического оптимума векторной булевой задачи с критериями рисков Сэвиджа // Дискретный анализ и исследования операций. — 2011. — **18**, № 2. — С. 41–50.
28. *Емеличев В.А., Коротков В.В.* Об устойчивости оптимального портфеля инвестиционной задачи Марковица с упорядоченными критериями рисков Сэвиджа // Изв. НАН Азербайджана. Сер. физ.-тех. и мат. наук. — 2011. — **31**, № 6. — С. 27–34.
29. *Емеличев В.А., Коротков В.В.* Об устойчивости эффективного решения векторной инвестиционной булевой задачи с минимаксными критериями Сэвиджа // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. — 2010. — **18**, № 2. — С. 3–10.
30. *Емеличев В.А., Коротков В.В., Кузьмин К.Г.* Многокритериальная инвестиционная задача в условиях неопределенности и риска // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2011. — № 6. — С. 157–164.
31. *Emelichev V., Korotkov V., Kuzmin K.* On stability of a Pareto-optimal solution of a portfolio optimization problem with Savage's minimax risk criteria // Bulletin of the Academy of Sciences of Moldova. Mathematics. — 2010. — N 3 (64). — P. 35–44.
32. *Emelichev V., Korotkov V.* Post-optimal analysis of investment problem with Wald's ordered maximin criteria // Bulletin of the Academy of Sciences of Moldova. Mathematics. — 2012. — N 1 (68). — P. 59–69.
33. *Емеличев В.А., Коротков В.В.* Об устойчивости решения многокритериальной инвестиционной задачи в метрике Гельдера // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. — 2012. — № 4. — С. 42–48.
34. *Емеличев В.А., Коротков В.В.* Анализ устойчивости парето-оптимального портфеля бикритериальной инвестиционной задачи с критериями Вальда и Сэвиджа // Информатика. — 2012. — № 2. — С. 107–118.
35. *Emelichev V., Korotkov V.* On stability radius of the multicriteria variant of Markowitz's investment portfolio problem // Bulletin of the Academy of Sciences of Moldova. Mathematics. — 2011. — N 1 (65). — P. 83–94.
36. *Емеличев В.А., Коротков В.В.* О радиусе устойчивости векторной инвестиционной задачи с критериями минимаксного риска Сэвиджа // Кибернетика и системный анализ. — 2012. — № 3. — С. 68–77.
37. *Емеличев В.А., Коротков В.В.* О радиусе устойчивости эффективного решения векторной квадратичной булевой задачи на узкие места // Дискретный анализ и исследование операций. — 2011. — **18**, № 6. — С. 3–16.
38. *Емеличев В.А., Коротков В.В.* Об устойчивости лексикографического решения векторной минимаксной квадратичной булевой задачи // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. — 2011. — **19**, № 2. — С. 26–36.
39. *Котов В.М.* Алгоритмы для задач разбиения и упаковки. — Минск : БГУ, 2001. — 99 с.
40. *Graham R.L.* Bounds for certain multi-processing anomalies // Bell System Technical J. — 1966. — **45**. — P. 1563–1581.
41. *Galambos G., Woeginger G.* An on-line scheduling heuristic with better worst case ratio than Graham's list scheduling // SIAM J. on Computing. — 1993. — **22**. — P. 349–355.
42. *Fleischer R., Wahl M.* On-line scheduling revisited // J. of Scheduling. — 2000. — **3**. — P. 343–353.
43. *Faigle U., Kern W., Turan G.* On the performance of on-line algorithms for partition problems // Acta Cybernetica. — 1989. — **9**. — P. 107–119.
44. *Rudin III J.F., Chandrasekaran R.* Improved bounds for the on-line scheduling problem // SIAM J. on Computing. — 2003. — **32**. — P. 717–735.
45. *Semi-on-line* algorithms for the partition problem / H. Kellerer et al. // Oper. Res. Letters. — 1997. — **21**. — P. 235–242.
46. *Azar Y., Regev O.* On-line bin-stretching // Theor. Comput. Sci. — 2001. — **268**. — P. 17–41.
47. *Cheng T.C.E., Kellerer H., Kotov V.* Semi-on-line multiprocessor scheduling with given total processing time // Ibid. — 2005. — **337**. — P. 134–146.
48. *Albers S., Hellwig M.* Semi-on-line scheduling revisited // Ibid. — 2012. — **443**. — P. 1–9.

Получено 27.06.2013

Статья представлена к публикации членом редколлегии акад. НАН Украины И.В. Сергиенко.