УДК 519-863:330-115

М.В. Бойчук, А.Р. Семчук

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОЙ ОДНОПРОДУКТОВОЙ ЭКОНОМИКИ РОСТА ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ ЭКОЛОГО-ЭКОНОМИЧЕСКОМ КРИТЕРИИ С ВИНЕРОВСКИМИ И ПУАССОНОВСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

Введение

Исследование стохастических систем макроэкономики роста с учетом влияния экологического фактора имеет огромное значение как в теоретическом, так и в практическом плане. Поэтому такие исследования актуальны.

В настоящее время стохастическое моделирование развивается в двух направлениях.

Первое направление. В детерминированную математическую модель вводятся такие случайные процессы [1], как: винеровские, пуассоновские и др. Для исследования стохастических динамических систем используются стохастические достаточные условия оптимальности [2]. Такие исследования приведены в работах [2–4] и др., в которых на модельных примерах выполнено численное моделирование. Кроме того, в работе [4] дано экономическое обоснование использования винеровских процессов при стохастическом моделировании экономических динамических систем.

Второе направление. Исследуются оптимизационные динамические системы в условиях неопределенности. Для них априорная неопределенность сводится к параметрической, когда вероятностные законы распределения для исследованных ситуаций, величин и наблюдаемых процессов известны с точностью конечного числа параметров, т.е. в условиях, когда известны функции распределения реализации неизвестных параметров и начальных условий.

В работах [5–8] и др. для динамических систем при неточной исходной информации о начальных условиях и параметрах получены необходимые условия оптимальности и формулы для градиентов функционалов в пространствах оптимизационных параметров, которые для решения оптимизационных динамических систем позволяют использовать численные методы конечной оптимизации [9].

Настоящая работа относится к первому направлению исследования стохастических систем однопродуктовой экономики роста с учетом экологического фактора при винеровских и пуассоновских процессах и нелинейном критерии цели. В эту модель включены динамики капитала производства и загрязнения окружающей среды. Приведено эколого-экономическое обоснование использования винеровских и пуассоновских процессов при стохастическом моделировании динамических систем.

Сначала сформулируем детерминированную модель оптимальной однопродуктовой экономики роста с учетом экологического фактора, а потом на ее основе формализуем стохастическую модель.

Построение детерминированной модели

Для построения детерминированной модели сформулируем основные допущения.

1. Валовая (промежуточная) продукция X состоит из конечной продукции Y и производственного потребления W в момент времени $t \in [t_0, T]$ [10]:

$$X(t) = Y(t) + W(t). \tag{1}$$

Поэтому можно считать, что производственное потребление W прямо пропорционально валовой продукции X с коэффициентом $a \in (0; 1)$

$$W(t) = aX(t), \quad t \in [t_0, T]. \tag{2}$$

Тогда конечная продукция Y выражается через валовую продукцию X по закону

$$Y(t)=(1-a)X(t),\ \ t\in[t_0,T]. \tag{3}$$

Причем валовая продукция X ограничена производственной функцией F [10]:

$$0\le X(t)\le F(K(t),L(t)),\ \ t\in[t_0,T]. \tag{4}$$

Трудовые ресурсы (рабочая сила) — это экзогенная переменная с постоянным темпом роста $n\equiv \mathrm{const}$ и экспоненциальным законом динамики

$$L(t)=L_0e^{n(t-t_0)},\ \ L_0\equiv \mathrm{const},\ \ t\in[t_0,T]. \tag{5}$$

Производственная функция F зависит от капитала производства K, трудовых ресурсов L и является дважды непрерывно дифференцируемой, монотонно возрастающей, вогнутой по каждому из аргументов при $K\ge 0$ и $L\ge 0$ и однородной степени $v\in(0;2)$ [10]

$$F(K,L)=L^vF(K/L,1)\equiv L^vf(k),$$

где $k=K/L$ — удельный капитал (фондовооруженность). Удельная производственная функция (на одного работника) f удовлетворяет требованиям: дважды непрерывно дифференцируемая по фондовооруженности k, монотонно возрастающая и вогнутая при $k\ge 0$.

2. Инвестиции в производство используются на прирост капитала $\dot K$ и амортизацию капитала A

$$I(t)=\dot K(t)+A(t),\ \ t\in[t_0,T], \tag{6}$$

где $\dot K(t)\equiv dK(t)/dt$ — производная по времени (прибыль).

Предположим, что амортизация капитала прямо пропорциональная капиталу K с коэффициентом пропорциональности $\mu\in(0;1)$ — норма амортизации

$$A(t)=\mu K(t),\ \ t\in[t_0,T]. \tag{7}$$

3. Конечный выпуск продукции Y состоит из валовой инвестиции I, непроизводственного потребления C, правительственных затрат P_3, налогов N_a, сальдо S_a (экспорт минус импорт) и затрат на борьбу с загрязнением окружающей среды Z [10]:

$$Y(t)=I(t)+C(t)+Pз(t)+Na(t)+Sa(t)+Z(t),\ \ t\in[t_0,T].$$

Пусть суммарные правительственные затраты, налоги и сальдо — часть конечного выпуска продукции Y

$$Pз(t)+Na(t)+Sa(t)=bY(t),\ \ t\in[t_0,T],\ \ b\equiv \mathrm{const}\in(0;1). \tag{8}$$

Тогда суммарные инвестиции I, потребление C и затраты на борьбу с загрязнением Z равны:

$$I(t)+C(t)+Z(t)=(1-b)Y(t)=(1-a)(1-b)X(t),\ \ t\in[t_0,T]. \tag{9}$$

4. Пусть часть $\vartheta(1-b)Y$ от части конечного выпуска продукции $(1-b)Y$ выделяется на потребление C, а часть $u(1-b)Y$ — на борьбу с загрязнением окружающей среды Z, причем выполняются неравенства $\vartheta\ge 0$, $u\ge 0$, $\vartheta+u\le 1$:

$$C(t)=\vartheta(1-b)Y(t),\ \ Z(t)=u(1-b)Y(t),\ \ t\in[t_0,T]. \tag{10}$$

Тогда валовые инвестиции I составляют

$$I(t)=(1-b)(1-\vartheta-u)Y(t)=(1-a)(1-b)(1-\vartheta-u)X(t),\ \ t\in[t_0,T]. \tag{11}$$

5. Пусть общий объем загрязнения Z прямо пропорционален части конечного выпуска продукции $(1-b)Y$ с коэффициентом пропорциональности $\varepsilon\in(0;1)$

$$Z(t)=\varepsilon(1-b)Y(t),\ \ t\in[t_0,T]. \tag{12}$$

Будем считать, что прирост объема загрязнения $\dot{Z}$ равняется общему объему загрязнения $\varepsilon(1-b)Y(t)$ минус уничтоженный объем загрязнения $r\vartheta(1-b)Y(t)$ и ассимиляция (самоуничтожение) загрязнения γZ [10]

$$\dot{Z}(t)=(1-a)(1-b)(\varepsilon-r\vartheta)X(t)-\gamma Z(t),\ \ t\in[t_0,T], \tag{13}$$

где $r>1$ — количество единиц выпуска продукции $(1-b)Y$, уничтожаемое единицу объема загрязнения Z; $\gamma\in(0;1)$ — норма ассимиляции.

6. На конечные состояния капитала $K(T)$ и загрязнения $Z(T)$ накладываются ограничения вида

$$K(T)\ge K_T,\ \ Z(T)\le Z_T. \tag{14}$$

Соотношения (1)–(14) позволяют записать детерминированную математическую модель исследуемой эколого-экономической системы.

Из (6), (7) и (11) имеем уравнение динамики капитала K

$$\dot{K}(t)=-\mu K(t)+(1-a)(1-b)(1-\vartheta-u)X(t),\ \ t\in[t_0,T], \tag{15}$$

а из (13) — уравнение динамики загрязнения Z. Ограничения на норму потребления ϑ, норму уничтожения загрязнения u, валовую продукцию X, конечные состояния капитала K и загрязнения Z имеют вид:

$$0\le\vartheta,\ \ 0\le u,\ \ \vartheta+u\le 1,\ \ 0\le X\le F(K,L),\ \ K(T)\ge K_T,\ \ Z(T)\le Z_T. \tag{16}$$

Задаются начальные состояния капитала K и загрязнения Z

$$K(t_0)=K_0,\ \ Z(t_0)=Z_0. \tag{17}$$

В математической модели (13), (15)–(17) перейдем к удельным показателям: $k=K/L$, $x=X/L$, $z=Z/L$, $k_T=K_T/L(T)$, $z_T=Z_T/L(T)$, $k_0=K_0/L_0$, $z_0=Z_0/L_0$.

Используя равенства $\dot{K}/L=\dot{k}+nk$, $\dot{Z}/L=\dot{z}+nz$, получим детерминированную математическую модель исследуемой эколого-экономической системы в удельных показателях:

$$\begin{gathered}\dot{k}(t)=-(\mu+n)k(t)+(1-a)(1-b)(1-\vartheta-u)x(t),\\ \dot{z}(t)=-(\gamma+n)z(t)+(1-a)(1-b)(\varepsilon-ru)x(t),\ \ t\in[t_0,T],\\ k(t_0)=k_0,\ z(t_0)=z_0,\ 0\le\vartheta,\ 0\le u,\ \vartheta+u\le 1,\ k(T)\ge k_T,\ z(T)\le z_T.\end{gathered} \tag{18}$$

Перейдем к формализации стохастической модели эколого-экономической динамики.

Построение стохастической модели

Пусть $\{\Omega,\mathsf{F},P\}$ — вероятностное пространство с потоком σ-алгебр $\mathsf{F}=\{\mathsf{F}_t,\ t\in[t_0,T]\}\subset\sigma$, со множеством элементарных событий Ω и мерой (вероятностью) P; $\xi_i(t)\equiv\xi_i(t,\omega)\in\mathrm{IR}$, $i=1,2$ (IR — множество действительных чисел); F_t — измеримый стандартный винеровский процесс [1] с нулевым математическим ожиданием $M\xi_i(t)=0$ и дисперсией $M\xi_i^2(t)=1$, $i=1,2$, $\omega\in\Omega$, $t\in[t_0,T]$; $\eta_i(t)\equiv\eta_i(t,\omega)\in\mathrm{IR}$, $i=1,2$, F_t — измеримый пуассоновский процесс с математическим ожиданием $M\eta_i(t)=\lambda_i(t-t_0)$, $\lambda_i\equiv\mathrm{const}$, $i=1,2$, $\omega\in\Omega$, $t\in[t_0,T]$, причем процессы ξ_i и η_i, $i=1,2$, независимы. На вероятностном пространстве $\{\Omega,\mathsf{F},P\}$ заданы случайные процессы фондовооруженности $\{k(t)\equiv k(t,\omega),\ \omega\in\Omega,\ t\in[t_0,T]\}$ и загрязнения окружающей среды $\{z(t)\equiv z(t,\omega),\ \omega\in\Omega,\ t\in[t_0,T]\}$.

Предполагается, что динамика фондовооруженности материального производства и загрязнения окружающей среды эколого-экономической системы описывается дифференциальными моделями в форме Ито [1] ($\dot{\xi}(t)$ и $\dot{\eta}(t)$ — обобщенные производные от случайностей $\xi(t)$ и $\eta(t)$):

$$\begin{aligned}\dot{k}(t) &= -(\mu+n)k(t)+(1-a)(1-b)(1-\vartheta-u)x(t)+\alpha_1(t)\dot{\xi}_1(t)+\beta_1(t)\dot{\eta}_1(t),\\ \dot{z}(t) &= -(\gamma+n)z(t)+(1-a)(1-b)(\varepsilon-ru)x(t)+\alpha_2(t)\dot{\xi}_2(t)+\beta_2(t)\dot{\eta}_2(t),\ t\in[t_0,T],\end{aligned} \qquad (19)$$

с известными начальными условиями на фондовооруженность, загрязнение и ограничением на конечное состояние фондовооруженности и загрязнения системы

$$k(t_0)=k_0,\ z(t_0)=z_0;\ k_0, z_0\in \mathsf{F}_{t_0},\ k(T)\ge k_T,\ z(T)\le z_T, \qquad (20)$$

где α_i и β_i, $i=1,2,$ — кусочно-непрерывные функции на $[t_0,T]$, k_T и z_T — заданные детерминированные величины.

Линейная комбинация $\alpha_i\dot{\xi}_i+\beta_i\dot{\eta}_i$, $i=1,2,$ в модели (19) динамики фондовооруженности и загрязнения характеризует приращения фондовооруженности $\dot{k}$ и загрязнения $\dot{z}$, причем приращения $\dot{\xi}_i$ имеют нормальное (гауссово) распределение случайности ξ_i, а приращения $\dot{\eta}_i$ — пуассоновское распределение η, где ξ — стандартный винеровский процесс с неизвестным распределением и η — пуассоновский процесс с неизвестным распределением случайности.

Приведем эколого-экономическое обоснование уравнений динамики фондовооруженности и загрязнения (19). Пусть осуществляется наблюдение за приращением фондовооруженности $\dot{k}$ (аналогично для приращения загрязнения $\dot{z}$). По закону больших чисел из теории вероятности известно, что на больших выборках наблюдений приращение $\dot{k}$ подчинено нормальному (гауссову) закону распределения случайностей, а при малых вероятностях — пуассоновскому распределению. В наблюдения за приращением фондовооруженности предположительно входит помеха в виде слагаемого. Помеха бывает пилообразной и скачкообразной или их комбинацией (сочетанием). Пилообразная подчинена нормальному закону распределения случайностей, а скачкообразная — пуассоновскому распределению. Поэтому прирост фондовооруженности $\dot{k}$ можно представить как слагаемое линейной комбинации приростов некоторых винеровских $\dot{\xi}_1$ и пуассоновских $\dot{\eta}_1$ процессов, причем ξ_1 — стандартный винеровский процесс, у которого приращение $\dot{\xi}_1$ подчинено нормальному закону распределения при неизвестном распределении ξ_1, а η_1 — пуассоновский процесс, у которого прирост $\dot{\eta}_1$ подчинен пуассоновскому закону распределения при неизвестном распределении случайности η_1.

Таким образом, при стохастическом моделировании в детерминированную модель (18) можно вводить как слагаемые линейные комбинации приращений некоторых винеровских $\dot{\xi}_i$ и пуассоновских $\dot{\eta}_i$ процессов с заданными коэффициентами α_i и β_i: $\alpha_i(t)\dot{\xi}_i(t)+\beta_i(t)\dot{\eta}_i(t)$, $i=1,2,$ $t\in[t_0,T]$.

Запишем ограничения на нормы потребления, уничтожения загрязнения и валовую продукцию

$$0\le\vartheta, u,\quad \vartheta+u\le 1,\ \ 0\le x(t)\le L_0^{\nu-1}e^{(\nu-1)n(t-t_0)}f(k(t)),\ \ t\in[t_0,T]. \qquad (21)$$

Задача состоит в том, чтобы максимизировать среднюю интегральную дисконтируемую функцию полезности

$$M\int_{t_0}^{T} e^{-\sigma(t-t_0)}U(C(t),Z(t))dt\to\max_{\vartheta,u,x},$$

$$C(t)=(1-a)(1-b)\vartheta x(t)L_0e^{n(t-t_0)}, \qquad (22)$$

$$Z(t)=L_0e^{n(t-t_0)}z(t).$$

Здесь M — математическое ожидание; $\sigma \equiv \mathrm{const} > 0$ — норма дисконта; $U(C, Z)$ — функция полезности со свойствами: дважды непрерывно дифференцируемая по $C \geq 0$ и $Z \geq 0$, монотонно возрастающая по C и монотонно убывающая по Z, вогнутая по C и Z, $U(0, 0) = 0$.

В математическом плане (19)–(22) — задача оптимального управления, в которой фазовой траекторией выступает фондовооруженность k и загрязнение z, а управлениями — норма потребления ϑ, норма уничтожения загрязнения u и удельная валовая продукция x.

Исследование стохастической модели управления

Для задачи (19)–(22) без ограничения на конечные состояния системы k_T и z_T запишем уравнение Беллмана [2] — стохастические достаточные условия оптимальности

$$\inf_{\vartheta, u, x} R(t, k, z, V, \vartheta, u, x) \equiv \inf_{\vartheta, u, x} \left\{ \frac{\partial V}{\partial t} + [-(\mu + n)k + (1-a)(1-b)(1-\vartheta-u)x]\frac{\partial V}{\partial k} + \right.$$

$$+ [-(\gamma + n)z + (1-a)(1-b)(\varepsilon - ru)x]\frac{\partial V}{\partial z} + 0.5\alpha_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial k^2} + 0.5\alpha_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \lambda_1[V(t, k+\beta_1, z) -$$

$$\left. - V(t, k, z)] + \lambda_2[V(t, k, z+\beta_2) - V(t, k, z)] - e^{-\sigma(t-t_0)}U(C, Z) \right\} = 0, \tag{23}$$

$$C(t) = (1-a)(1-b)L_0\vartheta e^{n(t-t_0)}x(t), \;\; Z(t) = L_0 e^{n(t-t_0)}z(t),$$
$$t \in [t_0, T], \;\; V(T, k_T, z_T) = 0,$$

где неизвестная функция $V(t, k, z)$ — непрерывно дифференцируемая один раз по t и дважды по k и z на декартовом произведении $[t_0, T] \times \{k \geq 0\} \times \{z \geq 0\}$.

Из функции R выделим слагаемые по ϑ и u

$$H(\vartheta, u) = -(1-a)(1-b)x\left(\frac{\partial V}{\partial k} + r\frac{\partial V}{\partial z}\right)u - \left\{(1-a)(1-b)x\vartheta\frac{\partial V}{\partial k} + e^{-\sigma(t-t_0)}U(C, Z)\right\}.$$

Тогда функции R и H имеют одни и те же наименьшие значения. Поэтому достаточно рассмотреть оптимизационную задачу

$$\inf_{(\vartheta, u) \in \Delta} H(\vartheta, u), \tag{24}$$

где областью изменения ϑ и u является треугольник $\Delta = \{(\vartheta, u) \in \mathrm{I}\mathbf{R}^2 \,|\, 0 \leq \vartheta, u, \vartheta + u \leq 1\}$.

Решение задачи (24) — управления по нормам потребления ϑ и уничтожения загрязнения u:

А) u — произвольное из $[0; 1-\vartheta]$, а ϑ — решение уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial k} + L_0 e^{(n-\sigma)(t-t_0)}U'_C(C, Z) = 0\,, \tag{25}$$

если $\dfrac{\partial V}{\partial k} + r\dfrac{\partial V}{\partial z} = 0;$ этот случай является режимом «золотого века», поскольку происходит накопление капитала, потребления и проводится борьба с загрязнением окружающей среды — режим сравнительно равномерного распределения благосостояния между этими процессами;

Б) $u = 0$, а ϑ — решение уравнения (25), если $\dfrac{\partial V}{\partial k} + r\dfrac{\partial V}{\partial z} < 0$ и соответственно производная $\dfrac{\partial H}{\partial u}$ положительна (> 0), а значит, функция H по u монотонно возрастающая на $[0; 1-\vartheta]$ и наименьшее значение принимает при $u=0;$ этот случай является режимом «темного века», поскольку инвестиции на борьбу с загрязнением не выделяются — не проводится борьба с загрязнением;

В) $\vartheta + u = 1,$ если $\frac{\partial V}{\partial k} + r\frac{\partial V}{\partial z} > 0$ и соответственно производная $\frac{\partial H}{\partial u}$ отрицательна (<0), а значит, функция H по u монотонно убывающая на $[0; 1-\vartheta]$ и наименьшее значение принимает при $\vartheta + u = 1,$ а ϑ — решение уравнения (25); имеем режим «проедания», поскольку не происходит процесс накопления капитала.

Конкретизируем эти случаи, выделив в каждом задачу оптимизации по валовой продукции x.

Случай А. В этом случае выполняется равенство $\frac{\partial V}{\partial k} + r\frac{\partial V}{\partial z} = 0.$ По норме потребления ϑ запишем необходимое условие оптимальности функции R — равенство нулю частной производной первого порядка по ϑ от R (уравнение (25))

$$\frac{\partial R}{\partial \vartheta} = -(1-a)(1-b)x\frac{\partial V}{\partial k} - L_0(1-a)(1-b)e^{(n-\sigma)(t-t_0)}x \times$$

$$\times U'_C(C, Z) = -(1-a)(1-b)x\left[\frac{\partial V}{\partial k} + L_0 e^{(n-\sigma)(t-t_0)}U'_C(C, Z)\right] = 0. \qquad (26)$$

Вычислим частную производную первого порядка от R по x

$$\frac{\partial R}{\partial x} = (1-a)(1-b)(1-\vartheta-u)\frac{\partial V}{\partial k} + (1-a)(1-b)(\varepsilon - ru)\frac{\partial V}{\partial z} -$$

$$- L_0(1-a)(1-b)\,\vartheta e^{(n-\sigma)(t-t_0)}xU'_C(C, Z). \qquad (27)$$

С использованием равенств $\frac{\partial V}{\partial k} + r\frac{\partial V}{\partial z} = 0$ и (25) для частной производной $\frac{\partial R}{\partial x}$ получим

$$\frac{\partial R}{\partial x} = (1-a)(1-b)\frac{\partial V}{\partial k}[1-\vartheta-u-\varepsilon r^{-1}+u+\vartheta] = (1-\varepsilon r^{-1})(1-a)(1-b)\frac{\partial V}{\partial k}. \qquad (28)$$

При $\varepsilon \in (0; 1),$ $r>1$ и $\frac{\partial V}{\partial k} < 0$ из (28) получаем, что частная производная отрицательна $\left(\frac{\partial R}{\partial x} < 0\right).$ Поэтому по x функция R монотонно убывает на $[0; L_0^{\nu-1}e^{(\nu-1)n(t-t_0)}f(k)]$ и принимает наименьшее значение при магистральном управлении по валовой продукции

$$x_{\text{mag}}(t) = L_0^{\nu-1}e^{(\nu-1)n(t-t_0)}f(k), \;\; t\in[t_0, T]. \qquad (29)$$

Это значит, что происходит полная загруженность производственного сектора.

При $\frac{\partial V}{\partial k} > 0$ частная производная положительна $\left(\frac{\partial R}{\partial x} > 0\right).$ Поэтому функция R монотонно возрастает по x на $[0; L_0^{\nu-1}e^{(\nu-1)n(t-t_0)}f(k)]$ и наименьшее значение принимает при $x=0$ (производство отсутствует). С практической точки зрения такой случай нас не интересует.

Если $\frac{\partial V}{\partial k} = 0,$ то из уравнения $\frac{\partial V}{\partial k} + r\frac{\partial V}{\partial z} = 0$ получаем, что $\frac{\partial V}{\partial z} = 0,$ а из уравнения (26) имеем $U'_C(C, Z) = 0.$ Это невозможно, поскольку предположительно функция U монотонно возрастающая по C, поэтому производная $U'_C(C>0, Z>0) > 0$ положительна.

Итак, магистральное управление по валовой продукции x_{mag} описывается уравнением (29) при $\frac{\partial V}{\partial k} > 0.$ Тогда из уравнения $\frac{\partial V}{\partial k} + r\frac{\partial V}{\partial z} = 0$ имеем, что $\frac{\partial V}{\partial z} < 0.$

 ISSN 0572-2691

Из неравенства $\dfrac{\partial V}{\partial k} < 0$ и равенств $\dfrac{\partial V}{\partial k} + r\dfrac{\partial V}{\partial z} = 0, \ V(T, k_T, z_T) = 0$ следует представление неизвестной функции V

$$V(t,k,z) = -lL_0 e^{(n-\sigma)(t-t_0)}(k - r^{-1}z) + lL_0 e^{(n-\sigma)(T-t_0)}(k_T - r^{-1}z_T), \ \ t \in [t_0, T], \quad (30)$$

где постоянная $l > 0$ подчинена выбору.

Подставив (30) в уравнения (25) и Беллмана (23), для определения оптимизационных величин по норме потребления ϑ, фондовооруженности k и загрязнению z получим систему нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{gathered} -l + U'_C(C, Z) = 0, \\ -l(\mu+\sigma)L_0 e^{n(t-t_0)}k - r^{-1}l(\gamma+\sigma)L_0 e^{n(t-t_0)}z + l(1-a)(1-b)L_0^{\nu} e^{\nu n(t-t_0)} f(k) \times \\ \times(1 - \vartheta - \varepsilon r^{-1}) + \lambda_1 l \beta_1 L_0 e^{n(t-t_0)} + \lambda_2 l r^{-1}\beta_2 L_0 e^{n(t-t_0)} - U(C, Z) = 0, \qquad (31) \\ C(t) = (1-a)(1-b)\vartheta L_0 e^{n(t-t_0)} f(k), \\ Z(t) = L_0 e^{n(t-t_0)} z(t), \ \ t \in [t_0, T]. \end{gathered}$$

Система уравнений (31) имеет два уравнения, а неизвестных три ϑ, k и z. Эту систему дополним средними уравнениями динамики фондовооруженности и загрязнения со средними начальными условиями. Для получения средних уравнений динамики используем равенства для винеровских и пуассоновских процессов [1]

$$M\dot{\xi}_i(t) = (M\xi_i(t))^{\bullet}, \ \ M\dot{\eta}_i(t) = (M\eta_i(t))^{\bullet} = (\lambda_i(t - t_0))^{\bullet} = \lambda_i, \ \ t \in [t_0, T], \ \ i = 1, 2. \quad (32)$$

В результате получим среднюю динамику фондовооруженности и загрязнения со средними начальными условиями

$$\begin{gathered} \dot{k}(t) = -(\mu + n)k(t) + (1-a)(1-b)L_0^{\nu-1}(1 - \vartheta - u)e^{(\nu-1)n(t-t_0)} f(k(t)) + \lambda_1\beta_1(t), \\ \dot{z}(t) = -(\gamma + n)z(t) + (1-a)(1-b)L_0^{\nu-1}(\varepsilon - ru)e^{(\nu-1)n(t-t_0)} f(k(t)) + \lambda_2\beta_2(t), \qquad (33) \\ k(t_0) = Mk_0, \ \ z(t_0) = Mz_0, \ \ t \in [t_0, T]. \end{gathered}$$

Имеем систему нелинейных уравнений (31) и (33) по определению норм потребления ϑ и уничтожения загрязнения u, средних фондовооруженности k и загрязнения z. Она имеет решение по ϑ, u, k, z при выполнении условий: производственная функция $f(k \ge 0)$ — дважды непрерывно дифференцируемая, монотонно возрастающая, вогнутая, а функция полезности $U(C \ge 0, \ Z \ge 0)$ дважды непрерывно дифференцируемая, монотонно возрастающая по C, монотонно убывающая по Z и вогнутая по C и Z. Если $u \le 0$ или $\vartheta \le 0$, то соответственно необходимо взять $u = 0$ или $\vartheta = 0$. Тогда магистральные управления по нормам потребления ϑ_{mag} и загрязнения u_{mag} вычисляются по формулам

$$\vartheta_{\text{mag}}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } \vartheta = 0 \text{ и } u = 0, \\ \vartheta(t), & \text{если } \vartheta + u \le 1, \\ \dfrac{\vartheta(t)}{\vartheta(t) + u(t)}, & \text{если } \vartheta + u > 1, \end{cases} \quad u_{\text{mag}}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } \vartheta = 0 \text{ и } u = 0 \\ u(t), & \text{если } \vartheta + u \le 1, \\ \dfrac{u(t)}{\vartheta(t) + u(t)}, & \text{если } \vartheta + u > 1, \end{cases} \quad (34)$$

$$t \in [t_0, T].$$

Функции ϑ_{mag} и u_{mag} кусочно-непрерывны на $[t_0, T]$.

Отметим, что функции ϑ и u можно определить из системы уравнений (31), (33) совместным использованием одного из численных методов решения нелинейных уравнений [11] и одного из численных методов решения начальных задач [11].

Соответствующие стохастические магистральные траектории (магистрали) по фондовооруженности k_{mag} и загрязнению z_{mag} определяются одним из численных методов [12, 13] из стохастической начальной задачи (19)–(20) при $x = x_{\text{mag}}$, $\vartheta = \vartheta_{\text{mag}}$ и $u = u_{\text{mag}}$. Поскольку производственная функция $f(k \geq 0)$ — дважды непрерывно дифференцируемая, монотонно возрастающая и вогнутая, нормы потребления ϑ_{mag} и уничтожения загрязнения u_{mag} непрерывны на $[t_0, T]$, а α_i и β_i, $i = 1, 2$, — кусочно-непрерывны на $[t_0, T]$, то стохастическая начальная задача (19)–(20) имеет единственное решение по k_{mag} и z_{mag} в смысле стохастической эквивалентности [12–14], а магистрали по фондовооруженности k_{mag} и загрязнению z_{mag} — непрерывно дифференцируемые функции на $[t_0, T]$.

Средние магистрали по фондовооруженности и загрязнению определяются из начальной задачи (33) при $u = u_{\text{mag}}$ и $\vartheta = \vartheta_{\text{mag}}$.

Итак, определен магистральный процесс $\{\vartheta_{\text{mag}}(t),\ u_{\text{mag}}(t),\ x_{\text{mag}}(t),\ k_{\text{mag}}(t),\ z_{\text{mag}}(t),\ t \in [t_0, T]\}$.

Исследование случаев Б и В проводится аналогично случаю А.

Имеем три магистральных процесса, т.е. три эколого-экономических режима для выбора приоритетного процесса среди процессов накопления капитала, потребления, загрязнения и сравнительно равномерного распределения благосостояния между этими процессами на магистральном отрезке времени (периоде).

Магистральные процессы определены при неучете ограничений на конечные состояния стохастической системы по фондовооруженности k_T и загрязнению z_T. Проверим, удовлетворяют ли средние магистрали конечным состояниям стохастической системы выбранным эколого-экономическим режимом.

Если средние магистрали по фондовооруженности $Mk_{\text{mag}}(T)$ и загрязнению $Mz_{\text{mag}}(T)$ соответственно превышают k_T и не превышают z_T

$$Mk_{\text{mag}}(T) \geq k_T, \quad Mz_{\text{mag}}(T) \leq z_T, \tag{35}$$

то магистральный процесс для выбранного эколого-экономического режима оптимален $k_{opt}(t) = k_{\text{mag}}(t)$, $z_{opt}(t) = z_{\text{mag}}(t)$, $x_{opt}(t) = x_{\text{mag}}(t)$, $\vartheta_{opt}(t) = \vartheta_{\text{mag}}(t)$, $u_{opt}(t) = u_{\text{mag}}(t)$, $t \in [t_0, T]$.

В противном случае или $Mk_{\text{mag}}(T) < k_T$ и $Mz_{\text{mag}}(T) \leq z_T$, или $Mk_{\text{mag}}(T) < k_T$ и $Mz_{\text{mag}}(T) > z_T$, или $Mk_{\text{mag}}(T) > k_T$ и $Mz_{\text{mag}}(T) < z_T$, необходимо построить правые управления по нормам потребления ϑ_{rig} и уничтожения загрязнения u_{rig}, соответствующие правые траектории по фондовооруженности k_{rig} и загрязнению z_{rig}, а также момент переключения управлений ζ.

Рассмотрим случай, когда выполняются неравенства $Mk_{\text{mag}}(T) < k_T$ и $Mz_{\text{mag}}(T) > z_T$ (для других случаев исследование проводится аналогично).

Правое управление по нормам потребления и уничтожения загрязнения. Средняя правая траектория по фондовооруженности k_{rig} должна монотонно возрастать, а средняя правая траектория по загрязнению z_{rig} — монотонно убывать при $Mk_{\text{mag}}(T) < k_T$ и $Mz_{\text{mag}}(T) > z_T$ для выбранного эколого-экономического режима. Для этого необходимо выполнение неравенств

$$\begin{gathered}
\dot{k}(t) = -(\mu + n)\, k(t) + (1-a)(1-b)(1-\vartheta-u)\, L_0^{\nu-1} e^{(\nu-1)n(t-t_0)} f(k(t)) + \lambda_1 \beta_1(t) > 0, \\
\dot{z}(t) = -(\gamma + n)\, z(t) + (1-a)(1-b)(\varepsilon - ru)\, L_0^{\nu-1} e^{(\nu-1)n(t-t_0)} f(k(t)) + \lambda_2 \beta_2(t) < 0, \\
t \in [t_0, T].
\end{gathered} \tag{36}$$

 ISSN 0572-2691

Из неравенств (36), ограничений на управления по нормам потребления и уничтожения загрязнения, ограничений на состояние системы по фондовооруженности и загрязнению сформулируем задачу нелинейного программирования для определения правых управлений по нормам потребления ϑ_{rig} и уничтожения загрязнения u_{rig} :

$$\begin{gathered}
\max(-y(t)),\\
-(\mu+n)k(t)+(1-a)(1-b)(1-\vartheta-u)L_0^{\nu-1}e^{(\nu-1)n(t-t_0)}f(k(t))+\lambda_1\beta_1(t)-y(t)=\tilde{\varepsilon},\\
-(\gamma+n)z(t)+(1-a)(1-b)(\varepsilon-ru)L_0^{\nu-1}e^{(\nu-1)n(t-t_0)}f(k(t))+\lambda_2\beta_2(t)\le-\tilde{\varepsilon},\\
Mk_{\text{mag}}(t)\le k(t)\le k_T,\ Mz_{\text{mag}}(t)\ge z(t)\ge z_T,\ 0\le\vartheta(t),u(t),\ \vartheta(t)+u(t)\le 1,\ t\in[t_0,T],
\end{gathered}\tag{37}$$

где $\tilde{\varepsilon}>0$ — заданное достаточно малое число.

Если задача нелинейного программирования (37) не имеет решения для выбранного эколого-экономического режима, то это означает, что конечные состояния k_T и z_T недостижимы, необходимо перейти на следующий режим. А если для всех трех эколого-экономических режимов соответствующая задача нелинейного программирования (37) не имеет решения, то это означает, что конечные состояния k_T и z_T недостижимы и необходимо ослабить ограничения на исходную информацию задачи управления (19)–(22).

Пусть задача нелинейного программирования (37) имеет непрерывные на $[t_0,T]$ решения. Эти решения ϑ_{rig} и u_{rig} соответственно по нормам потребления и уничтожения загрязнения будут правыми управлениями. Причем задачу нелинейного программирования (37) можно решить одним из численных методов [15].

Момент переключения управлений. Для определения момента переключения управлений ζ необходимо решить задачу оптимального быстродействия. Формализуем эту задачу. Пусть $\tau_{\vartheta,u}(k,z)$ — момент первого достижения множества $D_{\varepsilon_0}=\{(k,z)\in \mathrm{IR}^2 \mid Mk_{\text{mag}}(t)-\varepsilon_0\le k(t)\le Mk_{\text{mag}}(t)+\varepsilon_0\le k_T,\ z_T\le Mz_{\text{mag}}(t)-\varepsilon_0\le$ $\le z(t)\le Mz_{\text{mag}}(t)+\varepsilon_0,\ t\in[t_0,T]\}$ ($\varepsilon_0>0$ — достаточно малое заданное число) стохастической системой

$$\begin{gathered}
\dot{k}(t)=-(\mu+n)k(t)+(1-a)(1-b)[1-\vartheta(t)-u(t)]L_0^{\nu-1}e^{(\nu-1)n(t-t_0)}f(k(t))+\\
+\alpha_1(t)\dot{\xi}_1(t)+\beta_1(t)\dot{\eta}_1(t),\\
\dot{z}(t)=-(\gamma+n)z(t)+(1-a)(1-b)[\varepsilon-ru(t)]L_0^{\nu-1}e^{(\nu-1)n(t-t_0)}f(k(t))+\\
+\alpha_2(t)\dot{\xi}_2(t)+\beta_2(t)\dot{\eta}_2(t),\\
0\le\vartheta(t)\le\vartheta_{\text{rig}}(t),\ 0\le u(t)\le u_{\text{rig}}(t),\ t\in[\zeta_{\text{rig}},T],\\
(k(\zeta_{\text{rig}}),z(\zeta_{\text{rig}}))\in D_{\varepsilon_0},\ k(T)=k_T,\ z(T)=z_T,
\end{gathered}\tag{38}$$

формально начинающей движение в обратном направлении оси t из точки $k=k_T$, $z=z_T$ при $t=T$. Задача оптимального быстродействия заключается в выборе такого управления по нормам потребления ϑ и уничтожения загрязнения u, при котором среднее время достижения множества D_{ε_0} движущейся точкой минимально:

$$\begin{gathered}
\tau_{\vartheta^*_{\text{rig}},u^*_{\text{rig}}}(k,z)=\min_{\vartheta,u} M\tau_{\vartheta,u}(k,z),\\
0\le\vartheta(t)\le\vartheta_{\text{rig}}(t),\ 0\le u(t)\le u_{\text{rig}}(t),
\end{gathered}\tag{39}$$

где ζ — искомый момент переключения управлений, ϑ_{rig}, u_{rig} — соответственно управления по нормам потребления и уничтожения загрязнения — решения задачи нелинейного программирования (37).

Для решения задачи (38), (39) запишем уравнение Беллмана [2] с краевым условием

$$\inf_{\vartheta, u}\left\{ \frac{\partial}{\partial t}V(t,k,z)+[-(\mu+n)k+(1-a)(1-b)L_0^{\nu-1}(1-\vartheta-u)e^{(\nu-1)\,n(t-t_0)}f(k)]\times\right.$$

$$\times\frac{\partial}{\partial k}V(t,k,z)+[-(\gamma+n)z+(1-a)(1-b)L_0^{\nu-1}(\varepsilon-ru)e^{(\nu-1)\,n(t-t_0)}f(k)]\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial z}V(t,k,z)+0{,}5\alpha_1^2(t)\frac{\partial^2}{\partial k^2}V(t,k,z)+0{,}5\alpha_2^2(t)\frac{\partial^2}{\partial z^2}V(t,k,z)+ \tag{40}$$

$$\left.+\lambda_1[V(t,k+\beta_1,z)-V(t,k,z)]+\lambda_2[V(t,k,z+\beta_2)-V(t,k,z)]-1\right\}=0,\ t\in[\zeta,T],$$

$$V(\zeta, Mk_{\text{mag}}(\zeta),\ Mz_{\text{mag}}(\zeta))=0,$$

$$0\le\vartheta(t)\le\vartheta_{\text{rig}}(t),\ 0\le u(t)\le u_{\text{rig}}(t),\ t\in[\zeta_{\text{rig}},T],$$

где функция V непрерывно дифференцируемая один раз по t и дважды по k и z на декартовом произведении $[t_0,T]\times\{k\ge 0\}\times\{z\ge 0\}$.

Решением уравнения Беллмана по нормам потребления и уничтожения загрязнения будут функции

$$\vartheta^*_{\text{rig}}(t)=\begin{cases}\vartheta_{\text{rig}}(t), & \text{если } \dfrac{\partial V}{\partial k}>0,\\ 0, & \text{если } \dfrac{\partial V}{\partial k}<0,\\ \text{произвольное из} & \\ [0,\vartheta_{\text{rig}}], & \text{если } \dfrac{\partial V}{\partial k}=0,\end{cases}\quad u^*_{\text{rig}}(t)=\begin{cases}u_{\text{rig}}(t), & \text{если } \dfrac{\partial V}{\partial k}+r\dfrac{\partial V}{\partial z}>0,\\ 0, & \text{если } \dfrac{\partial V}{\partial k}+r\dfrac{\partial V}{\partial z}<0,\\ \text{произвольное из} & \\ [0,u_{\text{rig}}], & \text{если } \dfrac{\partial V}{\partial k}+r\dfrac{\partial V}{\partial z}=0.\end{cases}$$

Для того чтобы $\vartheta^*_{\text{rig}}(t)=\vartheta_{\text{rig}}(t)$ и $u^*_{\text{rig}}(t)=u_{\text{rig}}(t)$, необходимо выполнение неравенств

$$\frac{\partial V}{\partial k}>0,\ \frac{\partial V}{\partial k}+r\frac{\partial V}{\partial z}>0. \tag{41}$$

С учетом неравенств (41) неизвестную функцию V будем искать в виде

$$V(t,k,z)=l(k+z)-l[Mk_{\text{mag}}(\zeta)-Mz_{\text{mag}}(\zeta)], \tag{42}$$

где постоянная $l>0$ подлежит выбору.

Подставим (42) в (40), а потом $u=u_{\text{rig}}$, $\vartheta=\vartheta_{\text{rig}}$, $k=Mk_{\text{mag}}(\zeta)$, $z=Mz_{\text{mag}}(\zeta)$ и $t=\zeta$. Получим нелинейное алгебраическое уравнение для определения момента переключения управлений ζ

$$l\{-(\mu+n)Mk_{\text{mag}}(\zeta)+(1-a)(1-b)L_0^{\nu-1}[1-\vartheta_{\text{rig}}(\zeta)-u_{\text{rig}}(\zeta)]\times$$

$$\times e^{(\nu-1)n(\zeta-t_0)}f(Mk_{\text{mag}}(\zeta))\}+l\{-(\gamma+n)Mz_{\text{mag}}(\zeta)+(1-a)(1-b)L_0^{\nu-1}[\varepsilon--ru_{\text{rig}}(\zeta)]\times \tag{43}$$

$$\times e^{(\nu-1)n(\zeta-t_0)}f(Mk_{\text{mag}}(\zeta))\}+\lambda_1\beta_1(\zeta)l+\lambda_2\beta_2(\zeta)l-1=0,\ \zeta\in(t_0,T),$$

решить которое можно одним из численных методов [11]. Причем выбором постоянной $l>0$ можно добиться того, чтобы ζ принадлежало (t_0,T).

Правые траектории. По найденным правым управлениям по нормам потребления ϑ_{rig} и уничтожения загрязнения u_{rig} и моменту переключения управлений ζ соответствующие стохастические правые траектории по фондовооруженности k_{rig} и загрязнению z_{rig} определяются из уравнений динамики задачи (19) при $x=x_{\text{mag}}$, $\vartheta=\vartheta_{\text{rig}}$, $u=u_{\text{rig}}$ и начальных условиях $k(\zeta)=k_{\text{mag}}(\zeta)$,

ISSN 0572-2691

$z(\zeta) = z_{\text{mag}}(\zeta)$. Соответствующие средние правые траектории определяем из средних уравнений динамики (19) с использованием равенств (32) при $x = x_{\text{mag}}$, $\vartheta = \vartheta_{\text{rig}}$, $u = u_{\text{rig}}$, $\alpha_i = 0$, $\dot{\eta}_i(t) = \lambda_i$, $i = 1, 2$, и начальных условиях $k(\zeta) = Mk_{\text{mag}}(\zeta)$, $z(\zeta) = Mz_{\text{mag}}(\zeta)$. При этом правые траектории k_{rig} и z_{rig} являются непрерывно дифференцируемыми функциями на $[t_0, T]$.

Итак, определен правый процесс $\{\vartheta_{\text{rig}}(t),\ u_{\text{rig}}(t),\ x_{\text{rig}}(t) = L_0^{\nu-1} e^{(\nu-1)n(t-t_0)} \times$ $\times f(k_{\text{rig}}(t)),\ k_{\text{rig}}(t),\ z_{\text{rig}}(t),\ t \in [\zeta, T]\}$ для выбранного эколого-экономического режима.

Оптимальный процесс. Согласно результатам [2] стохастическим и средним оптимальным процессом на $[t_0, \zeta)$ является стохастический и средний магистральный процесс, а на $[\zeta, T]$ — стохастический и средний правый процесс

$$\vartheta_{\text{opt}}(t) = \begin{cases} \vartheta_{\text{mag}}(t), \text{ если } t \in [t_0, \zeta), \\ \vartheta_{\text{rig}}(t), \quad \text{если } t \in [\zeta, T], \end{cases} \quad u_{\text{opt}}(t) = \begin{cases} u_{\text{mag}}(t), \text{ если } t \in [t_0, \zeta), \\ u_{\text{rig}}(t), \quad \text{если } t \in [\zeta, T], \end{cases}$$

$$k_{\text{opt}}(t) = \begin{cases} k_{\text{mag}}(t), \text{ если } t \in [t_0, \zeta), \\ k_{\text{rig}}(t), \quad \text{если } t \in [\zeta, T], \end{cases} \quad z_{\text{opt}}(t) = \begin{cases} z_{\text{mag}}(t), \text{ если } t \in [t_0, \zeta), \\ z_{\text{rig}}(t), \quad \text{если } t \in [\zeta, T], \end{cases} \tag{44}$$

$$x_{\text{opt}}(t) = L_0^{\nu-1} e^{(\nu-1)n(t-t_0-\tau)} f(k_{\text{opt}}(t)),\ t \in [t_0, T].$$

Следует заметить, что оптимальные управления по нормам потребления ϑ_{opt} и уничтожения загрязнения u_{opt} — кусочно-непрерывные функции, оптимальное управление по валовой продукции x_{opt} — кусочно-дифференцируемая функция, а соответствующие оптимальные траектории по фондовооруженности k_{opt} и загрязнению z_{opt} — кусочно-дифференцируемые функции на $[t_0, T]$.

Алгоритм расчета оптимального процесса

1. Выбрать необходимый эколого-экономический режим среди трех (случаи А, Б и В).

2. Проверить, все ли режимы перебраны среди трех. Если все режимы перебраны, то выход из алгоритма.

Если перебраны не все режимы из трех, то перейти к п. 3.

3. Для выбранного режима найти магистральные управления по нормам потребления ϑ_{mag} и уничтожения загрязнения u_{mag} по формулам (34).

4. Вычислить стохастические и средние магистральные фондовооруженность k_{mag} и загрязнение z_{mag}.

5. Проверить выполнение неравенств для средних магистральных фондовооруженности $Mk_{\text{mag}}(T) \geq k_T$ и загрязнения $Mz_{\text{mag}}(T) \leq z_T$. При выполнении этих неравенств стохастический и средний магистральный процесс является оптимальным процессом. Выход из алгоритма.

В противном случае, т.е. $Mk_{\text{mag}}(T) < k_T$ и $Mz_{\text{mag}}(T) \geq z_T$ или $Mk_{\text{mag}}(T) < k_T$ и $Mz_{\text{mag}}(T) \leq z_T$ либо $Mk_{\text{mag}}(T) \geq k_T$ и $Mz_{\text{mag}}(T) > z_T$, переход к п. 6.

6. Определить правые управления по нормам потребления ϑ_{rig} и уничтожения загрязнения u_{rig} из решения задачи нелинейного программирования (37). Если решения ϑ_{rig} и u_{rig} не существуют, то перейти на последующий эколого-экономический режим и к п. 2.

Если решения ϑ_{rig} и u_{rig} существуют, то вычислить их.

7. Вычислить момент переключения управлений ζ из решения нелинейного уравнения (43).

8. Определить стохастические и средние правые траектории по фондовооруженности k_{rig} и загрязнению z_{rig}.

9. Вычислить стохастический и средний оптимальный процесс по формулам (44). Выход из алгоритма.

Модельный пример численного моделирования стохастической системы

Входная информация: $\mu = 0{,}04$, $n = 0{,}06$, $b = 0{,}15$, $\alpha_1(t) = 4$, $\alpha_2(t) = 5$, $\beta_1(t) = 0$, $\beta_2(t) = 0$, $t \in [0; 10]$, $t_0 = 0$, $T = 10$, $\varepsilon = 0{,}4$, $\gamma = 0{,}02$, $r = 1{,}3$, $L_0 = 3$, $\nu = 1{,}1$, $f(k) = 2k^{0.6}$, $a = 0{,}2$, $k_0 = 20$, $z_0 = 30$, $\delta = 0{,}08$, $U(C, Z) = 2C^{0.5} - 3Z^{1.5}$, $k_T = 400$, $z_T = 10$.

При вычислениях выбрали первый эколого-экономический режим (случай А). Результаты вычислений оптимальных управлений по нормам потребления ϑ_{opt} и уничтожения загрязнения u_{opt} приведены в таблице.

Таблица

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ϑ_{opt}	0,316	0,312	0,309	0,305	0,301	0,299	0,127	0,112	0,093	0,072	0,031
u_{opt}	0,314	0,317	0,320	0,324	0,329	0,331	0,336	0,341	0,344	0,346	0,348

Момент переключения управлений равняется $\zeta = 4{,}687$. Система уравнений (31), (33) решалась совместным использованием метода касательных и метода Рунге–Кутта с шагом $\Delta t = 0{,}08$ [11], магистрали по фондовооруженности и загрязнению — методом Рунге–Кутта с шагом $\Delta t = 0{,}08$ [12, 13], правые управления по нормам потребления и уничтожения загрязнения определялись методом Эрроу–Гурвица [15] из задачи нелинейного программирования (37), момент переключения управлений — методом касательных [11] из нелинейного уравнения (43), правые траектории по фондовооруженности и загрязнению — методом Рунге–Кутта [12, 13] с шагом $\Delta t = 0{,}08$.

С эколого-экономической точки зрения стохастическая эколого-экономическая система к моменту переключения $\zeta = 4{,}687$ движется по магистралям фондовооруженности и загрязнению, а в момент $\zeta = 4{,}687$ сходит с магистралей и движется по правым траекториям фондовооруженности и загрязнения. На отрезке времени $[4{,}687; 10]$ большая часть инвестиций идет на накопление капитала — в среднем 56,4 %, на борьбу с загрязнением — в среднем 34,4 %, а малая часть идет на потребление — в среднем 8,7 %.

Заключение

Магистральные и правые управления по нормам потребления и загрязнения и правый момент переключения управлений носят детерминированный характер, а магистрали и правые траектории по фондовооруженности и загрязнению — стохастический.

Для системы (19)–(22) определены три эколого-экономических режима для выбора приоритетного режима на магистральном периоде среди режимов отсутствия накопления капитала, отсутствия проведения борьбы с загрязнением окружающей среды и сравнительно равномерного распределения благосостояния между накоплением капитала, потреблением и уничтожением загрязнения.

 ISSN 0572-2691

М.В. Бойчук, А.Р. Семчук

СТОХАСТИЧНА МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОЇ ОДНОПРОДУКТОВОЇ ЕКОНОМІКИ ЗРОСТАННЯ ПРИ НЕЛІНІЙНОМУ ЕКОЛОГО-ЕКОНОМІЧНОМУ КРИТЕРІЮ З ВІНЕРІВСЬКИМИ І ПУАССОНІВСЬКИМИ ПРОЦЕСАМИ

Запропоновано стохастичну еколого-економічну модель динаміки капіталу та забруднення з вінерівськими і пуассонівськими процесами, проведено її дослідження та на модельному прикладі проведено числове моделювання.

M.V. Boychuk, A.R. Semchuk

STOCHASTIC MODEL OF AN OPTIMAL SINGLE-COMPONENT ECOMOMICS OF GROWTH IN NONLINEAR ECOLOGICAL-ECONOMIC CRITERION WITH WIENER AND POISSON PROCESSES

A stochastic ecological-economic model of the dynamics of capital and contamination with Wiener and Poisson processes is proposed, analyzed and an example is used to carry out numerical modeling.

1. *Скороход А.В.* Лекції з теорії випадкових процесів. — Киев: Либідь, 1990. — 168 с.
2. *Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е.* Управление системами с последействием. — М. : Наука, 1992. — 336 с.
3. *Бойчук М.В., Семчук А.Р.* Стохастическое моделирование полного цикла однопродуктовой макроэкономики роста // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — № 2. — С. 156–163.
4. *Бойчук М.В., Семчук А.Р.* Стохастическая модель полного цикла оптимальной эколого-экономической динамики // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2013. — №2. — С. 125–139.
5. *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И.* Синтез оптимальных управлений для динамических систем при неполной и неточной информации об их состояниях // Тр. МИАН. — 1995. — **211**. — С. 140–158.
6. *Третьяков В.Е., Целищева И.В., Шишкин Г.И.* Оптимальное управление системами с неполной и неточной информацией // Тр. ИММ. — 1992. — **2**. — С. 176–187.
7. *Chen S.B.* The robust optimal control of uncertain systems — state space method // Automatic Control. — 1993. — **38**, N 6. — P. 951–957.
8. *Айда-Заде К.Р., Рагимов А.Б.* Оптимальное управление сосредоточенной системой на классе кусочно-постоянных функций при неточно заданной информации о параметрах и начальных условиях // Кибернетика и системный анализ. — 2012. — № 3. — С. 91–100.
9. *Бейко И.В., Бублик Б.Н., Зинько П.Н.* Методы и алгоритмы решения задач оптимизации — Киев: Вища шк., 1983. — 512 с.
10. *Бойчук М.В., Семчук А.Р.* Моделювання та оптимізація повного циклу однопродуктової макроекономіки зростання з урахуванням екологічного фактора. — Чернівці: Місто, 2012. — 208 с.
11. *Ясинський В.К.* Основи обчислювальних методів. — Чернівці: Золоті литаври, 2005. — 396 с.
12. *Юрченко І.В., Ясинська Л.І., Ясинський В.К.* Методи стохастичного моделювання систем, — Чернівці: Прут, 2002. — 416 с.
13. *Никитин Н.Н., Разевич В.Д.* Методы цифрового моделирования стохастических дифференциальных уравнений и оценка их погрешности // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1978. — **18**, № 1. — С. 106–117.
14. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Управляемые случайные процессы. — Киев: Наук. думка, 1977. — 432 с.
15. *Акулич И.Л.* Математическое программирование в примерах и задачах. — М.: Высш. шк., 1986. — 319 с.

Получено 02.09. 2014