

УДК 550:531; 681.51

*Н.В. Ефименко*

**СИНТЕЗ АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ  
ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕОРИЕНТАЦИЕЙ  
КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА  
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИНАМИЧЕСКИХ  
УРАВНЕНИЙ ВРАЩАТЕЛЬНОГО  
ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА  
В ПАРАМЕТРАХ РОДРИГА–ГАМИЛЬТОНА**

**Введение**

Задачи переориентации космического аппарата (КА) представляют собой задачи управления угловым движением корпуса КА вокруг центра масс. В настоящее время в связи со всевозрастающими требованиями к динамическим характеристикам пространственных маневров КА эти задачи очень актуальны. Разворот должен происходить из любого текущего положения в заданное. При этом точность ориентации в развернутом положении должна составлять единицы угловых минут, а угловые скорости разворота могут достигать 2–3 град/с. Например, французский КА для получения снимков земной поверхности высокого разрешения Spot-7, выведенный на орбиту 30 июня 2014 года, обеспечивает следующие динамические характеристики пространственных маневров:

- точность ориентации — 1,7 угл. мин;
- максимальная скорость разворота — 2,1 град/с.

Для обеспечения таких высоких динамических характеристик базовый такт системы управления должен быть не более 50 мс. Это условие накладывает ограничения и на алгоритмы переориентации. С одной стороны, они должны быть очень простыми, чтобы время, затрачиваемое на расчет управляющего воздействия, было минимальным. С другой стороны, они должны обеспечить высокие динамические характеристики, что, как правило, невозможно в классе простых алгоритмов. В связи с этим решение задачи синтеза алгоритмов переориентации КА ищется как решение оптимизационной задачи. Существует достаточно много работ, посвященных вопросам построения оптимальных алгоритмов переориентации КА [1–14]. В большинстве из этих работ в качестве математической модели углового движения КА используется модель, в которой динамика описывается уравнением Эйлера, а кинематика — уравнением для кватерниона.

При использовании такой модели для решения задачи оптимального пространственного разворота достаточно легко получить уравнения двухточечной краевой задачи, но найти аналитическое решение этой задачи, которое определяет

оптимальное управление, за исключением частных случаев, не представляется возможным. Решение (оптимальное управление) можно найти только с использованием численных методов, что не применимо при реализации алгоритмов оптимального управления на борту КА.

Эти трудности можно обойти, если в качестве модели углового движения КА использовать модель, построенную на основе динамических уравнений вращательного движения твердого тела в параметрах Родрига–Гамильтона. В этом случае в качестве компонентов вектора состояния КА применяются параметры Родрига–Гамильтона и их производные. В данной работе получена такая математическая модель углового движения КА и рассмотрены вопросы синтеза алгоритмов переориентации с использованием этой модели.

### Модель углового движения КА в параметрах Родрига–Гамильтона

Рассмотрим спутник как абсолютно твердое тело. В качестве математической модели углового движения КА возьмем систему дифференциальных уравнений вида

$$J\dot{\omega} + \omega \times (J\omega) = M_u, \quad (1)$$

$$2\dot{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^T \\ \omega & -\Phi(\omega) \end{bmatrix} \Lambda, \quad (2)$$

где  $\omega$  — абсолютная угловая скорость вращения КА, заданная проекциями на оси связанной системы координат;  $\Lambda = [\lambda_0 \ \lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3]^T$  — вектор, координатами которого являются параметры Родрига–Гамильтона  $\lambda_i$ ,  $i=0, 1, 2, 3$ , определяющие положение связанной системы координат относительно некоторого неподвижного опорного базиса (для определенности будем считать неподвижный базис инерциальным);  $J$  — тензор инерции КА;  $M_u$  — управляющий момент, создаваемый исполнительными органами системы управления;  $\Phi(x)$  — кососимметрическая матрица векторного произведения  $\Phi(x)y = x \times y$ .

Разрешив уравнение (2) относительно вектора угловой скорости  $\omega$ , получим

$$\omega = 2A(\Lambda)\dot{\Lambda}, \quad (3)$$

где матрица  $A(\Lambda)$  определяется выражением

$$A(\Lambda) = [-\lambda \ \lambda E_3 - \Phi(\lambda)]. \quad (4)$$

Здесь  $E_3$  — единичная матрица размерности  $3 \times 3$ . Для матрицы  $A(\Lambda)$  справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} A(\Lambda)A^T(\Lambda) &= E_3, \\ A(\Lambda)\Lambda &= 0, \\ \dot{A}(\Lambda) &= A(\dot{\Lambda}), \\ \dot{A}(\Lambda)\dot{\Lambda} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Продифференцировав равенство (3), с учетом соотношений (5) уравнение (1) можно записать в виде

$$\dot{\omega} = 2A(\Lambda)\ddot{\Lambda}. \quad (6)$$

Найдем выражение для вектора  $\ddot{\Lambda}$ . Вектор  $\Lambda$  удовлетворяет ограничению

$$\|\Lambda\|^2 = 1. \quad (7)$$

Продифференцировав дважды по времени равенство (7), получим ограничение, которому должен удовлетворять вектор  $\ddot{\Lambda}$

$$\Lambda^T \ddot{\Lambda} + \|\dot{\Lambda}\|^2 = 0. \quad (8)$$

Разрешив уравнение (8) относительно  $\ddot{\Lambda}$ , получим динамическое уравнение для переменной  $\Lambda$  (динамическое уравнение для кватерниона [14])

$$\ddot{\Lambda} = (E_4 - \Lambda \Lambda^T)U - \Lambda \|\dot{\Lambda}\|^2, \quad (9)$$

где  $U \in R^4$  — произвольный вектор. С учетом полученного выражения для переменной  $\ddot{\Lambda}$  и свойств матрицы  $A(\Lambda)$  уравнение (6) можно записать следующим образом:

$$\dot{\omega} = 2A(\Lambda)U \quad (10)$$

или

$$J\dot{\omega} = 2JA(\Lambda)U = -\omega \times (J\omega) + M_u. \quad (11)$$

Из равенства (11) имеем

$$M_u = 2JA(\Lambda)U + \omega \times (J\omega). \quad (12)$$

Уравнение (9), так же как и уравнения (1), (2), описывает угловое движение КА относительно центра масс. При этом в качестве вектора состояния используется вектор параметров Родрига–Гамильтона (кватернион), определяющий ориентацию КА в инерциальной системе координат, и его производная. В этом уравнении вектор  $U \in R^4$  является вектором управления. Между моделью углового движения КА, описываемой уравнениями (1), (2), и моделью углового движения КА в виде уравнения (9) существует взаимное соответствие, определяемое выражениями

$$\omega = 2A(\Lambda)\dot{\Lambda}, \quad (13)$$

$$J^{-1}[M_u - \omega \times (J\omega)] = 2A(\Lambda)U, \quad (14)$$

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}A^T(\Lambda)\omega, \quad (15)$$

$$U = \frac{1}{2}A^T(\Lambda)J^{-1}[M_u - \omega \times (J\omega)]. \quad (16)$$

Матрицу  $A(\Lambda)$ , которая входит в выражения (13)–(16), можно рассматривать как оператор отображения четырехмерного пространства в трехмерное пространство:  $R^4 \xrightarrow{A} R^3$ . Обратное отображение при этом определяется матрицей  $A^T(\Lambda): R^3 \xrightarrow{A^T} R^4$ . Тогда соотношениям (13)–(16) соответствуют следующие отображения:

$$\dot{\Lambda} \xrightarrow{2A} \omega,$$

$$U \xrightarrow{2A} J^{-1}[M_u - \omega \times (J\omega)],$$

$$\omega \xrightarrow{\frac{1}{2}A^T} \dot{\Lambda},$$

$$J^{-1}[M_u - \omega \times (J\omega)] \xrightarrow{\frac{1}{2}A^T} U.$$

Модель углового движения КА, определяемая уравнениями (1), (2), представляет собой модель, в которой уравнения динамики записаны в пространстве  $R^3$ , а кинематические уравнения — в пространстве  $R^4$ . Уравнение (9) представляет собой модель углового движения КА, в которой уравнения динамики и кинематики записаны в пространстве  $R^4$ . При этом отображению подвергается и правая часть уравнения (1). Так как отображение, определяемое матрицей  $A^T(\Lambda)$ , обратимо, можно синтезировать законы управления, используя модель (9), а затем с помощью отображения  $U \xrightarrow{2A} J^{-1}[M_u - \omega \times (J\omega)]$  вернуться в пространство  $R^3$  и по формуле (12) найти физически реализуемый управляющий момент  $M_u$ . Следует отметить, что аналогичная модель получена в работе [15]. Однако в этой работе, вместо отображения правой части уравнения (1) в вектор  $U \in R^4$ , используется подход, при котором правые части уравнения (1) выражаются непосредственно через параметры Родрига–Гамильтона, в результате чего модель становится нелинейной и ее применение для синтеза управления затруднительно.

В общем случае уравнение (9) представляет собой уравнение движения точки по единичной сфере в пространстве  $R^n$

$$\ddot{X}_0 = (E_n - X_0^T X_0) f - X_0 \|\dot{X}_0\|^2, \quad X_0 \in R^n, \quad |X_0| = 1. \quad (17)$$

Вектор  $f \in R^n$  по аналогии с вектором  $U \in R^4$  здесь рассматривается как вектор управления. Для уравнения (17) справедливы следующие утверждения.

**Утверждение 1.** Пусть в пространстве  $R^n$  задана точка с координатами  $X(t)$ , движение которой описывается нелинейным дифференциальным уравнением вида

$$X^{(m)} = F(X, \dot{X}, \ddot{X}, \dots, X^{(m-1)}, \theta), \quad m = 2, 3, \dots,$$

и вектор  $\theta \in R^n$  является вектором управления. Тогда движение проекции этой точки на единичную сферу в пространстве  $R^n$  описывается уравнением

$$\ddot{X}_0 = (E_n - X_0^T X_0) f - X_0 \|\dot{X}_0\|^2,$$

$$f = \frac{\ddot{X}}{\delta} - 2 \frac{\dot{\delta}}{\delta} \dot{X}_0 + \alpha X_0,$$

$$\delta^2 = X^T X,$$

$$\dot{\delta} = X_0^T \dot{X},$$

где  $\alpha$  — произвольная скалярная функция.

**Утверждение 2.** Пусть на единичной сфере в пространстве  $R^n$  задана точка  $X_0(t)$ , движение которой описывается уравнением

$$\ddot{X}_0 = (E_n - X_0 X_0^T) f - X_0 \|\dot{X}_0\|^2.$$

Обозначим

$$\Theta = (E_n - X_0 X_0^T) f - X_0 \|\dot{X}_0\|^2$$

ускорение движения точки по сфере. Тогда векторы  $\Theta$  и  $f$  связаны соотношением

$$f = \Theta + \alpha X_0,$$

где  $\alpha$  — произвольная скалярная функция.

Доказательства утверждений приведены в приложениях 1 и 2.

При построении управления утверждение 1 позволяет заменить уравнение движения по сфере, где наложено ограничение на координаты, уравнением движения в пространстве  $R^n$  без ограничений, которое, как правило, проще уравнения движения по сфере. Для модели без ограничений на координаты ищется аналитическое решение задачи оптимального управления. Затем строится управление, обеспечивающее заданное движение по сфере.

Утверждение 2 позволяет представить уравнение ошибки управления в виде разделенной системы из  $n$  интегрирующих звеньев второго порядка вида

$$\ddot{e}_i = \Delta\Theta_i \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (18)$$

Здесь  $e = X_0 - X_0^*$  — ошибка управления;  $X_0$  — текущее положение точки на сфере (текущая траектория);  $X_0^*$  — требуемое положение точки на сфере (программная траектория);  $\Delta\Theta = \Theta - \Theta^*$  — ошибка по ускорению;  $\ddot{X}_0 = \Theta$  — текущее ускорение точки;  $\ddot{X}_0^* = \Theta^*$  — требуемое ускорение точки (программное ускорение).

Так как уравнение (18) имеет очень простой вид, для него можно найти аналитическое решение любой задачи оптимального управления (найти  $\Delta\Theta$ ).

Затем, используя соотношение  $f = \Theta + \alpha X_0$  и приняв  $\alpha \equiv 0$ , так как  $\alpha$  — произвольная скалярная функция, находим требуемое управление

$$f = \Theta^* + \Delta\Theta.$$

В качестве примера использования динамических уравнений в параметрах Родрига–Гамильтона в задачах управления угловым движением спутника рассмотрим задачу переориентации космического аппарата из текущего углового положения в заданное угловое положение за указанное время.

### **Синтез алгоритма переориентации космического аппарата из текущего углового положения в заданное угловое положение за фиксированное время**

**Постановка задачи.** Найти закон управления  $M_u(t)$ , обеспечивающий переориентацию КА из текущего углового положения  $\Lambda(t_0)$ ,  $\dot{\Lambda}(t_0)$  в момент времени  $t_0$  в требуемое угловое положение  $\Lambda(t_1)$ ,  $\dot{\Lambda}(t_1)$  в момент времени  $t_1$ . Моменты времени  $t_0$  и  $t_1$  заданы.

Для решения поставленной задачи рассмотрим следующее дифференциальное уравнение

$$X^{(m)} = \theta, \quad m = 2, 3, \dots \quad (19)$$

Будем полагать, что для вектора  $X$  и его производных до  $m-1$  порядка включительно заданы граничные условия для фиксированных моментов времени  $t_0$  и  $t_1$ . Причем граничные условия заданы таким образом, что выполняются условия

$$X(t_0) = \Lambda(t_0),$$

$$\dot{X}(t_0) = \dot{\Lambda}(t_0),$$

$$X^{(k)}(t_0) = 0, \quad k = 2, 3, \dots, m-1,$$

$$X(t_1) = \Lambda(t_1),$$

$$\dot{X}(t_1) = \dot{\Lambda}(t_1),$$

$$X^{(k)}(t_1) = 0, \quad k = 2, 3, \dots, m-1.$$

Вектор  $X$  можно рассматривать как ненормированный кватернион, значения которого в моменты времени  $t_0$  и  $t_1$  совпадают со значениями вектора  $\Lambda$  (нормированного кватерниона), определяющего ориентацию КА в инерциальной системе координат. В пространстве состояний уравнение (19) имеет вид

$$\dot{Z} = FZ + G\theta.$$

Здесь

$$Z = \begin{bmatrix} X \\ \dot{X} \\ \ddot{X} \\ \vdots \\ X^{(m-1)} \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & E_{nm} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F \in R^{nm \times mn},$$

$$G = [0 \ E_{nm}]^T, \quad G \in R^{nm \times n},$$

$E_{nm}$  — единичная матрица размерности  $n \times m$ . Следует заметить, что эта система уравнений очень простая и для нее существуют аналитические решения практически всех задач оптимального управления.

Рассмотрим следующую оптимизационную задачу: найти вектор управления  $\theta$ , переводящий вектор  $Z$  из состояния  $Z(t_0)$  в состояние  $Z(t_1)$  и обеспечивающий минимум функционалу

$$V = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \theta^T \theta dt.$$

Воспользуемся принципом максимума [16]. Для рассматриваемой задачи гамильтониан равен

$$H = \frac{1}{2} \theta^T \theta + \mu^T (FZ + G\theta).$$

Необходимые условия оптимальности имеют вид

$$\frac{\partial H}{\partial \mu} = \dot{Z},$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = -\dot{\mu},$$

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0.$$

Взяв необходимые производные, получим уравнения краевой задачи в виде расширенной системы

$$\dot{Y} = DY,$$

где

$$D = \begin{bmatrix} F & -GG^T \\ 0 & -F^T \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} Z \\ \mu \end{bmatrix}, \quad Z, \mu \in R^{nm}.$$

Решение этой системы имеет вид

$$Z(t) = \Phi_{11}(t, t_0)Z(t_0) + \Phi_{12}(t, t_0)\mu_0,$$

$$\mu(t) = \Phi_{22}(t, t_0)\mu_0,$$

где  $\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix}$  — переходная матрица расширенной системы. Для заданных краевых условий  $Z(t_0)$  и  $Z(t_1)$  начальное значение  $\mu_0$  сопряженного вектора  $\mu$  определяется выражением

$$\mu_0 = \Phi_{12}^{-1}(t_1, t_0)[Z(t_1) - \Phi_{11}(t_1, t_0)Z(t_0)].$$

При этом оптимальное управление  $\theta$  и оптимальные траектории движения для вектора  $X$  и его первой и второй производных определяются формулами

$$\theta = -\mu_m,$$

$$X = z_1,$$

$$\dot{X} = z_2,$$

$$\ddot{X} = z_3.$$

Согласно утверждению 1 управление  $U^*$ , обеспечивающее переориентацию спутника из положения  $\Lambda(t_0)$ ,  $\dot{\Lambda}(t_0)$  в требуемое угловое положение  $\Lambda(t_1)$ ,  $\dot{\Lambda}(t_1)$  за время  $\Delta t = t_1 - t_0$ , примет вид

$$U^* = \frac{\Psi}{\delta} - 2\frac{\delta}{\delta} \dot{\Lambda}^*,$$

где

$$\Psi = \ddot{X} = z_3,$$

$$\Lambda^* = \frac{X}{\delta} = \frac{z_1}{\delta},$$

$$\delta = \|X(t)\| = \|z_1\|,$$

$$\dot{\delta}(t) = \Lambda^{*\Gamma}(t) \dot{X}(t) = \Lambda^{*\Gamma}(t) z_2,$$

$$\dot{\Lambda}^{*\Gamma}(t) = (E_4 - \Lambda^* \Lambda^{*\Gamma}(t)) \frac{\dot{X}}{\delta} = (E_4 - \Lambda^* \Lambda^{*\Gamma}(t)) \frac{z_2}{\delta}.$$

Построенное таким образом управление является программным. При таком управлении КА будет двигаться по некоторой траектории  $\Lambda$ , отличной от программной траектории  $\Lambda^*$ . Это обусловлено ошибками реализации программного управления и наличием возмущающих моментов, действующих на КА. Для стабилизации программной траектории необходимо добавить стабилизирующее управление в виде обратной связи по состоянию. Для нахождения этого управления рассмотрим уравнение ошибки управления

$$\ddot{e} = \ddot{\Lambda} - \ddot{\Lambda}^* = \Theta - \Theta^* = \Delta\Theta. \quad (20)$$

Определим  $\Delta\Theta$  следующим образом:

$$\Delta\Theta = -K_1 e - K_2 \dot{e} = -K_1(\Lambda - \Lambda^*) - K_2(\dot{\Lambda} - \dot{\Lambda}^*),$$

где

$$K_1 = \text{diag}(k_{i1}), \quad K_2 = \text{diag}(k_{i2}), \quad i=1, 2, \dots, 4.$$

При таком выборе  $\Delta\Theta$  система (20) представляет собой разделенную систему из 4 интегрирующих звеньев второго порядка. Для  $i$ -го звена ( $i=1, 2, \dots, 4$ ) можно записать уравнение

$$\ddot{e}_i = -k_{i1}e_i - k_{i2}\dot{e}_i, \quad (21)$$

а коэффициенты  $k_{i1}$  и  $k_{i2}$  найти по следующим формулам:

$$k_{i1} = s_{i1}s_{i2}, \quad k_{i2} = -(s_{i1} + s_{i2}),$$

где  $s_{i1}$  и  $s_{i2}$  — корни характеристического уравнения системы (21). При этом управление  $U$  согласно утверждению 2 примет вид

$$U = -K_1 e - K_2 \dot{e} + U^*.$$

Таким образом, оптимальный алгоритм управления  $M_u(t)$ , обеспечивающий переориентацию КА из текущего углового положения  $\Lambda(t_0)$ ,  $\dot{\Lambda}(t_0)$  в момент времени  $t_0$  в требуемое угловое положение  $\Lambda(t_1)$ ,  $\dot{\Lambda}(t_1)$  в момент времени  $t_1$ , имеет вид

$$Z(t) = \Phi_{11}(t, t_0)Z(t_0) + \Phi_{12}(t, t_0)\mu_0,$$

$$\mu_0 = \Phi_{12}^{-1}(t_1, t_0)[Z(t_1) - \Phi_{11}(t_1, t_0)Z(t_0)],$$

$$\mu(t) = \Phi_{22}(t, t_0)\mu_0,$$

$$z_1(t_0) = \Lambda(t_0), \quad z_2(t_0) = \dot{\Lambda}(t_0), \quad z_{k+1}(t_0) = 0, \quad k = 2, 3, \dots, m-1,$$

$$z_1(t_1) = \Lambda(t_1), \quad z_2(t_1) = \dot{\Lambda}(t_1), \quad z_{k+1}(t_1) = 0, \quad k = 2, 3, \dots, m-1,$$

$$\Psi = \ddot{X} = z_3, \quad \Lambda^* = \frac{X}{\delta} = \frac{z_1}{\delta},$$

$$\delta = \|X(t)\| = \|z_1\|, \quad \dot{\delta}(t) = \Lambda^{*\Gamma}(t)\dot{X}(t) = \Lambda^{*\Gamma}(t)z_2,$$

$$\dot{\Lambda}^* = (E_4 - \Lambda^* \Lambda^{*\Gamma}) \frac{\dot{X}}{\delta} = (E_4 - \Lambda^* \Lambda^{*\Gamma}) \frac{z_2}{\delta},$$

$$U^* = \frac{\Psi}{\delta} - 2 \frac{\dot{\delta}}{\delta} \dot{\Lambda}^*,$$

$$K_1 = \text{diag}(k_{i1}), \quad K_2 = \text{diag}(k_{i2}), \quad k_{i1} = s_{i1}s_{i2}, \quad k_{i2} = -(s_{i1} + s_{i2}),$$

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2} A^\Gamma(\Lambda)\omega,$$

$$e = \Lambda - \Lambda^*, \quad \dot{e} = \dot{\Lambda} - \dot{\Lambda}^*,$$

$$U = -K_1 e - K_2 \dot{e} + U^*,$$

$$M_u = 2JA(\Lambda)U + \omega \times (J\omega).$$



### Результаты численного моделирования

Для проверки полученных теоретических результатов проведено численное моделирование работы предложенного алгоритма. Моделировался разворот спутника относительно инерциальной системы координат. При этом время разворота выбрано равным 60 с. Начальное угловое положение КА и угловые скорости следующие:  $\Lambda(t_0)=[0,6709 \ -0,0772 \ -0,1628 \ -0,7193]$ ,  $\omega(t_0)=[0 \ 0 \ 0]$ . После разворота параметры углового движения КА должны быть такими:  $\Lambda(t_1)=[0,6667 \ 0,1222 \ -0,3230 \ -0,6603]$ ,  $\omega(t_1)=[0 \ 0,00093 \ -0,00053]$ . Выбранные значения параметров ориентации соответствуют развороту КА в инерциальной системе координат по крену на угол 30 градусов. Моделировалась работа двух алгоритмов:  $m = 2$  и  $m = 3$ .

Матрицы  $\Phi_{11}(t, t_0)$ ,  $\Phi_{12}(t, t_0)$ ,  $\Phi_{22}(t, t_0)$ , входящие в алгоритм переориентации, имеют такой вид:

для  $m = 2$

$$\Phi_{11}(t, t_0) = \begin{bmatrix} E_4 & E_4(t-t_0) \\ 0 & E_4 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{12}(t, t_0) = \begin{bmatrix} E_4 \frac{(t-t_0)^3}{6} & -E_4 \frac{(t-t_0)^2}{2} \\ E_4 \frac{(t-t_0)^2}{2} & -E_4(t-t_0) \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{22}(t, t_0) = \begin{bmatrix} E_4 & 0 \\ -E_4(t-t_0) & E_4 \end{bmatrix},$$

для  $m = 3$

$$\Phi_{11}(t, t_0) = \begin{bmatrix} E_4 & E_4(t-t_0) & E_4 \frac{(t-t_0)^2}{2} \\ 0 & E_4 & E_4(t-t_0) \\ 0 & 0 & E_4 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{12}(t, t_0) = \begin{bmatrix} -E_4 \frac{(t-t_0)^5}{120} & E_4 \frac{(t-t_0)^4}{24} & -E_4 \frac{(t-t_0)^3}{6} \\ -E_4 \frac{(t-t_0)^4}{24} & E_4 \frac{(t-t_0)^3}{6} & -E_4 \frac{(t-t_0)^2}{2} \\ -E_4 \frac{(t-t_0)^3}{6} & E_4 \frac{(t-t_0)^2}{2} & -E_4(t-t_0) \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{22}(t, t_0) = \begin{bmatrix} E_4 & 0 & 0 \\ -I(t-t_0) & E_4 & 0 \\ E_4 \frac{(t-t_0)^2}{2} & -E_4(t-t_0) & E_4 \end{bmatrix}.$$

На рис. 1–3 приведены результаты моделирования работы этого алгоритма при значении  $m = 2$ .

Результаты моделирования работы этого алгоритма при значении  $m = 3$  представлены на рис. 4–6.

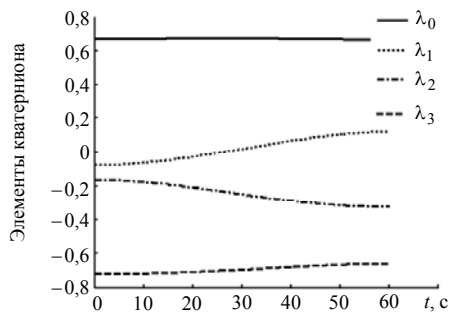


Рис. 1

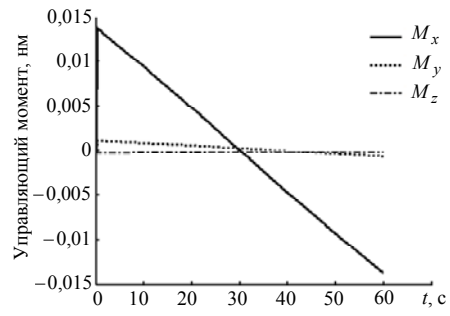


Рис. 2

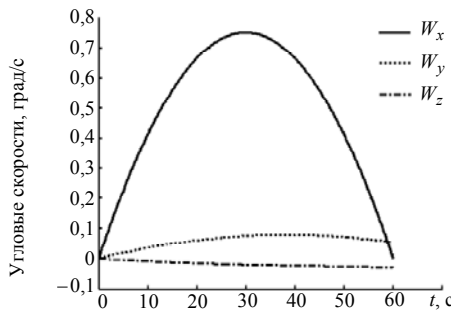


Рис. 3

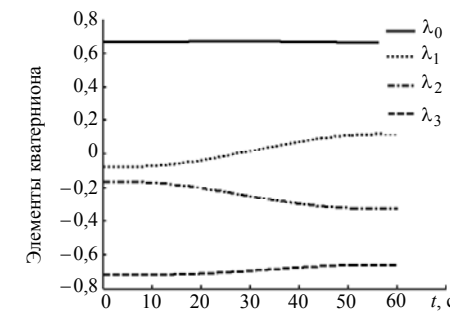


Рис. 4

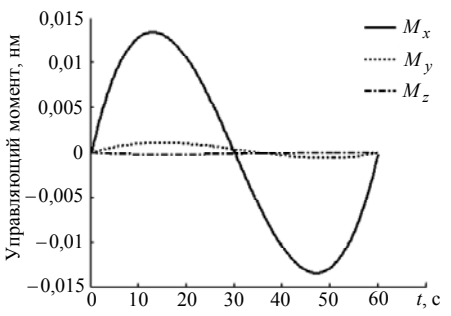


Рис. 5

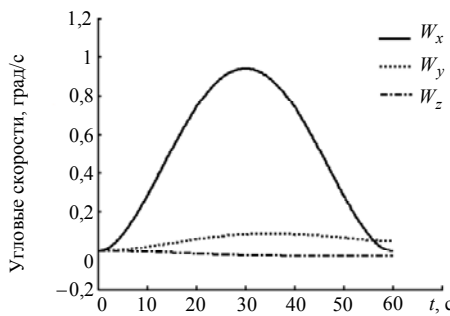


Рис. 6

Из рис. 1–3 видно, что в алгоритме второго порядка (значение  $m = 2$ ) управляющий момент представляет собой линейную функцию времени и на концах траектории разворота принимает свои предельные значения. Это приводит к тому, что при переходе в режим стабилизации относительно развернутого положения управление претерпевает разрыв и в системе возникает переходный процесс, на парирование которого необходимо дополнительное время, что не всегда допустимо. В алгоритме третьего порядка (значение  $m = 3$ ) разрыва управляющего момента нет. Это обусловлено тем, что при значении  $m \geq 3$  величины управляющего момента на концах траектории задаются в виде граничных условий для переменной  $z_3(t)$ , в результате чего в системе нет дополнительного переходного процесса.

### Результаты экспериментальной проверки предложенных алгоритмов в составе систем управления КА «Egypatsat-1» и «Сич-2»

На основе предложенного способа построения алгоритмов переориентации реализован режим программных поворотов (РПП) космических аппаратов «Egypatsat-1» и «Сич-2». В КА «Egypatsat-1» для этого использовался алгоритм второго порядка ( $m = 2$ ), а в КА «Сич-2» — алгоритм третьего порядка ( $m = 3$ ). Ниже приводятся результаты летных испытаний этих режимов.

**Результаты летных испытаний РПП КА «Egypatsat-1».** Приведенные результаты получены при выполнении РПП на витке № 443. Полетное задание РПП

для этого витка было следующим: развернуться по каналу крена на угол  $35^\circ$ , по каналу рыскания — на угол  $-3^\circ$ , произвести съемку и вернуться в режим орбитальной ориентации. На рис. 7, 8 приведены соответственно графики изменения углов ориентации и угловых скоростей в процессе маневров. На рис. 9 приведен график изменения управляющих моментов.

**Результаты летных испытаний РПП КА «Сич-2».** На рис. 10, 11 приведены результаты для витка № 630. Полетное задание при этом было следующим: угол крена —  $1,44882^\circ$ , угол тангажа —  $34,5079^\circ$ , угол рыскания —  $-2,01134^\circ$ . На рис. 10, 11 приведены графики изменения углов ориентации и угловых скоростей в процессе маневров. На рис. 12 приведен график изменения управляющих моментов.

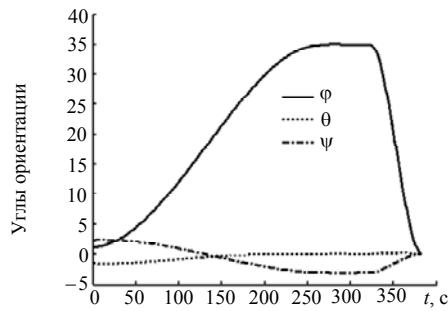


Рис. 7

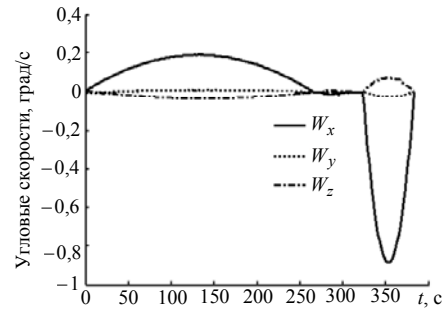


Рис. 8

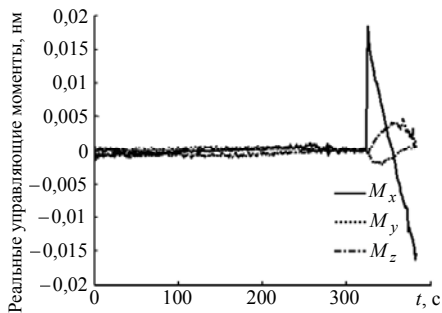


Рис. 9

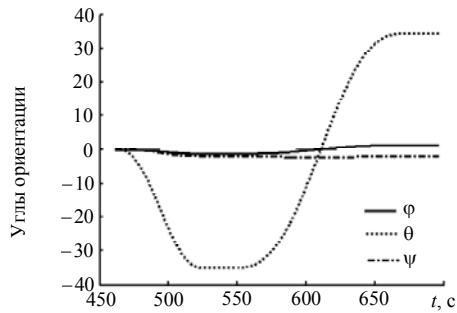


Рис. 10

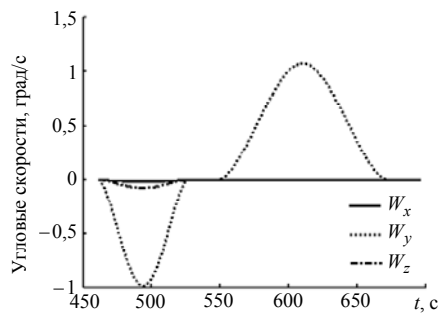


Рис. 11

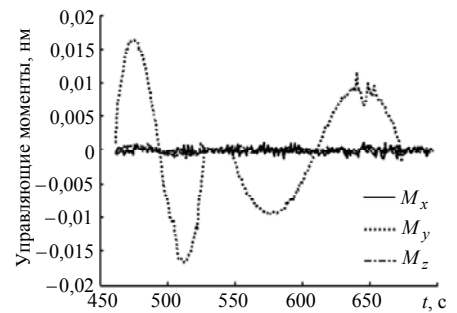


Рис. 12

### Заключение

Предложена методика синтеза алгоритмов пространственной переориентации КА за заданный интервал времени. В отличие от классической постановки, методика не накладывает никаких ограничений на класс угловых движений КА. Предлагаемый подход на основе принципа максимума позволяет получить аналитическое решение задачи пространственной оптимальной переориентации космического аппарата. Методика прошла экспериментальную проверку. На базе предложенного подхода реализованы режимы программных поворотов космических ап-

паратов «Egypstsat-1» и «Сич-2». В космическом аппарате «Egypstsat-1» использовался алгоритм второго порядка ( $m=2$ ), в космическом аппарате «Сич-2» — алгоритм третьего порядка ( $m=3$ ). Летно-конструкторские испытания космических аппаратов «Egypstsat-1» и «Сич-2» показали высокую эффективность предложенной методики. Методика может быть полезной разработчикам систем ориентации КА.

## Приложение 1

Рассмотрим ненормированный вектор  $X(t) \in R^n$ . Предположим, что его движение описывается уравнением

$$X^{(m)} = F(X, \dot{X}, \ddot{X}, \dots, X^{(m-1)}, \theta), \quad (1.1)$$

где  $\theta$  — произвольная функция времени. Представим вектор  $X$  в виде

$$X = \delta X_0. \quad (1.2)$$

Здесь  $\delta = \|X\|$ ,  $X_0 = X/\delta$ . Так как  $X_0$  — нормированный вектор, для него справедливо уравнение

$$\ddot{X}_0 = (E_n - X_0 X_0^T) f - X_0 \|\dot{X}_0\|^2. \quad (1.3)$$

Для вектора  $\ddot{X}$  можно записать соотношение

$$\ddot{X} = \ddot{\delta} X_0 + 2\dot{\delta} \dot{X}_0 + \delta \ddot{X}_0. \quad (1.4)$$

Выразив из уравнения (1.4)  $\ddot{X}_0$ , получим

$$\ddot{X}_0 = \frac{\ddot{X}}{\delta} - \frac{\dot{\delta}}{\delta} X_0 - 2\frac{\dot{\delta}}{\delta} \dot{X}_0. \quad (1.5)$$

Найдем скалярное произведение векторов  $\ddot{X}$  и  $X_0$

$$\ddot{X}^T X_0 = \ddot{\delta} - \delta \|\dot{X}_0\|^2. \quad (1.6)$$

Решив уравнение (1.6) относительно  $\ddot{\delta}/\delta$  и подставив найденное выражение в уравнение (1.5) для переменной  $\ddot{X}_0$ , можно записать выражение

$$\ddot{X}_0 = (E_n - X_0 X_0^T) \left( \frac{\ddot{X}}{\delta} - 2\frac{\dot{\delta}}{\delta} \dot{X}_0 \right) - X_0 \|\dot{X}_0\|^2. \quad (1.7)$$

Вычитая из выражения (1.3) выражение (1.7), имеем

$$(E_n - X_0 X_0^T) \left( f - \frac{\ddot{X}}{\delta} + 2\frac{\dot{\delta}}{\delta} \dot{X}_0 \right) = 0, \quad (1.8)$$

т.е. вектор  $f - \frac{\ddot{X}}{\delta} + 2\frac{\dot{\delta}}{\delta} \dot{X}_0$  принадлежит нуль-пространству  $Y_0$  матрицы  $E_n - X_0 X_0^T$ . Размерность этого пространства равна единице, а его элементы определяются выражением  $Y_0 = \alpha X_0$ , где  $\alpha$  — произвольная скалярная функция. Следовательно,

$$f - \frac{\ddot{X}}{\delta} + 2\frac{\dot{\delta}}{\delta} \dot{X}_0 = \alpha X_0. \quad (1.9)$$

Решив уравнение (1.9) относительно  $f$ , получим  $f = \frac{\ddot{X}}{\delta} - 2\frac{\dot{\delta}}{\delta} \dot{X}_0 + \alpha X_0$ .

Утверждение доказано.

Представим вектор  $\Theta$  следующим образом:

$$(E_n - X_0 X_0^T) \Theta + X_0 X_0^T \Theta = (E_n - X_0 X_0^T) f - X_0 \|\dot{X}_0\|^2. \quad (2.1)$$

Из соотношения (2.1) имеем

$$(E_n - X_0 X_0^T)(f - \Theta) = X_0(X_0^T \Theta + \|\dot{X}_0\|^2).$$

Так как  $X_0$  — нормированный вектор,  $X_0^T \Theta + \|\dot{X}_0\|^2 = 0$ . Следовательно,

$$(E_n - X_0 X_0^T)(f - \Theta) = 0,$$

т.е. вектор  $f - \Theta$  принадлежит нуль-пространству  $Y_0$  матрицы  $E_n - X_0 X_0^T$ . Следовательно,  $f - \Theta = \alpha X_0$ , отсюда  $f = \Theta + \alpha X_0$ .

Утверждение доказано.

*М.В. Єфименко*

**СИНТЕЗ АЛГОРИТМІВ КЕРУВАННЯ  
ПРОСТОРОВОЮ ПЕРЕОРІЄНТАЦІЄЮ  
КОСМІЧНОГО АПАРАТА  
З ВИКОРИСТАННЯМ ДИНАМІЧНИХ РІВНЯНЬ  
ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА  
В ПАРАМЕТРАХ РОДРІГА–ГАМІЛЬТОНА**

Запропоновано алгоритм просторової переорієнтації КА за заданий інтервал часу. На відміну від класичної постановки, в даній роботі не накладається традиційних обмежень на клас кутових рухів КА. Запропонований підхід на основі принципу максимуму дозволяє отримати аналітичне рішення задачі просторової оптимальної переорієнтації КА. На базі запропонованого алгоритму реалізовано режим програмних поворотів КА «Egyptsat-1» та «Січ-2».

*N.V. Yefimenko*

**SYNTHESIS OF CONTROL ALGORITHMS  
OF THE SPACECRAFT SPATIAL REORIENTATION  
WITH THE USE OF DYNAMIC EQUATIONS  
OF A SOLID BODY ROTATIONAL MOTION  
IN RODRIGO–HAMILTON PARAMETERS**

An algorithm for SC spatial reorientation in the specified time interval is presented. In contrast to the classical formulation the traditional restrictions are not imposed on the class of spacecraft angular motions. The proposed approach based on maximum principle allows one to obtain an analytical solution of the problem of optimal spatial reorientation of the spacecraft. On the basis of the proposed algorithm software for the mode of spacecraft «Egyptsat-1» and «Sich-2» turns has been implemented.

1. *Левский М.В.* Синтез оптимального управления терминальной ориентацией космического аппарата с использованием метода кватернионов // Известия РАН. Механика твердого тела. — 2009. — № 2. — С. 7–24.
2. *Левский М.В.* Задача оптимального по быстродействию управления переориентацией космического аппарата // ПММ. — 2009. — № 73, вып. 1. — С. 23–38.
3. *Левский М.В.* Использование интеграла энергии в оптимальном управлении пространственной ориентацией космического аппарата // Известия РАН. Механика твердого тела. — 2009. — № 4. — С. 10–23.
4. *Левский М.В.* Некоторые вопросы оптимального по времени управления программным разворотом космического аппарата // Космические исследования. — 2011. — 49, № 6. — С. 538–550.
5. *Thomas A.W., Dwyer III.* Exact nonlinear control of spacecraft slewing maneuvers with internal momentum transfer // Journal of Guidance, Control and Dynamics. — 1986. — N 2. — P. 240–247.
6. *Ефименко Н.В.* Управление переориентацией космического аппарата посредством маховиков // Проблемы управления и информатики. — 2008. — № 5. — С. 121–128.
7. *Молоденок А.В., Сапунков Я.Г.* Решение задачи оптимального разворота сферически симметричного космического аппарата с ограниченным и импульсным управлением при произвольных граничных условиях // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2004. — № 2. — С. 165–176.
8. *Ермошина О.В., Крищенко А.П.* Синтез программных управлений ориентацией космического аппарата методом обратных задач динамики // Там же. — 2000. — № 2. — С. 155–162.
9. *Велицанский М.А., Крищенко А.П., Ткачев С.Б.* Квазиоптимальная переориентация космического аппарата // Известия РАН. Механика твердого тела. — 2002. — Вып. 32. — С. 144–153.
10. *Велицанский М.А., Крищенко А.П., Ткачев С.Б.* Синтез алгоритмов переориентации космического аппарата на основе концепции обратной задачи динамики // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2003. — № 5. — С. 156–163.
11. *Крутько П.Д.* Обратные задачи динамики управляемых систем: линейные модели. — М.: Наука, 1987. — 304 с.
12. *Крутько П.Д.* Обратные задачи динамики управляемых систем: нелинейные модели. — М.: Наука, 1988. — 328 с.
13. *Челноков Ю.Н.* Управление ориентацией космического аппарата, использующее кватернионы // Космические исследования. — 1994. — 32, № 3. — С. 21–32.
14. *Кириченко Н.Ф., Матвиенко В.Т.* Алгоритмы асимптотической, терминальной и адаптивной стабилизации вращательных движений твердого тела // Проблемы управления и информатики. — 2003. — № 1. — С. 5–15.
15. *Кошляков В.Н.* Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. — М.: Наука, 1985. — 286 с.
16. *Сейдж Э.П., Уайт Ч.С., III.* Оптимальное управление системами. — М.: Радио и связь, 1982. — 392 с.

*Получено 16.10.2014  
После доработки 23.12.2014*