УДК 519.85

О.А. Емец, М.В. Леонова

СИМПЛЕКСНАЯ ФОРМА ОБЩЕГО ПЕРЕСТАНОВОЧНОГО МНОГОГРАННИКА, ЗАДАННОГО НЕПРИВОДИМОЙ СИСТЕМОЙ

Введение

Задачи комбинаторной оптимизации (см., например, [1–14]) — актуальное направление исследований в теории оптимизации. Существенным для разработки эффективных методов является знание свойств комбинаторных множеств и их выпуклых оболочек — комбинаторных многогранников, в частности перестановочного многогранника. Его структура и свойства достаточно хорошо исследованы [2, 5, 6, 14, 15]. Свойства общего перестановочного многогранника при преобразовании его в форму, необходимую для применения алгоритма Кармаркара, пока недостаточно изучены. Исследования комбинаторных многогранников важны, поскольку они используются при разработке методов решения задач комбинаторной оптимизации. Применяя алгоритм Кармаркара, необходимо найти симплексную форму многогранника, под которой понимают многогранник, полученный из многогранника исходной задачи согласно алгоритму преобразования задачи линейного программирования (ЗЛП) в форму, необходимую для алгоритма Кармаркара (см., например, [16, 17]).

Известна [18] симплексная форма перестановочного многогранника без учета возможного наличия избыточных ограничений. Поскольку неприводимая система перестановочного многогранника имеет только необходимые ограничения, то с точки зрения вычислительной сложности в алгоритмах целесообразно использовать симплексную форму перестановочного многогранника, которая обусловливается его неприводимой системой. Поэтому актуальной является задача установления симплексной формы общего перестановочного многогранника, заданного неприводимой системой линейных ограничений. Такая форма необходима, в частности, для применения алгоритма Кармаркара (АК) в методах решения комбинаторных оптимизационных задач.

1. Постановка задачи

Поставим задачу исследования общего перестановочного многогранника при преобразованиях, необходимых для приведения ЗЛП в нужную форму при применении алгоритма Кармаркара (АК).

Используем терминологию из [2]. Рассмотрим решения линейной условной частично комбинаторной задачи оптимизации на перестановках вида: найти упорядоченную пару $\langle C(y^*), y^* \rangle$ такую, что

$$C(y^*) = \underset{y \in R^m}{\text{extr}} \sum_{j=1}^{m} c_j y_j, \qquad (1)$$

$$y^* = \arg \underset{y \in R^m}{\text{extr}} \sum_{j=1}^{m} c_j y_j \qquad (2)$$

при комбинаторных условиях

$$x \in (x_1, ..., x_k) \in E_{\eta n}^k(G) \subset R^k \qquad (3)$$

и дополнительных ограничениях

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \le b_i, \;\; i \in J_r, \;\; \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j = b_i, \;\; i \in J_s \setminus J_r, \qquad (4)$$

где $E_{kn}(G)$ — евклидово множество перестановок, образованных элементами мультимножества G; $y=(x_1,...,x_k,y_{k+1},...,y_m)\in R^m$; $x_i=y_i$ $\forall i\in J_k$; m,r,k,s — натуральные константы $(m\ge k)$; c_j, a_{ij}, b_i — заданные действительные числа $\forall j\in J_m$, $\forall i\in J_r$; R^m — m-мерное евклидово арифметическое пространство. Под J_k подразумевается множество первых k натуральных чисел $J_k=\{1,2,...,k\}$, а $J_0=\varnothing$.

При решении задачи (1)–(4) методом комбинаторного отсечения [4] важным является решение вспомогательной задачи линейного программирования (ВЗЛП), которая образуется из задачи вида (1)–(4) заменой ограничения (3) условием принадлежности точки x общему перестановочному многограннику $\Pi_{kn}(G)$:

$$x\in\Pi_{kn}(G).$$

Пусть мультимножество $G=\{g_1,...,g_k\}$ имеет основу $S(G)=(e_1,...,e_n)$ и первичную спецификацию $[G]=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_n)$. Пусть элементы в G и в $S(G)$ пронумерованы так, что

$$g_1\le g_2\le...\le g_k;\ \ e_1<e_2<...<e_n. \qquad (5)$$

Задание общего перестановочного многогранника неприводимой системой линейных ограничений известно [2, 5, 15]:

$$\sum_{j=1}^{k}x_j=\sum_{j=1}^{k}g_j, \qquad (6)$$

$$\sum_{j\in\omega}x_j\le\sum_{j=1}^{|\omega|}g_{k-j+1}\quad\forall\omega\subset J_k, \qquad (7)$$

для которых $|\omega|\in I$, $I=J_{k-1}\setminus((J_{\eta_n}\setminus\{1\})\cup(J_{k-2}\setminus J_{k-\eta_1-1}))$.

2. Алгоритм преобразования многогранника в симплексную форму

Рассмотрим алгоритм преобразования (АП) ЗЛП в стандартной форме к виду, необходимому для применения алгоритма Кармаркара, способом, изложенным в [16, 17]. Матричную запись ЗЛП приведем в стандартной форме:

найти $cx\to\max$ при условиях:

$$Ax\le b;\ \ x\ge 0, \qquad (8)$$

где $c=(c_1,...,c_k)$; x — вектор, транспонированный к вектору $x^{\mathrm T}=(x_1,...,x_k)$; $A=(a_{ij})_{j=\overline{1,k}}^{i=\overline{1,r}}$; $b=(b_1,...,b_r)^{\mathrm T}$. Символическая запись $x\ge 0$ здесь и далее означает, что все координаты вектора x неотрицательные.

Общий алгоритм преобразования ЗЛП с системой ограничений (8) можно представить следующей последовательностью шагов.

Шаг 1. Сводим заданную систему (8) к так называемому каноническому [19, с. 17] виду:

$$Ax+y=b;\ \ x,y\ge 0, \qquad (9)$$

где $y=(y_1,...,y_r)^{\mathrm T}$.

Шаг 2. Вводим дополнительное ограничение вида

$$\sum_{j=1}^{k}x_j+\sum_{i=1}^{r}y_i\le U, \qquad (10)$$

где U — достаточно большое действительное положительное число такое, что все допустимые точки исходного множества решений системы (8) удовлетворяют (10). Добавляя еще одну неотрицательную переменную u, сводим неравенство (10) к равенству

$$\sum_{j=1}^{k} x_j + \sum_{i=1}^{r} y_i + u = U. \tag{11}$$

Шаг 3. Сводим систему уравнений (9) к эквивалентной ей однородной системе. Это можно сделать, умножив правую часть уравнений системы на равное единице выражение:

$$\frac{\sum_{j=1}^{k} x_j + \sum_{i=1}^{r} y_i + u}{U}.$$

Уравнения системы (9) приобретут вид

$$A^x x + A^y y - bu = \overline{0}, \tag{12}$$

где матрица $A^x = (a_{ij}^x)_{j=\overline{1,k}}^{i=\overline{1,r}}$ имеет элементы $a_{ij}^x = a_{ij} - b_i / U \quad \forall j \in J_k, \ \forall i \in J_r$; матрица $A^y = (a_{ij}^y)_{j=\overline{1,k}}^{i=\overline{1,r}}$ имеет элементы $a_{ii}^y = 1 - b_i / U \quad \forall i \in J_r$; $a_{ij}^y = -b_i / U$, $j \neq i$, $\forall i \in J_r$, $\forall j \in J_k$; вектор $\overline{0} = (0, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}} \in R^r$ — нулевой вектор-столбец арифметического евклидова пространства R^r.

Шаг 4. Превращаем условие (11) в такое, которое вместе с остальными условиями задачи определяет симплекс с вершиной в начале координат и с основанием, которое отсекает единичные отрезки на положительных направлениях координатных осей. Это делается введением новых переменных:

$$X_j = \frac{x_j}{U} \quad \forall j \in J_k, \quad Y_i = \frac{y_i}{U} \quad \forall i \in J_r. \tag{13}$$

Обозначим также

$$\frac{u}{U} = V. \tag{14}$$

С учетом (12)–(14) рассматриваемая ЗЛП принимает вид

$$UcX \to \max \tag{15}$$

при условиях

$$A^X X + A^Y Y - bV = \overline{0}, \tag{16}$$

$$\sum_{j=1}^{k} X_j + \sum_{i=1}^{r} Y_i + V = 1, \tag{17}$$

$$X = (X_1, \ldots, X_k)^{\mathrm{T}} \geq 0, \ \ Y = (Y_1, \ldots, Y_r)^{\mathrm{T}} \geq 0, \ \ V \geq 0, \tag{18}$$

где

$$A^X = (a_{ij}^X)_{j=\overline{1,k}}^{i=\overline{1,r}}; \ \ a_{ij}^X = a_{ij} U - b_i \ \ \forall i \in J_r, \ \forall j \in J_k;$$

$$A^Y = (a_{ij}^Y)_{j=\overline{1,k}}^{i=\overline{1,r}}; \ \ a_{ii}^Y = U - b_i \ \ \forall i \in J_r; \ \ a_{ij}^Y = -b_i \ \ \forall i \neq j, \ i \in J_r, \ \ j \in J_k.$$

ISSN 0572-2691

Шаг 5. Обеспечиваем выполнение условия удовлетворения системе ограничений точкой

$$\left(\frac{1}{N}, \frac{1}{N}, ..., \frac{1}{N}\right) \in R^N,$$

являющейся центром (барицентром) симплекса, где N — размерность пространства, которая определяется на этом шаге.

С этой целью в каждом из однородных уравнений системы (16) с номером i вычтем в левой части дополнительную неотрицательную искусственную переменную Z_i, $i \in J_r$, с коэффициентом, равным алгебраической сумме всех коэффициентов левой части этого же уравнения. Причем эта переменная в виде штрафа также добавляется и к функции цели (15) с коэффициентом $-M$. Число $M > 0$ должно быть достаточно большим, чтобы обеспечить соответствующей переменной нулевое значение при максимизации модифицированной целевой функции при полученных условиях. Сумма Z_i $\forall i \in J_r$ добавляется и в левую часть (17).

ЗЛП (15)–(18) преобразуется к виду

$$UcX - M\sum_{i=1}^{r} Z_i \to \max, \tag{19}$$

$$A^X X + A^Y Y - A^Z Z - bV = \overline{0}, \tag{20}$$

$$\sum_{j=1}^{k} X_i + \sum_{i=1}^{r} Y_i + \sum_{i=1}^{r} Z_i + V = 1, \tag{21}$$

$$X \ge 0,\ Y \ge 0,\ Z = (Z_1, ..., Z_r)^{\mathrm{T}} \ge 0,\ V \ge 0, \tag{22}$$

где $A^Z = (a_{ij}^Z)_{j=\overline{1,k}}^{i=\overline{1,r}}$; $a_{ii}^Z = U\sum_{j=1}^{k} a_{ij} - kb_i + U - b_i - (k-1)b_i - b_i = U\sum_{j=1}^{k} a_{ij} + U - (2k+1)b_i$ $\forall i \in J_r$; $a_{ij}^Z = 0$ $\forall i \ne j$, $i \in J_r$, $j \in J_k$.

Очевидно, что для полученной системы ограничений (20)–(22) точка $(X^*, Y^*, Z^*, V^*) = \left(\frac{1}{N}, \frac{1}{N}, ..., \frac{1}{N}\right) \in R^N$ является допустимым решением, где $X_i^* = Y_j^* = Z_j^* = V^* = \frac{1}{N}$ $\forall i \in J_k$, $\forall j \in J_r$, а размерность пространства вычисляется так: $N = k + 2r + 1$.

3. Преобразования с помощью АП ЗЛП с допустимой областью — перестановочным многогранником, заданным неприводимой системой ограничений

Установим вид ЗЛП, в котором перестановочный многогранник является допустимой областью, при сведении ее к форме, необходимой для применения алгоритма Кармаркара. Докажем следующий факт.

Теорема. Симплексная форма общего перестановочного многогранника, заданного неприводимой системой (6), (7), имеет вид

$$\left(U - \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{k-j+1}\right)\left(\sum_{j\in\omega} X_j + Y_\omega\right) - \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{k-j+1}\left(\sum_{j\in J_k\setminus\omega} X_j + \sum_{\substack{\Omega\subset J_k\\ |\Omega|\in I\\ \Omega\ne\omega}} Y_\Omega + V\right) - \alpha_{|\omega|} W_\omega = 0, \tag{23}$$

$$\forall \omega \subset J_k,$$

$$\left(U - \sum_{j=1}^{k} g_j\right)\sum_{j=1}^{k} X_j - \sum_{j=1}^{k} g_j \left(\sum_{\substack{\omega\subset J_k\\ |\omega|\in I}} Y_\omega + V\right) - \alpha_k W_{J_k} = 0, \tag{24}$$

$$\sum_{j=1}^{k} X_j + \sum_{\substack{\omega\subset J_k \\ |\omega|\in I}} Y_\omega + V + \sum_{\substack{\omega\subset J_k \\ |\omega|\in I}} W_\omega + W_{J_k} = 1, \quad (25)$$

где

$$U = \sum_{j=1}^{n} \eta_j e_j + 2k(e_n - e_1) + \sum_{j=\eta_n+1}^{k-\eta_1-1} \left[C_k^j \left(\sum_{i=1}^{j} g_{k-i+1} - \sum_{i=1}^{j} g_i \right) \right]; \quad (26)$$

$$X_j = \frac{x_j}{U} \ \forall j \in J_k;\ Y_i = \frac{y_i}{U} \ \forall i \in J_r;\ \frac{u}{U} = V; \quad (27)$$

$$\alpha_{|\omega|} = (|\omega|+1)U - \left(\sum_{|\Omega|\in I} C_k^{|\Omega|} + k + 1 \right) \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{k-j+1}; \quad (28)$$

$$\alpha_k = kU - \left(\sum_{|\Omega|\in I} C_k^{|\Omega|} + k + 1 \right) \sum_{j=1}^{k} g_j; \quad (29)$$

W_ω, W_{J_k} — дополнительные неотрицательные искусственные переменные с коэффициентами соответственно $\alpha_{|\omega|}, \alpha_k$.

Доказательство. Обоснование теоремы будет конструктивным (алгоритмическим) с доказательством необходимых вспомогательных утверждений. Оно фактически применимо к системе (6), (7) АП.

Шаг 1. Сводим (6), (7) к каноническому виду, вводя неотрицательные переменные y_ω:

$$\sum_{j\in\omega} x_j + y_\omega = \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{k-j+1} \ \forall \omega \subset J_k,\ |\omega| \in I, \quad (30)$$

$$\sum_{j=1}^{k} x_j = \sum_{j=1}^{k} g_j. \quad (31)$$

Шаг 2. Вводим дополнительное ограничение

$$\sum_{j=1}^{k} x_j + \sum_{\substack{\omega\subset J_k \\ |\omega|\in I}} y_\omega \le U \quad (32)$$

в форме

$$\sum_{j=1}^{k} x_j + \sum_{\substack{\omega\subset J_k \\ |\omega|\in I}} y_\omega + u = U, \quad (33)$$

где $u \ge 0$.

Следующее утверждение устанавливает возможность вычисления *U*.

Утверждение 1. Для общего перестановочного многогранника, заданного в виде неприводимой системы (6), (7) при выполнении условий (5), справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^{k} x_j + \sum_{\substack{\omega\subset J_k \\ |\omega|\in I}} y_\omega \le U, \quad (34)$$

где *U* определяется по формуле (26).

Доказательство. Каждое неравенство из (7)

$$\sum_{j\in\omega} x_j \le \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{k-j+1} \quad (35)$$

 ISSN 0572-2691

эквивалентно при условиях (5), (6) такому неравенству:

$$\sum_{j \in J_k \setminus \omega} x_j \geq \sum_{j=1}^{|J_k \setminus \omega|} g_j . \tag{36}$$

Объединяя неравенства вида (35), (36) для одинаковых сумм переменных в их левых частях, получаем

$$\sum_{j=1}^{|\omega|} g_j \leq \sum_{j \in \omega} x_j \leq \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{k-j+1}. \tag{37}$$

Из (30) имеем

$$y_\omega = \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{k-j+1} - \sum_{j \in \omega} x_j , \tag{38}$$

а из левой части (37) справедливо

$$-\sum_{j \in \omega} x_j \leq -\sum_{j=1}^{|\omega|} g_j . \tag{39}$$

Учитывая (38) и (39), получаем

$$y_\omega \leq \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{k-j+1} - \sum_{j=1}^{|\omega|} g_j . \tag{40}$$

Поскольку количество подмножеств в J_k с одинаковым $|\omega| = j$ равно количеству сочетаний с k элементов по j, то второе слагаемое в левой части (34) оценивается по формуле (40) следующим образом.

1. Если $\eta_1 > 1, \eta_n = 1,$ то

$$C_k^1 = \frac{k!}{(k-1)!1!} = k, \quad C_k^{k-1} = \frac{k!}{1!(k-1)!} = k.$$

Исходя из (40) и состава множества I, имеем

$$\sum_{\substack{\omega \subset J_k \\ |\omega| \in I}} y_\omega \leq 2k(g_k - g_1) + \sum_{j=\eta_n+1}^{k-1} C_k^j \left(\sum_{i=1}^{j} g_{k-i+1} - \sum_{i=1}^{j} g_i \right).$$

2. Если $\eta_1 = 1, \eta_n > 1,$ то

$$\sum_{\substack{\omega \subset J_k \\ |\omega| \in I}} y_\omega \leq \sum_{j=1}^{k-\eta_1-1} C_k^j \left(\sum_{i=1}^{j} g_{k-i+1} - \sum_{i=1}^{j} g_i \right) + 2k(g_k - g_1).$$

3. Общий случай при $\eta_1 > 1, \eta_n > 1$

$$\sum_{\substack{\omega \subset J_k \\ |\omega| \in I}} y_\omega \leq 2k(g_k - g_1) + \sum_{j=\eta_n+1}^{k-\eta_1-1} C_k^j \left(\sum_{i=1}^{j} g_{k-i+1} - \sum_{i=1}^{j} g_i \right). \tag{41}$$

Объединяя три случая соотношения η_1 и η_n, а также учитывая обозначение основы, первичную спецификацию и равенство (6): $\sum_{j=1}^{k} x_j = \sum_{j=1}^{n} \eta_j e_j$, получаем, что справедливо (34), где

$$U=\sum_{j=1}^{n}\eta_j e_j+2k(e_n-e_1)+\sum_{j=\eta_n+1}^{k-\eta_1-1}\left[C_k^j\left(\sum_{i=1}^{j}g_{k-i+1}-\sum_{i=1}^{j}g_i\right)\right],$$

т.е. U определяется по (26), что и требовалось доказать.

Шаг 3. Сводим систему (30), (31) к эквивалентной однородной системе, умножая правые части уравнений системы на выражение, равное согласно (33) единице:

$$\left(\sum_{j=1}^{k}x_j+\sum_{\substack{\Omega\subset J_{y_\Omega k}\\ |\Omega|\in I}}y_\Omega+u\right)U^{-1}.$$

После приведения подобных получаем следующую систему:

$$\left(1-U^{-1}\sum_{j=1}^{|\omega|}g_{k-j+1}\right)\left(\sum_{j\in\omega}x_j+y_\omega\right)-U^{-1}\sum_{j=1}^{|\omega|}g_{k-j+1}\left(\sum_{j\in J_k\setminus\omega}x_j+\sum_{\substack{\Omega\subset J_k\\ |\Omega|\in I\\ \Omega\neq\omega}}y_\Omega+u\right)=0 \tag{42}$$

$$\forall\omega\subset J_k,\ |\omega|\in I,$$

$$\left(1-U^{-1}\sum_{j=1}^{k}g_j\right)\sum_{j=1}^{k}x_j-U^{-1}\sum_{j=1}^{k}g_j\left(\sum_{\substack{\omega\subset J_k\\ |\omega|\in I}}y_\omega+u\right)=0. \tag{43}$$

Шаг 4. Выполняем замену переменных согласно формулам (27) и из (33), (42) и (43) и получаем систему:

$$\left(U-\sum_{j=1}^{|\omega|}g_{k-j+1}\right)\left(\sum_{j\in\omega}X_j+Y_\omega\right)-\sum_{j=1}^{|\omega|}g_{k-j+1}\left(\sum_{j\in J_k\setminus\omega}X_j+\sum_{\substack{\Omega\subset J_k\\ |\Omega|\in I\\ \Omega\neq\omega}}Y_\Omega+V\right)=0 \tag{44}$$

$$\forall\omega\subset J_k,\ |\omega|\in I,$$

$$\left(U-\sum_{j=1}^{k}g_j\right)\sum_{j=1}^{k}X_j-\sum_{j=1}^{k}g_j\left(\sum_{\substack{\omega\subset J_k\\ |\omega|\in I}}Y_\omega+V\right)=0, \tag{45}$$

$$\sum_{j=1}^{k}X_j+\sum_{\substack{\omega\subset J_k\\ |\omega|\in I}}Y_\omega+V=1. \tag{46}$$

При такой замене переменных целевая функция ВЗЛП $\sum_{j=1}^{k}c_jX_j\to\max$ принимает вид

$$U\sum_{j=1}^{k}c_jX_j\to\max. \tag{47}$$

Шаг 5. В каждом из уравнений (44), (45) из левой части вычтем свою неотрицательную переменную W_ω, $\omega\subset J_k$, с коэффициентами $\alpha_{|\omega|}$, которые определяются соответственно по формулам (28), (29).

Утверждение 2. При фиксированном подмножестве $\omega\subset J_k$, $|\omega|\in I$, сумма коэффициентов при переменных в уравнениях (44), (45) равна величине $\alpha_{|\omega|}$, вычисляемой по формулам (28), (29).

Доказательство. Справедливость утверждения обосновывается непосредственной проверкой.

Первое слагаемое в (44) содержит $|\omega|$ переменных X_j, $j \in \omega$, и одну переменную Y_ω с коэффициентом при каждой $U - \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{k-j+1}$. Второе алгебраическое слагаемое в (44) содержит $|J_k \setminus \omega|$ переменных X_j, $j \in J_k \setminus \omega$, а также $\sum_{|\Omega| \in I} C_k^{|\Omega|} - 1$ переменных Y_Ω $\forall \Omega \ne \omega$, $\Omega \subset J_k$, $|\Omega| \in I$, и переменную V. Все эти переменные имеют множитель $-\sum_{j=1}^{|\omega|} g_{k-j+1}$. Отметим, что $|J_k \setminus \omega| = k - |\omega|$. Таким образом, U входит в сумму $|\omega| + 1$ раз. Общее количество вхождений слагаемого $-\sum_{j=1}^{|\omega|} g_{k-j+1}$ выражается формулой

$$|\omega| + (k - |\omega|) + \sum_{|\Omega| \in I} C_k^{|\Omega|} + 1 = \sum_{|\Omega| \in I} C_k^{|\Omega|} + 1 + k.$$

Учитывая это, для $\alpha_{|\omega|}$ получаем формулу (28). Аналогично, подсчитывая коэффициенты в (45), имеем формулу (29). Утверждение доказано.

Выполнив шаг 5 АП, для ВЗЛП (1), (2), (6), (7) имеем такую задачу:

$$U \sum_{j=1}^{k} c_j X_j - M \sum_{\forall \omega \subset J_k} W_\omega \to \max$$

при условиях

$$\left(U - \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{k-j+1} \right) \left(\sum_{j \in \omega} X_j + Y_\omega \right) - \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{k-j+1} \left(\sum_{j \in J_k \setminus \omega} X_j + \sum_{\substack{\Omega \subset J_k \\ |\Omega| \in I \\ \Omega \ne \omega}} Y_\Omega + V \right) - \alpha_{|\omega|} W_\omega = 0$$

$$\forall \omega \subset J_k, \ |\omega| \in I,$$

$$\left(U - \sum_{j=1}^{k} g_j \right) \sum_{j=1}^{k} X_j - \sum_{j=1}^{k} g_j \left(\sum_{\substack{\omega \subset J_k \\ |\omega| \in I}} Y_\omega + V \right) - \alpha_k W_{J_k} = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{k} X_j + \sum_{\substack{\omega \subset J_k \\ |\omega| \in I}} Y_\omega + V + \sum_{\substack{\omega \subset J_k \\ |\omega| \in I}} W_\omega + W_{J_k} = 1,$$

где U, $\alpha_{|\omega|}$, α_k определяются соответственно согласно (26), (28), (29), а связь старых и новых переменных устанавливает формула (27).

Выполнив шаг 5, получаем, что точка $(X^*; Y^*; V^*; W^*) = \left(\frac{1}{N}, \ldots, \frac{1}{N} \right) \subset R^N$ является допустимым решением последней задачи, здесь $N = k + 2 \sum_{|\omega| \in I} C_k^{|\omega|} + 2$.

Сравнивая полученные на шаге 5 ограничения с формулами (23)–(29), видим, что теорема доказана.

4. Иллюстративный пример

Получим симплексную форму перестановочного многогранника для такой задачи. Пусть в (1), (2), (6), (7) $k = 4$, $G = \{0; 1; 2; 2\}$, т.е. $[G] = [1, 1, 2]$. Поскольку $\eta_1 = \eta_2 = 1$, $\eta_3 = \eta_n = 2$ и $k - \eta_1 - 1 = 4 - 1 - 1 = 2$, то $I = J_3 \setminus ((J_2 \setminus \{1\}) \cup$ $\cup (J_2 \setminus J_2)) = J_3 \setminus \{2\} = \{1, 3\}$.

Запишем функцию цели:

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 \to \max$$

и в ВЗЛП систему (6), (7) в таком виде:

$$\begin{cases} x_1 \le 2, \\ x_2 \le 2, \\ x_3 \le 2, \\ x_4 \le 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 5, \\ x_1 + x_2 + x_4 \le 5, \\ x_1 + x_3 + x_4 \le 5, \\ x_2 + x_3 + x_4 \le 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$$

После приведения системы к каноническому виду (шаг 1) получим

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = 2, \\ x_2 + y_2 = 2, \\ x_3 + y_3 = 2, \\ x_4 + y_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + y_{123} = 5, \\ x_1 + x_2 + x_4 + y_{124} = 5, \\ x_1 + x_3 + x_4 + y_{134} = 5, \\ x_2 + x_3 + x_4 + y_{234} = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$$

Введем дополнительное ограничение (шаг 2) в таком виде:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_{123} + y_{124} + y_{134} + y_{234} \le U.$$

На этом же шаге сводим введенное ограничение к равенству, добавляя дополнительную неотрицательную переменную u в левую часть:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_{123} + y_{124} + y_{134} + y_{234} + u = U, \tag{48}$$

где согласно (26) $U = 21$.

Далее (шаг 3) преобразовываем систему уравнений к однородной, умножив правую часть уравнений системы на равное единице выражение:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_{123} + y_{124} + y_{134} + y_{234} + u}{U}.$$

Таким образом, после приведения подобных выражений запишем

$$\left(1 - \frac{2}{U}\right)(x_1 + y_1) - \frac{2}{U}(x_2 + x_3 + x_4 + y_2 + y_3 + y_4 + y_{123} + y_{124} + y_{134} + y_{234} + u) = 0,$$

$$\left(1 - \frac{2}{U}\right)(x_2 + y_2) - \frac{2}{U}(x_1 + x_3 + x_4 + y_1 + y_3 + y_4 + y_{123} + y_{124} + y_{134} + y_{234} + u) = 0,$$

$$\left(1 - \frac{2}{U}\right)(x_3 + y_3) - \frac{2}{U}(x_1 + x_2 + x_4 + y_1 + y_2 + y_4 + y_{123} + y_{124} + y_{134} + y_{234} + u) = 0,$$

$$\left(1-\frac{2}{U}\right)(x_4+y_4)-\frac{2}{U}(x_1+x_2+x_3+y_1+y_2+y_3+y_{123}+y_{124}+y_{134}+y_{234}+u)=0,$$

$$\left(1-\frac{2}{U}\right)(x_1+x_2+x_3+y_{123})-\frac{5}{U}(x_4+y_1+y_2+y_3+y_4+y_{124}+y_{134}+y_{234}+u)=0,$$

$$\left(1-\frac{2}{U}\right)(x_1+x_2+x_4+y_{124})-\frac{5}{U}(x_3+y_1+y_2+y_3+y_4+y_{123}+y_{134}+y_{234}+u)=0,$$

$$\left(1-\frac{5}{U}\right)(x_1+x_3+x_4+y_{134})-\frac{5}{U}(x_2+y_1+y_2+y_3+y_4+y_{123}+y_{124}+y_{234}+u)=0,$$

$$\left(1-\frac{5}{U}\right)(x_2+x_3+x_4+y_{234})-\frac{5}{U}(x_1+y_1+y_2+y_3+y_4+y_{123}+y_{124}+y_{134}+u)=0,$$

$$\left(1-\frac{5}{U}\right)(x_1+x_2+x_3+x_4)-\frac{5}{U}(y_1+y_2+y_3+y_4+y_{123}+y_{124}+y_{134}+y_{234}+u)=0.$$

Вводя новые переменные $X_j=\frac{x_j}{U},\ Y_i=\frac{y_i}{U},\ \frac{u}{U}=V$ в последней системе и в уравнении (48) (шаг 4), получаем симплексную форму заданного перестановочного многогранника:

$$(U-2)(X_1+Y_1)-2(X_2+X_3+X_4+Y_2+Y_3+Y_4+Y_{123}+Y_{124}+Y_{134}+Y_{234}+V)=0,$$

$$(U-2)(X_2+Y_2)-2(X_1+X_3+X_4+Y_1+Y_3+Y_4+Y_{123}+Y_{124}+Y_{134}+Y_{234}+V)=0,$$

$$(U-2)(X_3+Y_3)-2(X_1+X_2+X_4+Y_1+Y_2+Y_4+Y_{123}+Y_{124}+Y_{134}+Y_{234}+V)=0,$$

$$(U-2)(X_4+Y_4)-2(X_1+X_2+X_3+Y_1+Y_2+Y_3+Y_{123}+Y_{124}+Y_{134}+Y_{234}+V)=0,$$

$$(U-5)(X_1+X_2+X_3+Y_{123})-5(X_4+Y_1+Y_2+Y_3+Y_4+Y_{124}+Y_{134}+Y_{234}+V)=0,$$

$$(U-5)(X_1+X_2+X_4+Y_{124})-5(X_3+Y_1+Y_2+Y_3+Y_4+Y_{123}+Y_{134}+Y_{234}+V)=0,$$

$$(U-5)(X_1+X_3+X_4+Y_{134})-5(X_2+Y_1+Y_2+Y_3+Y_4+Y_{123}+Y_{124}+Y_{234}+V)=0,$$

$$(U-5)(X_2+X_3+X_4+Y_{234})-5(X_1+Y_1+Y_2+Y_3+Y_4+Y_{123}+Y_{124}+Y_{134}+V)=0,$$

$$(U-5)(X_1+X_2+X_3+X_4)-5(Y_1+Y_2+Y_3+Y_4+Y_{123}+Y_{124}+Y_{134}+Y_{234}+V)=0,$$

$$X_1+X_2+X_3+X_4+Y_1+Y_2+Y_3+Y_4+Y_{123}+Y_{124}+Y_{134}+Y_{234}+V=1.$$

На шаге 5 из каждого из $r=9$ однородных уравнений вычтем неотрицательную переменную $W_\omega,\ \omega\subset J_k$, с коэффициентом $\alpha_i,\ i\in J_k$, равным алгебраической сумме всех коэффициентов левой части уравнения. Эти же переменные прибавим к целевой функции с коэффициентом $-M$. Их же добавляем в последнее равенство. Функция цели с учетом этого и замены переменных преобразуется к виду

$$U(c_1X_1+c_2X_2+c_3X_3+c_4X_4)-$$
$$-M(W_1+W_2+W_3+W_4+W_{123}+W_{124}+W_{134}+W_{234}+W_{1234})\to\max,$$

а система ограничений —

$$(U-2)(X_1+Y_1)-2(X_2+X_3+X_4+Y_2+Y_3+Y_4+Y_{123}+Y_{124}+Y_{134}+Y_{234}+V)-\alpha_1W_1=0,$$

$$(U-2)(X_2+Y_2)-2(X_1+X_3+X_4+Y_1+Y_3+Y_4+Y_{123}+Y_{124}+Y_{134}+Y_{234}+V)-\alpha_1W_2=0,$$

$$(U-2)(X_3+Y_3)-2(X_1+X_2+X_4+Y_1+Y_2+Y_4+Y_{123}+Y_{124}+Y_{134}+Y_{234}+V)-\alpha_1 W_3=0,$$

$$(U-2)(X_4+Y_4)-2(X_1+X_2+X_3+Y_1+Y_2+Y_3+Y_{123}+Y_{124}+Y_{134}+Y_{234}+V)-\alpha_1 W_4=0,$$

$$(U-5)(X_1+X_2+X_3+Y_{123})-5(X_4+Y_1+Y_2+Y_3+Y_4+Y_{124}+Y_{134}+Y_{234}+V)-\alpha_3 W_{123}=0,$$

$$(U-5)(X_1+X_2+X_4+Y_{124})-5(X_3+Y_1+Y_2+Y_3+Y_4+Y_{123}+Y_{134}+Y_{234}+V)-\alpha_3 W_{124}=0,$$

$$(U-5)(X_1+X_3+X_4+Y_{134})-5(X_2+Y_1+Y_2+Y_3+Y_4+Y_{123}+Y_{124}+Y_{234}+V)-\alpha_3 W_{134}=0,$$

$$(U-5)(X_2+X_3+X_4+Y_{234})-5(X_1+Y_1+Y_2+Y_3+Y_4+Y_{123}+Y_{124}+Y_{134}+V)-\alpha_3 W_{234}=0,$$

$$(U-5)(X_1+X_2+X_3+X_4)-5(Y_1+Y_2+Y_3+Y_4+Y_{123}+Y_{124}+Y_{134}+Y_{234}+V)-\alpha_4 W_{1234}=0,$$

$$X_1+X_2+X_3+X_4+Y_1+Y_2+Y_3+Y_4+Y_{123}+Y_{124}+Y_{134}+Y_{234}+V+$$

$$+W_1+W_2+W_3+W_4+W_{123}+W_{124}+W_{134}+W_{1234}+W_{234}=1.$$

Используя формулы (28), (29) или непосредственно по уравнениям, определяем значения коэффициентов:

$$\alpha_1=16,\ \alpha_3=19,\ \alpha_4=19.$$

Таким образом, симплексная форма перестановочного многогранника, образованного перестановкой элементов мультимножества $G=\{0;1;2;2\}$, имеет вид

$$19(X_1+Y_1)-2(X_2+X_3+X_4+Y_2+Y_3+Y_4+Y_{123}+Y_{124}+Y_{134}+Y_{234}+V)-16W_1=0,$$

$$19(X_2+Y_2)-2(X_1+X_3+X_4+Y_1+Y_3+Y_4+Y_{123}+Y_{124}+Y_{134}+Y_{234}+V)-16W_2=0,$$

$$19(X_3+Y_3)-2(X_1+X_2+X_4+Y_1+Y_2+Y_4+Y_{123}+Y_{124}+Y_{134}+Y_{234}+V)-16W_3=0,$$

$$19(X_4+Y_4)-2(X_1+X_2+X_3+Y_1+Y_2+Y_3+Y_{123}+Y_{124}+Y_{134}+Y_{234}+V)-16W_4=0,$$

$$16(X_1+X_2+X_3+Y_{123})-5(X_4+Y_1+Y_2+Y_3+Y_4+Y_{124}+Y_{134}+Y_{234}+V)-19W_{123}=0,$$

$$16(X_1+X_2+X_4+Y_{124})-5(X_3+Y_1+Y_2+Y_3+Y_4+Y_{123}+Y_{134}+Y_{234}+V)-19W_{124}=0,$$

$$16(X_1+X_3+X_4+Y_{134})-5(X_2+Y_1+Y_2+Y_3+Y_4+Y_{123}+Y_{124}+Y_{234}+V)-19W_{134}=0,$$

$$16(X_2+X_3+X_4+Y_{234})-5(X_1+Y_1+Y_2+Y_3+Y_4+Y_{123}+Y_{124}+Y_{134}+V)-19W_{234}=0,$$

$$16(X_1+X_2+X_3+X_4)-5(Y_1+Y_2+Y_3+Y_4+Y_{123}+Y_{124}+Y_{134}+Y_{234}+V)-19W_{1234}=0,$$

$$X_1+X_2+X_3+X_4+Y_1+Y_2+Y_3+Y_4+Y_{123}+Y_{124}+Y_{134}+Y_{234}+V+$$

$$+W_1+W_2+W_3+W_4+W_{123}+W_{124}+W_{134}+W_{234}+W_{1234}=1.$$

Отметим, что $N=4+2(C_4^1+C_4^3)+2=22$, что равно количеству переменных в симплексной форме перестановочного многогранника.

Заключение

Здесь получена симплексная форма общего перестановочного многогранника, заданного неприводимой системой линейных ограничений. Получение симплексной формы общего перестановочного многогранника является актуальным, поскольку эта форма может использоваться в методах решения комбинаторных оптимизационных задач. Как направление дальнейших исследований интересно изучить трансформацию множества перестановок и его выпуклой оболочки при переходе к ее симплексной форме.

О.О. Ємець, М.В. Леонова

СИМПЛЕКСНА ФОРМА ЗАГАЛЬНОГО ПЕРЕСТАВНОГО МНОГОГРАННИКА, ЗАДАНОГО НЕЗВІДНОЮ СИСТЕМОЮ

Одержано симплексну форму загального переставного многогранника, заданого незвідною системою лінійних обмежень, за допомогою перетворення його з використанням алгоритму перетворення задачі лінійного програмування в стандартній формі до вигляду, необхідного для застосування алгоритму Кармаркара. Розглянуто ілюстративний приклад.

O.A. Iemets, M.V. Leonova

SIMPLEX SHAPE OF GENERAL PERMUTATIONAL POLYHEDRON, GIVEN BY IRREDUCIBLE SYSTEM

The simplex shape of general permutational polyhedron, given by irreducible system of linear constraints by converting it using an algorithm converting the linear programming problem in standard form to the form required for applying the Karmarkar algorithm, is obtained. An illustrative example is considered.

1. *Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф.* Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. — Киев : Наук. думка, 1981. — 288 с.
2. *Стоян Ю.Г., Ємець О.О.* Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. — Київ : Інститут систем досліджень освіти, 1993. — 188 с. — http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/487
3. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. — Киев : Наук. думка, 1986. — 268 с.
4. *Стоян Ю.Г., Ємець О.О., Ємець Є.М.* Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи. — Полтава : РВЦ ПУСКУ, 2005. — 103 с. — http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/376.
5. *Ємець О.О., Колєчкіна Л.М., Недобачій С.І.* Дослідження областей визначення задач евклідової комбінаторної оптимізації на переставних множинах. — Полтава : Легат, 1999. — 64 с. — http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/488.
6. *Ємець О.О., Роскладка О.В.* Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах: властивості та розв'язування. — Полтава : РВЦ ПУСКУ, 2006. — 129 с. — http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/377.
7. *Ємець О.О., Колєчкіна Л.М.* Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями. — Київ : Наук. думка, 2005. — 117 с. — http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/474.
8. *Емец О.А., Барболина Т.Н.* Комбинаторная оптимизация на размещениях. — Киев : Наук. думка, 2008. — 159 с. — http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/473.
9. *Емец О.А., Черненко О.А.* Оптимизация дробно-линейных функций на размещениях. — Киев : Наук. думка, 2011. — 154 с. — http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/467
10. *Ємець О.О., Парфьонова Т.О.* Транспортні задачі комбінаторного типу: властивості, розв'язування, узагальнення. — Полтава: ПУЕТ, 2011. — 174 с. — http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/353.
11. *Донець Г.П., Колєчкіна Л.М.* Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях. — Полтава : РВВ ПУЕТ, 2011. — 309 с.
12. *Гуляницький Л.Ф.* Розробка моделей і наближених методів комбінаторної оптимізації та їх застосування в інформаційних технологіях : Автореф. дис. … д-ра техн. наук: 01.05.02. — Київ, 2005. — 32 с.
13. *Гребеннік І.В.* Математичні моделі і методи комбінаторної оптимізації в геометричному проектуванні : Автореф. дис. … д-ра техн. наук: 01.05.02. — Харків, 2006. — 30 с.
14. *Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К.* Многогранники, графы, оптимизация (комбинаторная теория многогранников). — М. : Наука, 1981. — 344 с.
15. *Ємець О.О., Недобачій С.І.* Загальний переставний многогранник: незвідна система лінійних обмежень та рівняння всіх гіперграней // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 1998. — № 1 (2). — С. 100–106.
16. *Зайченко Ю.П.* Исследование операций: Учебн. — Киев : Видавничий дім «Слово», 2003. — 688 с.
17. *Таха Х.А.* Введение в исследование операций. — М. : Издательский дом «Вильямс», 2005. — 912 с.
18. *Ємець О.О., Ємець Є.М., Ольховський Д.М.* Оптимізація лінійної функції на переставленнях: перетворення переставного многогранника до вигляду, необхідного для використання в алгоритмі Кармаркара // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2010. — № 2. — С. 43–49.
19. *Ермольев Ю.М., Ляшко И.И., Михалевич В.С., Тюптя В.И.* Математические методы исследования операций: Учебн. пособие для вузов. — Киев : Вища шк., 1979. — 312 с.

Получено 25.12.2012